ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2004
Seria: GÓRNICTWO z. 260 Nr kol. 1649

Władysław ZAPAŁA
Politechnika Śląska, Gliwice

DYSKRETNA TRANSFORMATA FOURIERA OKNA CZASOWEGO SKONSTRUOWANEGO ZA POMOCĄ FUNKCJI GAMMA

Streszczenie. W referacie przedstawiono dyskretne okno czasowe bez listków bocznych w dziedzinie częstotliwości. Okno skonstruowano za pomocą funkcji gamma. Wyznaczono dyskretną transformatę Fouriera dla tego okna czasowego, a następnie przedstawiono jego charakterystyki częstotliwościowe.

DISCRETE FOURIER TRANSFORMATION OF THE TIME WINDOW CONSTRUCTED BASING ON GAMMA FUNCTION

Summary. Discrete time window without side lobes in frequency domain has been presented in the paper. The window has been constructed basing on gamma function. Discrete Fourier transformation of this window has been determined and next its frequency characteristics have been presented.

1. Wprowadzenie

Okna czasowe prezentowane w literaturze skonstruowane są w następujący sposób:

$$w(t) = f(t) \cdot R(t) \tag{1}$$

gdzie: w(t) – okno czasowe, f(t) – funkcja czasu, R(t) – okno prostokątne.

Okno prostokątne ma postać:

$$R(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| \le \tau \\ 0 & \text{dla } |t| > \tau \end{cases} \tag{2}$$

gdzie: $\tau \ge 0$.

Funkcja czasu f(t) spełnia warunki:

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{dla } t=0 \\ 0<y\le 1 & \text{dla } |t|\le\tau \\ y\ne 0 & \text{dla } |t|>\tau \end{cases} \tag{3}$$

Pomnożenie funkcji czasu f(t) przez okno prostokątne R(t) zapewnia, że okno czasowe w(t) spełnia podstawowe zależności:

$$w(t)=\begin{cases} 1 & \text{dla } t=0 \\ 0<y\le 1 & \text{dla } |t|\le\tau \\ 0 & \text{dla } |t|>\tau \end{cases} \tag{4}$$

Każde okno czasowe w(t) skonstruowane według tego schematu nie jest ciągłą funkcją czasu. A zatem, każde okno skonstruowane w przedstawiony powyżej sposób ma w dziedzinie częstotliwości zarówno listek główny, jak również listki boczne.

Okno czasowe przedstawione w referacie zostało skonstruowane w zupełnie inny sposób, ponieważ okno jest zbudowane za pomocą funkcji czasu, która nie jest mnożona przez okno prostokątne. Taka konstrukcja jest możliwa w czasie dyskretnym, jak to zostało wyjaśnione w dalszej części referatu.

2. Objaśnienie konstrukcji okna czasowego

Rozpatrzmy następującą funkcję czasu ciągłego:

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{\tau+T}{T}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\tau+T}{T}\right)}{\Gamma\left(\frac{\tau+T+t}{T}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\tau+T-t}{T}\right)} \tag{5}$$

gdzie: $\Gamma(x)$ - funkcja gamma zmiennej x,

t - czas ciągły, $-\infty<t<+\infty$,

τ - parametr, który występuje w definicji okna prostokątnego (równanie (2)),

T - okres próbkowania, funkcja f(t) będzie próbkowana za pomocą tego odstępu czasowego.

Przyjmując założenie, że $\frac{\tau}{T}=k$, funkcja (5) może być zapisana w równoważnej postaci:

$$f(t) = \frac{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(k+1)}{\Gamma\left[(k+1)+\frac{t}{T}\right]\cdot\Gamma\left[(k+1)-\frac{t}{T}\right]}, \qquad k=0, 1, 2, .. \quad (6)$$

Funkcja czasu ciągłego przedstawiona powyżej przyjmuje następujące wartości:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(1+\frac{t}{T}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{t}{T}\right)} = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}} & \text{gdy } k = 0 \\ \dfrac{(-1)^k\cdot\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(k+1)\cdot\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}\cdot\prod_{i=1}^{k}\dfrac{1}{\left(\frac{t}{T}-i\right)\cdot\left(\frac{t}{T}+i\right)} & \text{gdy } k \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

W czasie dyskretnym (np. kiedy $\frac{t}{T} = n$) wartości tej funkcji mogą być obliczone zgodnie ze wzorem:

$$f(nT) = \lim_{t\to nT} f(t) \quad (8)$$

Wynik końcowy uzyskany przez autora jest następujący:

$$f(nT) = \begin{cases} \dfrac{k!}{(k+n)!}\cdot\dfrac{k!}{(k-n)!} & n = 0, \pm 1, \ldots, \pm k \\ 0 & n = \pm(k+1), \pm(k+2), \ldots \end{cases} \quad (9)$$

Tak więc, w czasie dyskretnym, okno czasowe może być przedstawione w postaci:

$$w(nT) = f(nT) \quad (10)$$

tzn. bez mnożenia funkcji f(nT) przez okno prostokątne.

W dalszych rozdziałach referatu zostało udowodnione, że dyskretne okno czasowe skonstruowane w przedstawiony powyżej sposób nie ma listków bocznych w dziedzinie częstotliwości.

3. Równania opisujące dyskretne okno czasowe

Równania opisujące dyskretne okno czasowe zależą od przedziału czasu, w którym okno jest zdefiniowane.

3.1. Pierwsza postać okna czasowego

W tym przypadku dyskretne okno czasowe $w_n^{(N)}$ ma następującą postać w dziedzinie czasu:

$$w_n^{(N)} = \frac{\left(\frac{N-1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{N-1}{2}\right)!}{n! \cdot (N-n-1)!} = \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(N-n)} \tag{11}$$

gdzie: N – liczba naturalna, N=1, 2, 3, ... ,

n – liczba całkowita, n=0, ±1, ±2, ...

Następujące zależności są spełnione bez jakiegokolwiek dodatkowego warunku nałożonego na dyskretną funkcję czasu

$$0 < w_n^{(N)} \le 1 \quad \text{dla} \quad 0 \le n \le N-1 \tag{12}$$

$$w_n^{(N)} = 0 \quad \text{dla} \quad n < 0 \quad \text{lub} \quad n \ge N \tag{13}$$

Korzystając z równań (11), (12) i (13), można obliczyć dyskretną transformatę Fouriera prezentowanego okna czasowego w sposób, jak następuje:

$$w_n^{(N)}(j\varpi T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n^{(N)} \cdot e^{-jn\varpi T} = \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{-jn\varpi T}}{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(N-n)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \cdot \left[\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]^{N-1} \cdot e^{-\frac{j(N-1)\varpi T}{2}} \tag{14}$$

3.2. Druga postać okna czasowego

Gdy długość N okna czasowego jest liczbą nieparzystą, tzn. N=2k+1, wtedy okno czasowe może być przedstawione w postaci:

$$w_n^{(2k+1)} = \frac{k!\cdot k!}{(k+n)!\cdot(k-n)!} = \frac{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n+1)\cdot\Gamma(k-n+1)} \tag{15}$$

gdzie: k jest nieujemną liczbą całkowitą, k=0, 1, 2, ... , oraz n jest liczbą całkowitą, n=0, ± 1, ± 2, ... , .

Wtedy następujące zależności są prawdziwe bez jakiegokolwiek dodatkowego warunku

$$0 < w_n^{(2k+1)} \le 1 \text{ dla } |n| \le k \tag{16}$$

$$w_n^{(2k+1)} = 0 \text{ dla } |n| > k \tag{17}$$

Dyskretna transformata Fouriera tego okna czasowego jest przedstawiona za pomocą wzoru

$$w_n^{(2k+1)}(j\varpi T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n^{(2k+1)} \cdot e^{-jn\varpi T} = \Gamma(k+1)\cdot\Gamma(k+1)\cdot\sum_{n=-k}^{k}\frac{e^{-jn\varpi T}}{\Gamma(k+n+1)\cdot\Gamma(k-n+1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\cdot\left[\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]^{2k} \tag{18}$$

3.3. Trzecia postać okna czasowego

Kiedy długość N dyskretnego okna czasowego jest liczbą parzystą, tzn. N=2k, wtedy okno czasowe może być przedstawione w postaci:

$$w_n^{(2k)} = \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)!\cdot\left(k-\frac{1}{2}\right)!}{(k+n-1)!\cdot(k-n)!} = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+n)\cdot\Gamma(k-n+1)} \tag{19}$$

gdzie: k jest wtedy liczbą naturalną, k=1, 2, 3, ... , oraz n jest, jak poprzednio, liczbą całkowitą, n=0, ± 1, ± 2, ... , .

Następujące zależności są wówczas spełnione bez jakiegokolwiek dodatkowego warunku nałożonego na dyskretną funkcję czasu

$$0 < w_n^{(2k)} < 1 \quad \text{dla } -k+1 \le n \le k \tag{20}$$

$$w_n^{(2k)} = 0 \quad \text{dla } n<-k+1 \quad \text{lub } n>k \tag{21}$$

Dyskretna transformata Fouriera tej postaci okna czasowego jest wyrażona wzorem:

$$w_n^{(2k)}(j\varpi T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n^{(2k)} \cdot e^{-jn\varpi T} = \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot \sum_{n=-k+1}^{k} \frac{e^{-jn\varpi T}}{\Gamma(k+n)\cdot\Gamma(k-n+1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k)}\cdot\left[\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]^{2k-1}\cdot e^{-\frac{j\varpi T}{2}} \tag{22}$$

4. Charakterystyki częstotliwościowe okna czasowego

Funkcje opisane równaniami (14), (18) i (22) są funkcjami okresowymi zmiennej ϖT o okresie równym 2π. A zatem, poniżej zostaną przedstawione charakterystyki częstotliwościowe w głównym przedziale $-\pi \le \varpi T \le +\pi$. Charakterystyka amplitudowa jest następująca:

$$\left|w_n^{(N)}(j\varpi T)\right| = \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}\cdot\left[\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]^{N-1} \quad \text{dla } -\pi \le \varpi T \le +\pi \tag{23}$$

Z równania (23) wynika, że przedstawione dyskretne okno czasowe nie ma listków bocznych w dziedzinie częstotliwości.

Charakterystyka fazowa ma postać:

$$\varphi_n^{(N)}(\varpi T) = -\frac{(N-1)\varpi T}{2} \quad \text{dla } -\pi \le \varpi T \le +\pi \tag{24}$$

Z równania (24) wynika, że charakterystyka fazowa jest prawdziwie liniową charakterystyką fazową.

Charakterystyka tłumienia:

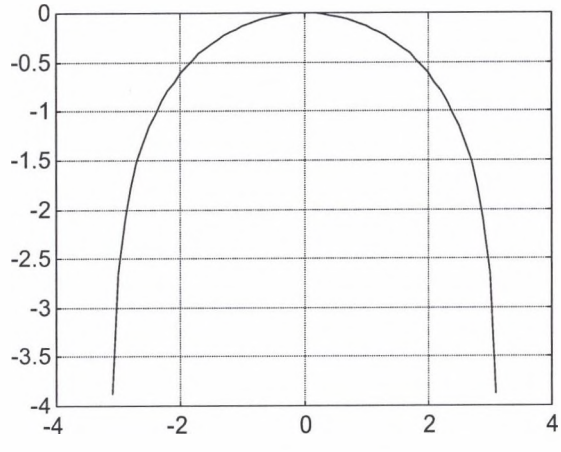
$$Y_n^{(N)}(\varpi T) = 20\log_{10}[\frac{\left|w_n^{(N)}(j\varpi T)\right|}{\left|w_n^{(N)}(0)\right|}] = 20\cdot(N-1)\cdot\log_{10}\left[\cos(\frac{\omega T}{2})\right] \quad \text{dla } -\pi \le \varpi T \le +\pi \tag{25}$$

$$Y_n^{(N)}(\varpi T = \pm\pi) = -\infty \tag{26}$$

Rysunek 1 przedstawia wykres funkcji

$$f(\varpi T) = \log_{10}\left[\cos(\frac{\omega T}{2})\right] \quad \text{dla } -3.1 < \varpi T < +3.1 \tag{27}$$

Aby obliczyć $Y_n^{(N)}(\varpi T)$, skala osi pionowej tego wykresu powinna być pomnożona przez 20(N-1). Na przykład, jeżeli długość okna czasowego jest równa N=51, to wtedy skala jest mnożona przez 1000.



Rys. 1. Wykres funkcji opisanej równaniem (27)
Fig. 1. The chart of the function described by equation (27)

5. Dolnoprzepustowy filtr cyfrowy skojarzony z dyskretnym oknem czasowym

Niech w(t) będzie oknem czasowym, a w(z) oznacza transformatę Z tego okna czasowego. Wtedy można łatwo obliczyć dolnoprzepustowy filtr cyfrowy o transmitancji K(z) skojarzony z w(z) w następujący sposób:

$$K(z) = \frac{w(z)}{w(z=1)} \tag{28}$$

W celu wyznaczenia transformaty Z dla okna czasowego przedstawionego w referacie najpierw oblicza się sumę:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} w_n^{(N)} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\left(\frac{N-1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{N-1}{2}\right)!}{n! \cdot (N-n-1)!} = \left[\left(\frac{N-1}{2}\right)!\right]^2 \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n! \cdot (N-n-1)!} \tag{29}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n! \cdot (N-n-1)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{N-1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{N-2}{2}\right)!} \tag{30}$$

$$S_N = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \left(\frac{N-1}{2}\right)!}{\left(\frac{N-2}{2}\right)!} \tag{31}$$

W następnym kroku dyskretne okno czasowe zostaje przedstawione w równoważnej postaci:

$$w_n^{(N)} = \frac{\left(\frac{N-1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{N-1}{2}\right)!}{n! \cdot (N-n-1)!} = S_N \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\left(\frac{N-1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{N-2}{2}\right)!}{n! \cdot (N-n-1)!}\right] \tag{32}$$

i biorąc pod uwagę następującą zależność, która jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej N

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\left(\frac{N-1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{N-2}{2}\right)!}{n! \cdot (N-n-1)!} = \frac{1}{2^{N-1}} \cdot \binom{N-1}{n} \tag{33}$$

gdzie: $\binom{N-1}{n} = \frac{(N-1)!}{n! \cdot (N-n-1)!}$ - zgodnie z symbolem Newtona,

ostatecznie dyskretne okno czasowe przyjmuje postać, która jest dogodna dla obliczenia dyskretnej transformaty Z

$$w_n^{(N)} = \frac{S_N}{2^{N-1}} \cdot \binom{N-1}{n} \tag{34}$$

Dyskretna transformata przedstawionego okna czasowego jest obliczana zgodnie z definicją tej transformacji

$$w_n^{(N)}(z) = Z[w_n^{(N)}] = \sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(N)} \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} w_n^{(N)} \cdot z^{-n} =$$

$$= \frac{S_N}{2^{N-1}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1}{n} \cdot z^{-n} = \frac{S_N}{2^{N-1}} \cdot (1+z^{-1})^{N-1} \tag{35}$$

$$w_n^{(N)}(z) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \left(\frac{N-1}{2}\right)!}{\left(\frac{N-2}{2}\right)!} \cdot \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^{N-1} \tag{36}$$

$$K(z) = \frac{w_n^{(N)}(z)}{w_n^{(N)}(z=1)} = \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^{N-1} \tag{37}$$

Tak więc, został wyznaczony dobrze znany cyfrowy filtr wygładzający. Należy zwrócić uwagę, że schemat obliczeń przedstawiony w tym rozdziale nie jest odwracalny. Nie jest możliwe obliczenie $w_n^{(N)}(z)$ na podstawie założenia, że transmitancja filtru K(z) jest znana.

6. Podsumowanie

W referacie przedstawione zostało dyskretne okno czasowe. Okno zostało wyznaczone podczas prac na temat metod projektowania filtrów cyfrowych o prawdziwie liniowej charakterystyce fazowej i metod dotyczących rekurencyjnych obliczeń cyfrowych filtrów różniczkujących. Przedstawione okno czasowe ma jedynie listek główny i nie ma listków bocznych w dziedzinie częstotliwości. A zatem, okno czasowe ma dobre własności i proponuje się stosowanie tego okna czasowego do projektowania filtrów cyfrowych za pomocą metody okienkowania.

LITERATURA

1. Fichtenholz G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1999.
2. Gerstenkorn T., Śródka T.: Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1974.
3. Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O.: Matematyka konkretna. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 2002.
4. Joury E.I.: Przekształcenie Z i jego zastosowania. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1970.
5. Lyons R.G.: Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2000.
6. Zapała W.: Designing method of true linear phase filters. Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, vol.2, pp. 1039-1044.Poland, Międzyzdroje 28-31 August 2001.
7. Zapała W.: Ideal digital differentiating filters. Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, vol.1, pp. 549-554. IEEE Conference Number 8119. Poland, Szczecin 2-5 September 2002.
8. Zapała W.: Recursive calculations of digital differentiators. Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, vol.2, pp.1251-1256. IEEE Conference Number 8780. Poland, Międzyzdroje 25-28 August 2003.
9. Zapała W.: Discrete time window and its frequency characteristics. Proceedings of the10th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, vol.1, pp.691-694. IEEE Conference Number 9195. Poland, Międzyzdroje 30 August -2 September 2004.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Rościsław Buń

Abstract

Discrete time window without side lobes in frequency domain has been presented in the paper. The window has been constructed basing on gamma function. Discrete Fourier transformation of this window has been determined and next its frequency characteristics have been presented.