ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: Matematyka-Fizyka z. 29 Nr kol. 559

Damian BRÜCKNER, Marian PODHORODYŃSKI
Instytut Matematyki - Uniwersytet Śląski

Bogdan SKALMIERSKI
Instytut Mechaniki Teoretycznej -
Politechnika Śląska

CHARAKTERYSTYKI STATYSTYCZNE ZMIENNEJ LOSOWEJ W UJĄCIU DYSTRYBUCYJNYM

Streszczenie. W pracy przedstawiono charakterystyki statystyczne zmiennej: funkcję charakterystyczną, momenty, semiinwarianty i quasimomenty a także związki między nimi.
Wprowadzono pojęcie niezależności zmiennych losowych, gęstości warunkowych i zmiennych ściśle związanych.

Wstęp

Niniejsza praca jest kontynuacją naszego poprzedniego artykułu [2], w którym przedstawiliśmy odmienne od tradycyjnego ujęcie podstaw rachunku prawdopodobieństwa. Zasadniczą rolę odgrywa w nim zmienna losowa, jej dystrybuanta i gęstość, zdefiniowane w oparciu o pojęcie średniej dystrybucyjnej.

W pracy tej przedstawimy dalsze charakterystyki statystyczne zmiennej losowej: funkcję charakterystyczną, momenty, semiinwarianty i quasimomenty a także związki między nimi. Zwracamy uwagę na istotną rolę zmiennej losowej typu normalnego, podajemy jej funkcję charakterystyczną i gęstość, a za ich pomocą oraz quasimomentów wyrazimy gęstość dość szerokiej klasy zmiennych losowych. Wprowadzimy pojęcia niezależności zmiennych losowych, gęstości warunkowej oraz zmiennych ściśle związanych. Podamy wzory na funkcję charakterystyczną i gęstość sumy niezależnych zmiennych losowych.

Ze względu na dystrybucyjny charakter pojęć wyjściowych (zmienna losowa - gęstość) uzasadnienie faktów tak potraktowanego rachunku prawdopodobieństwa wymaga stosowania aparatu teorii dystrybucji. Szczególną rolę odgrywa tutaj transformacja Fouriera dystrybucji, traktowanej nie jako klasa abstrakcji równoważnych ciągów podstawowych [4], [2], lecz jako funkcjonał określony na przestrzeni funkcji próbnych [5], [7], co znacznie upraszcza rachunki i czyni je bardziej przejrzystymi. Dlatego też w pierwszej części artykułu podamy definicję dystrybucji Schwartza i przedstawimy możliwość otrzymania jej, wychodząc od dystrybucji w sensie Mikusińskiego [1], [3], [4], [5].

1. Uwaga na temat funkcjonałowego ujęcia teorii dystrybucji

Przestrzeń $D_N(O)$ wszystkich funkcji gładkich o wartościach zespolonych i nośnikach

$$\operatorname{supp} \varphi(k) = \operatorname{cl} \left\{ x \in R^N : \varphi(x) \neq 0 \right\} \subset O \tag{1.1}$$

zwartych, gdzie O jest otwartym podzbiorem przestrzeni R^N, nazywamy przestrzenią funkcji próbnych o nośnikach zwartych.

Ciąg $\varphi_n(x)$ funkcji próbnych o nośnikach zwartych nazywamy zbieżnym w $D_N(O)$ do $\varphi(x)$, co zapisujemy:

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[D_N(O)]{} \varphi(x)$$

jeżeli istnieje zwarty zbiór $K \subset O$ taki, że:

$$\operatorname{supp} \varphi_n \subset K, \text{ dla wszystkich } n \text{ naturalnych} \tag{1.2}$$

$$\varphi_n^{(k)}(x) \underset{O}{\rightrightarrows} \varphi^{(k)}(x) \text{ dla dowolnego rzędu } k=(k_1,\dots,k_N)$$

$$0 \leqslant k_i \in Z \quad i = 1,\dots,N. \tag{1.3}$$

Każde odwzorowanie T określone na $D_N(O)$ i przyjmujące wartości zespolone nazywamy funkcjonałem na $D_N(O)$. Piszemy:

$$T(\varphi) = (T,\varphi) \in C. \tag{1.4}$$

Funkcjonał T nazywamy liniowym na $D_N(O)$, jeżeli:

$$(T, \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda(T,\varphi_1) + \mu(T,\varphi_2), \tag{1.5}$$

$$\lambda, \mu \in C, \; \varphi_1, \varphi_2 \in D_N(O).$$

Funkcjonał T nazywamy ciągłym na $D_N(O)$, jeżeli zachodzi:

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[D_N(O)]{} \varphi(x), \text{ to } (T,\varphi_n) \xrightarrow[C]{} (T,\varphi), \; n \to \infty \tag{1.6}$$

Każdy funkcjonał T liniowy i ciągły na $D_N(O)$ nazywamy N - wymiarową dystrybucją w sensie Schwartza [5], [7].
Przestrzeń liniową wszystkich N-wymiarowych dystrybucji w sensie Schwartza oznaczamy $D'_N(O)$.

Ciąg T_n dystrybucji w sensie Schwartza nazywamy słabo zbieżnym do dystrybucji T ($T_n \xrightarrow[D_N(0)]{} T$), jeżeli dla każdej funkcji $\varphi \in D_N(0)$

$$(T_n,\varphi) \longrightarrow (T,\varphi), \quad n \longrightarrow \infty \tag{1.7}$$

Niech S_N oznacza przestrzeń wszystkich funkcji gładkich o wartościach zespolonych i o własnościach:

$$\|X\|^m \left|\varphi^{(k)}(x)\right| < C_{mk} \tag{1.8}$$

przy czym stałe C_{mk} są dobrane dla dowolnie ustalonych $0 \leqslant m \in Z$ i rzędu k. Warunek (1.8) oznacza, że pochodna $\varphi^{(k)}(x)$ dowolnego rzędu zmierza, gdy $\|X\| \longrightarrow \infty$, do zera szybciej niż dowolna potęga nieujemna $\frac{1}{\|X\|}$. Przestrzeń S_N zawiera wraz z funkcją $\varphi(x)$ jej pochodne dowolnego rzędu k.

Przestrzeń liniową S_N nazywamy przestrzenią funkcji próbnych szybko malejących.

Ciąg $\varphi_n(x)$ funkcji próbnych szybko malejących nazywamy zbieżnym w S_N do $\varphi(x)$

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[S_N]{} \varphi(x),$$

jeżeli zachodzi:

$$\|X\|^m \left|\varphi_n^{(k)}(x)\right| \leqslant C_{mk} \tag{1.9}$$

dla $x \in R^N$ i prawie wszystkich n naturalnych, przy czym stałe C_{mk} są dobrane dla dowolnie ustalonych $0 \leqslant m \in Z$ i rzędu k oraz

$$\varphi_n^{(k)}(x) \rightrightarrows \varphi^{(k)}(x) \tag{1.9a}$$

dla dowolnego rzędu k, w każdym podzbiorze ograniczonym R^N.

Przestrzeń S_N jest zamknięta ze względu na tak zdefiniowaną zbieżność.

Każdy funkcjonał liniowy i ciągły na S_N nazywamy N - wymiarową dystrybucją temperowaną. Przestrzeń liniową wszystkich N - wymiarowych dystrybucji temperowanych oznaczamy przez $\bar{S}_N$.

Ciąg T_n dystrybucji temperowanych nazywamy zbieżnym w $\bar{S}_N$ do dystrybucji T (piszemy $T_n \xrightarrow[\bar{S}_N]{} T$), jeżeli dla każdej funkcji $\varphi(x)$ próbnej szybko malejącej zachodzi:

$$(T_n,\varphi) \longrightarrow (T,\varphi), \quad n \longrightarrow \infty. \tag{1.10}$$

Dowodzi się [7], że:

$$D_N(R^N) \subset S_N \subset S_N' \subset D_N'(R^N) \text{ i że } D_N(0) \subset D_N'(0) \tag{1.10}$$

w sposób gęsty, oraz że odpowiednia zbieżność ciągu elementów jednej z tych przestrzeni implikuje odpowiednią zbieżność tego ciągu we wszystkich nadprzestrzeniach.

Niech $T(x) = [p_n(x)]$ oznacza N - wymiarową dystrybucję w sensie Mikusińskiego określoną w 0 [4], [2].

Dystrybucji tej można przyporządkować funkcjonał określony na $D_N(0)$ przyjmując [3]:

$$(T,\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int_{R^N} p_n(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi(x) \in D_N(0) \tag{1.11}$$

Istnienie granicy (1.11) wynika z podstawowości ciągu $p_n(x)$, a jej zależność od wyboru ciągu $r_n(x)$ generującego tę samą dystrybucję $T(x)$ z faktu, iż $r_n(x) \sim_0 p_n(x)$.

Tak zdefiniowany funkcjonał T jest liniowy i ciągły na $D_N(0)$, a więc jest dystrybucją w sensie Schwartza.

Zbieżność dystrybucyjną w sensie Mikusińskiego [4], [2] nazywamy zbieżnością mocną.

Zbieżność ta jest równoważna zbieżności słabej ciągu odpowiednich funkcjonałów (dystrybucji Schwartza) zdefiniowanych we wzorze (1.11) [1].

Niech T oznacza dystrybucję w sensie Schwartza, tzn. $T \in D_N'(0)$. Z gęstości przestrzeni $D_N(0)$ w $D_N'(0)$ wynika istnienie ciągu $\varphi_n(x)$ funkcji próbnych o nośnikach zwartych słabo zbieżnego do T. Z równoważności zbieżności słabej i mocnej oraz twierdzenia (iii) [2] wynika, że ciąg $\varphi_n(x)$ jest podstawowy w 0 oraz, że każde dwa ciągi $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ słabo zbieżne do T są równoważne w 0. Tak więc dystrybucji T (Schwartza) przyporządkowaliśmy dystrybucję w sensie Mikusińskiego, mianowicie dystrybucję $[\varphi_n(x)]$.

Określone wyżej odwzorowania są wzajemnie odwrotne i ciągłe, tak więc oba pojęcia dystrybucji są w naturalny sposób równoważne.

2. Transformacja Fouriera a funkcja charakterystyczna zmiennej losowej

Transformatą Fouriera funkcji próbnej szybko malejącej $\varphi(x) \in S_N$ nazywamy funkcję:

$$\hat{\varphi}(u) = \mathcal{F}\varphi(x)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\exp\left\{j\sum_{k=1}^{N} u_k x^k\right\} dx^1 \dots dx^N, \tag{2.1}$$

gdzie: $j = \sqrt{-1} \in C$, a odwzorowanie $\mathcal{F}$ przyporządkowujące funkcjom $\varphi(x) \in S_N$ transformaty Fouriera nazywamy transformacją Fouriera [7].

Transformacja ta jako różnowartościowa posiada odwrotną

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}\,\hat{\varphi}(u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(u)\exp\left\{-j\sum_{k=1}^{N}u_k x^k\right\}du^1\ldots du_N \qquad (2.2)$$

Transformacje $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^{1}$ są liniowymi ciągłymi odwzorowaniami przestrzeni S_N na siebie.

W przypadku jednowymiarowym, tzn.: gdy $\varphi(x) \in S_1$, wzory (2.1), (2.2) przyjmują postać:

$$\hat{\varphi}(u) = \mathcal{F}\varphi(x)(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{jux}\,dx \qquad (2.3)$$

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}\varphi(u)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)e^{-jux}\,du. \qquad (2.4)$$

Transformatą Fouriera N-wymiarowej dystrybucji temperowanej $T \in S_N$ nazywamy funkcjonał $\mathcal{F}T = \hat{T}$ o własności:

$$(\hat{T},\varphi) = (\mathcal{F}T,\varphi) = (T,\mathcal{F}\varphi),\ \varphi \in S_N. \qquad (2.5)$$

Funkcjonał ten jest liniowy i ciągły na S_N, a więc jest dystrybucją temperowaną ($\mathcal{F}T \in S'_N$).

Transformatą odwrotną Fouriera nazywamy funkcjonał $\mathcal{F}^{-1}(\hat{T}) = T$ o własności:

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{T},\varphi) = (\hat{T},\mathcal{F}^{-1}\varphi),\ \ \varphi \in S_N. \qquad (2.6)$$

Tak zdefiniowana transformata Fouriera dystrybucji temperowanej jest rozszerzeniem transformaty Fouriera funkcji lokalnie całkowalnej.

Transformacja Fouriera dystrybucji posiada następujące własności:

$$(\mathcal{F}f(x))^{(k)} = \mathcal{F}((jx)^k f(x)) \qquad (2.7)$$

$$\mathcal{F}^{-1}((\mathcal{F}f(x))^{(k)}) = (jx)^k f(x) \qquad (2.7a)$$

$$\mathcal{F}(f^{(k)}(x)) = (-ju)^k\,\mathcal{F}f(x) \qquad (2.8)$$

$$f^{(k)}(x) = \mathcal{F}^{-1}((-ju)^k\,\mathcal{F}f(x)) \qquad (2.8a)$$

gdzie:

$$(jx)^k = (jx^1)^{k_1} \ldots (jx^N)^{k_N}, \quad k = (k_1 \ldots k_N) \tag{2.9}$$

$$Ff(x-x_0) = Ff(x) \cdot \exp\left\{ j \sum_{k=1}^{N} u_k x_0^k \right\}. \tag{2.10}$$

Następujące przykłady przybliżą nieco metody rachunkowe na dystrybucjach w sensie Schwartza i ich transformatach Fouriera. Jak już zaznaczyliśmy, odpowiadają im w sposób wzajemnie jednoznaczny dystrybucje w sensie Mikusińskiego. Pochodną dystrybucyjną rzędu $k = (k_1 \ldots k_N)$ dystrybucji T Mikusińskiego można traktować jako funkcjonał $T^{(k)}$ o własności:

$$(T^{(k)}, \varphi) = (T, (-1)^{|k|} \varphi^{(k)}), \varphi \in D_N(0), \tag{2.11}$$

gdzie: $|k| = k_1 + \ldots + k_N$.

W szczególności dystrybucję $\delta(x)$ można traktować jako funkcjonał:

$$(\delta(x), \varphi(x)) = (H^{(1)}(x), \varphi(x)). \tag{a}$$

Stąd i z (2.11) wynika, że:

$$(\delta(x), \varphi(x)) = (H(x), (-1)^N \varphi^{(1)}(x)). \tag{b}$$

Funkcje lokalnie całkowalne są dystrybucjami w obu teoriach dystrybucji. W teorii Schwartza funkcję lokalnie całkowalną $f(x)$ utożsamia się z funkcjonałem:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx^1 \ldots dx^N. \tag{2.12}$$

Stąd i z (b) otrzymujemy:

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} H(x)(-1)^N \varphi^{(1)}(x)\, dx^1 \ldots dx^N = \varphi(0). \tag{c}$$

Tak więc krótko zapiszemy:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \varphi \in D_N(0) \tag{2.13}$$

Korzystając ze wzoru (2.5) otrzymujemy:

$$(\mathcal{F}\delta(x)(u), \varphi(u)) = (\delta(x), \mathcal{F}\varphi(u)(x)). \tag{d}$$

Stąd i z definicji (2.1) wynika, że:

$$(\mathcal{F}\delta(x)(u),\ \varphi(u)) = (\delta(x), \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \exp j \sum_{k=1}^{N} x^k u_k \, du_1 \dots du_{N_1}), \qquad (e)$$

zaś ze wzorów (e) i (2.13), że:

$$(\mathcal{F}\delta(x)(u),\ \varphi(u)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\, du_1 \dots du_N = (1, \varphi(u)). \qquad (f)$$

Tak więc krótko:

$$\mathcal{F}\delta = 1. \qquad (2.14)$$

Przypomnimy teraz przedstawione w [2] definicje:

Rodzinę ξ ciągów liczbowych ${}_1\xi^{\alpha}, \dots\dots, {}_i\xi^{\alpha}, \dots, \alpha \in \Lambda$, takich, że dla każdego $x \in \bar{R} = R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ granica:

$$\langle H(x - \xi) \rangle = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} H(x - {}_i\xi^{\alpha}), \qquad (2.15)$$

$$\text{gdzie: } H(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}, \qquad (2.16)$$

istnieje i nie zależy od wyboru ciągu ${}_i\xi^{\alpha}$, $i \in \mathcal{N}$, (nie zależy od $\alpha \in \Lambda$), nazywamy zmienną losową. Funkcję

$$F_{\xi}(x) = \langle H(x - \xi) \rangle \qquad (2.17)$$

nazywamy dystrybuantą zmiennej losowej ξ , a jej pochodną dystrybucyjną

$$g_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx} = \langle \delta(x - \xi) \rangle \qquad (2.18)$$

gęstość zmiennej losowej ξ .

Powyższe pojęcia opierają się na pojęciu średniej $\langle f(x-\xi) \rangle$ po pewnej rodzinie ciągów realizacji ${}_i\xi^{\alpha}$, $i \in N, \alpha \in \Lambda$, zdefiniowanej wzorem:

$$\langle f(x - \xi) \rangle = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x - {}_i\xi^{\alpha}), \qquad (2.19)$$

i ile ta granica dystrybucyjna istnieje i nie zależy od wyboru $\alpha \in \Lambda$

Liczbę $x_0 \in R$ nazywamy istotną realizacją zmiennej losowej ξ , jeżeli jej gęstość rozpatrywana w dowolnym otoczeniu otwartym punktu x_0 nie jest dystrybucją (funkcją) zerową.

Średnią $<e^{ju\xi}>$ nazywamy funkcją charakterystyczną $\theta_\xi(u)$ zmiennej losowej ξ. Piszemy zatem:

$$\theta_\xi(u) = <e^{ju\xi}>. \tag{2.20}$$

Zauważmy, że:

$$<e^{ju\xi}> = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{ju\,{}_i\xi_\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux}\,\delta(x-{}_i\xi_\alpha)dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta(x-{}_i\xi_\alpha)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} s_n^\alpha(x)dx, \tag{2.21}$$

gdzie:

$$s_n^\alpha(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta(x-{}_i\xi_\alpha) \to <\delta(x-\xi)> = g_\xi(x). \tag{2.22}$$

Stąd i z ciągłości transformacji Fouriera wynika, że:

$$\theta_\xi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux}\, g_\xi(x)dx, \tag{2.23}$$

co oznacza, że funkcja charakterystyczna zmiennej losowej ξ jest transformatą Fouriera jej gęstości. Na odwrót gęstość zmiennej losowej jest transformatą odwrotną Fouriera funkcji charakterystycznej

$$g_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux}\, \theta_\xi(u)du. \tag{2.24}$$

3. Związek między momentami, semiinwariantami i quasimomentami zmiennej losowej

Zanim podamy definicję momentu zmiennej losowej ξ zauważmy, że następujące równości:

$$<f(\xi)> = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f({}_i\xi_\alpha) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x-{}_i\xi_\alpha)dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, s_n^\alpha(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g_\xi(x)\, dx \tag{3.1}$$

gdzie:

$$s_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta(x-{}_i\xi_{\alpha}); \tag{3.2}$$

są prawdziwe, o ile:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, s_n^{\alpha}(x)dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g_{\xi}(x)dx, \tag{3.3}$$

dla dowolnego $\alpha \in \Lambda$ i $f(x)$ jest taką dystrybucją, że występujące w powyższych równaniach całki oznaczone mają sens [4], [2].

Zamiast (3.3) będziemy pisali:

$$f(x)\, s_n^{\alpha}(x) \xrightarrow{s} f(x)\, g_{\xi}(x), \ \alpha \in \Lambda \tag{3.3a}$$

Momentem m_p rzędu p, $p \in \mathcal{N}$, zmiennej losowej ξ nazywamy liczbę:

$$m_p = \langle \xi^p \rangle . \tag{3.4}$$

Zakładając, że:

$$x^p\, S_n^{\alpha}(x) \xrightarrow{c} x^p\, g_{\xi}(x), \ \alpha \in \Lambda \tag{3.5}$$

otrzymujemy:

$$m_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p\, g_{\xi}(x)\, dx. \tag{3.6}$$

Przy założeniu, że (3.5) zachodzi dla wszystkich $p \in \mathcal{N}$, momenty można obliczyć według wzoru:

$$m_p = \frac{1}{j^p}\, \theta^{(p)}(u)\Big|_{u=0}, \tag{3.7}$$

zatem funkcję charakterystyczną można rozwinąć w szereg Taylora

$$\theta_{\xi}(u) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(ju)^p}{p!}\, m_p. \tag{3.8}$$

Współczynniki k_p rozwinięcia funkcji charakterystycznej $\theta_{\xi}(u)$ zmiennej losowej ξ w szereg:

$$\theta_{\xi}(u) = \exp\left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(ju)^p}{p!}\, k_p \right) \tag{3.9}$$

nazywamy semiinwariantami zmiennej losowej ξ.

Ze wzorów (2.8) i (3.9) otrzymujemy po zlogarytmowaniu:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(ju)^p}{p!} k_p = \ln \left(1+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(ju)^p}{p!} m_p\right), \tag{3.10}$$

a po rozwinięciu prawej strony (3.10) w szereg:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(ju)^p}{p!} k_p = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(ju)^p}{p!} m_p - \frac{1}{2} \sum_{q,r=1}^{\infty} \frac{(ju)^{q+r}}{q!r!} m_q m_r +$$

$$+ \frac{1}{3} \sum_{s,t,\vartheta=1}^{\infty} \frac{(ju)^{s+t+\vartheta}}{s!\,t!\,\vartheta!} m_s\, m_t\, m_\vartheta - \dots \tag{3.11}$$

Ustalając $p \in \mathcal{N}$ i porównując współczynniki przy $(ju)^p$ otrzymujemy:

$$\frac{1}{p!} k_p = \frac{1}{p!} m_p + \sum_{n=2}^{p} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{\vartheta_1,\dots,\vartheta_n \geq 1 \\ \vartheta_1+\dots+\vartheta_n = p}} \frac{\prod_{i=1}^{n} m_{\vartheta_i}}{\prod_{i=1}^{n} \vartheta_i!}. \tag{3.12}$$

Wzór:

$$k_p = m_p + \sum_{n=2} \frac{(-1)^{n+1}}{n} p! \sum_{\substack{\vartheta_1,\dots,\vartheta_n \geq 1 \\ \vartheta_1+\dots+\vartheta_n = p}} \prod_{i=1}^{n} \frac{m_{\vartheta_i}}{\vartheta_i!} \tag{3.13}$$

pozwala obliczać semiinwarianty za pomocą momentów.

Zależność momentów od semiinwariantów ustala wzór:

$$m_p = k_p + \sum_{n=2}^{p} \frac{p!}{n!} \sum_{\substack{\vartheta_1,\dots,\vartheta_n \geq 1 \\ \vartheta_1+\dots\ \vartheta_n = p}} \prod_{i=1}^{n} \frac{k_{\vartheta_i}}{\vartheta_i!} \tag{3.14}$$

który uzyskuje się przez rozwinięcie w szereg Taylora prawej strony równości otrzymanej z (3.8) i (3.9) oraz porównania współczynników przy $(ju)^p$, $p \in \mathcal{N}$.

Ze wzoru (3.13) wynika w szczególności, że:

$$\begin{aligned} k_1 &= m_1 \\ k_2 &= m_2 - m_1^2 \end{aligned} \tag{3.13a}$$

$$k_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3$$

$$k_4 = m_4 - 4m_1 m_3 - 3m_2^2 + 12 m_1^2 m_2 - 6 m_1^4,$$

a ze wzoru (3.14) (bądź ze wzorów (3.13a)), że:

$$m_1 = k_1$$

$$m_2 = k_2 + k_1^2$$

$$m_3 = k_3 + 3k_1 k_2 + k_1^3$$

$$m_4 = k_4 + 3k_2^2 + 4k_1 k_3 + 6k_1^2 k_2 + k_1^4.$$

Współczynniki b_p, $3 \leqslant p \in \mathcal{N}$, spełniające zależności:

$$\exp\Big(\sum_{p=3}^{\infty} \frac{(ju)^p}{p!} k_p \Big) = 1 + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{(ju)^p}{p!} b_p, \tag{3.15}$$

nazywamy quasimomentami zmiennej losowej.

Rozwijając lewą stronę powyższej równości w szereg Taylora uzyskaliśmy równość:

$$1 + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{(ju)^p}{p!} k_p + \frac{1}{2!} \sum_{q,r=3}^{\infty} \frac{(ju)^{q+r}}{q!\, r!} k_q k_r$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{s,t,\vartheta=3}^{\infty} \frac{ju^{s+t+\vartheta}}{s!\, t!\, \vartheta!} k_s k_t k_\vartheta + \ldots = 1 + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{(ju)^p}{p!} b_p \tag{3.16}$$

Porównując współczynniki przy $(ju)^p$ otrzymujemy wzór:

$$b_p = k_p + \sum_{n=2}^{[p/3]} \frac{p!}{n!} \sum_{\substack{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n \geqslant 3 \\ \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n = p}} \prod_{i=1}^{n} \frac{k_{\vartheta_i}}{\vartheta_i !}, \tag{3.17}$$

gdzie $\left[\frac{p}{3}\right]$ oznacza część całkowitą liczby $\frac{p}{3}$, ustalający zależność quasimomentów od semiinwariantów.

Zależność semiinwariantów od quasimomentów podaje wzór:

$$k_p = b_p + \sum_{n=2}^{[p/3]} \frac{(-1)^{n+1} p!}{n} \sum_{\substack{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n \geqslant 3 \\ \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n = p}} \prod_{i=1}^{n} \frac{b_{\vartheta_i}}{\vartheta_i !} \tag{3.18}$$

który uzyskuje się przez obustronne zlogarytmowanie równości (3.15) i rozwinięcie w szereg Taylora prawej strony tak otrzymanej równości i w końcu porównanie współczynników przy $(ju)^p$; $3 \leq p \in \mathcal{N}$.

Ze wzoru (3.17) wynika w szczególności, że:

$$b_i = k_i \quad i = 3, 4, 5 \tag{3.17a}$$

$$b_6 = k_6 + 10\, k_3^2$$

$$b_7 = k_7 + 35\, k_3\, k_4$$

a ze wzoru (3.18) (bądź ze wzorów (3.17a)), że:

$$k_i = b_i;\ i = 3, 4, 5 \tag{3.18a}$$

$$k_6 = b_6 - 10\, b_3^2$$

$$k_7 = b_7 - 35\, b_3\, b_4. \tag{3.18a}$$

Zmienną losową ξ, dla której semiinwarianty

$$k_p = 0, \quad 3 \leq p \in \mathcal{N} \tag{3.19}$$

nazywamy zmienną losową typu normalnego (Gaussa).

Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej ξ typu normalnego ma postać:

$$\Theta_\xi(u) = \exp\left\{j\, k_1 u - \frac{1}{2}\, k_2 u^2\right\}, \tag{3.20}$$

co wynika ze wzoru (3.9). Dokonując odwrotnej transformacji Fouriera na (3.20) i korzystając z (2.24) uzyskujemy wzór na gęstość zmiennej losowej ξ typu normalnego:

$$g_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, k_2}} \exp\left[-\frac{(x-k_1)^2}{2k_2}\right]. \tag{3.21}$$

Zmienna losowa typu normalnego odgrywa ważną rolę, gdyż za pomocą jej gęstości oraz quasimomentów zmiennej ξ można wyrazić gęstość dość szerokiej klasy zmiennych losowych ξ, których funkcje charakterystyczne mają postać (2.33) oraz dla których szereg

$$\sum_{p=3}^{\infty} \frac{(ju)^p}{p!} b_p \tag{3.22}$$

jest zbieżny w S_1' (1.10).
Mianowicie ze wzorów (3.9) i (3.15) wynika, że:

$$\Theta_\xi(u) = \exp\left\{j k_1 u - \frac{1}{2} k_2 u^2\right\}\left(1 + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{(ju)^p}{p!} b_p\right), \tag{3.23}$$

stąd zaś i z (3.20), że:

$$\Theta_\xi(u) = \Theta_{\bar{\xi}}(u) + \Theta_{\bar{\xi}}(u) \sum_{p=3}^{\infty} \frac{(ju)^p}{p!} b_p. \tag{3.24}$$

Dokonując transformacji odwrotnej Fouriera na (3.24) otrzymujemy:

$$g_\xi(x) = g_{\bar{\xi}}(x) + \mathcal{F}^{-1}\left(\Theta_{\bar{\xi}}(u) \sum_{p=3}^{\infty} \frac{(ju)^p}{p!} b_p\right), \tag{3.25}$$

gdzie $g_{\bar{\xi}}(x)$ dana jest wzorem (3.21). Korzystając ze zbieżności szeregu danego wzorem (3.22) w S_1', liniowości i ciągłości transformacji odwrotnej Fouriera dochodzimy do wniosku, że:

$$g_\xi(x) = g_{\bar{\xi}}(x) + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{b_p}{p!} \mathcal{F}^{-1}\left(\Theta_{\bar{\xi}}(u)(ju)^p\right). \tag{3.26}$$

Stąd i ze wzoru (2.8a) wynika, że:

$$g_\xi(x) = g_{\bar{\xi}}(x) + \sum_{p=3}^{\infty} (-1)^p \frac{b_p}{p!} g_{\bar{\xi}}^{(p)}(x). \tag{3.27}$$

W przypadku, gdy quasimomenty b_p zmiennej ξ zerują się dla $p > r$, $r \in \mathcal{N}$, wzór (3.27) jest nadal prawdziwy, ale przyjmuje prostszą postać:

$$g_\xi(x) = g_{\bar{\xi}}(x) + \sum_{p=3}^{r} (-1)^p \frac{b_p}{p!} g_{\bar{\xi}}^{(p)}(x). \tag{3.28}$$

4. Statystyczna zależność zmiennych losowych

Zmienną losową ξ, której gęstość jest dystrybucją regularną (funkcją lokalnie całkowalną) nazywamy zmienną losową typu ciągłego, natomiast zmienną, której gęstość jest postaci:

$$g_{\xi}(x) = \sum_{k} a_k \delta(x-x_k),\ a_k \in [0,1],\ k \in \mathcal{N} \qquad (4.1)$$

nazywamy zmienną losową typu dyskretnego. Zmienną losową, której gęstość jest postaci:

$$g_{\xi}(x) = \lambda\, g_{\xi_c}(x) + \mu\, g_{\xi^d}(x), \qquad (4.2)$$

gdzie:

ξ_c - zmienna losowa typu ciągłego,
a ξ^d - zmienna losowa typu dyskretnego;

$\lambda, \mu \in R,\ \lambda, \mu \geqslant 0,\ \lambda + \mu = 1;$

nazywamy zmienną losową typu mieszanego.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by zmienna losowa była typu ciągłego jest, by jej dystrybuanta była funkcją absolutnie ciągłą, a na to by zmienna losowa ξ była typu dyskretnego, potrzeba i wystarcza, by jej dystrybuanta przyjmowała co najwyżej przeliczalną ilość wartości. Innym warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by zmienna losowa ξ była typu dyskretnego jest, aby zbiór istotnych realizacji zmiennej losowej był co najwyżej przeliczalny.

Rozpatrzymy dwie zmienne losowe ξ^1, ξ^2 o gęstości łącznej $g_{\xi^1 \xi^2}(x^1, x^2)$ danej wzorem (2.24) [2]. W przypadku, gdy zmienną ξ^1 rozważymy niezależnie od ξ^2, gęstość zmiennej losowej ξ^1 wyraża się wzorem:

$$g_{\xi^1}(x^1) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\xi^1 \xi^2}(x^1, x^2)\,dx^2, \qquad (4.3)$$

wynikającym z warunków zgodności (2.26).

Jeżeli natomiast znamy konkretną istotną realizację x_o^2 zmiennej losowej ξ^2, należy zamiast zmiennej ξ^1 rozważać zmienną losową $\xi^1|\xi^2$, której gęstość

$$g_{\xi^1|\xi^2}(x^1|x_o^2) \qquad (4.4)$$

może zależeć od x_o^2.

Dystrybucję dwóch zmiennych $g_{\xi^1|\xi^2}(x^1,x^2)$, spełniającą warunek

$$g_{\xi^1 \xi^2}(x^1, x^2) = g_{\xi^1|\xi^2}(x^1|x^2) \cdot g_{\xi^2}(x^2) \qquad (4.5)$$

nazywamy globalną warunkową gęstością zmiennej losowej ξ^1 pod warunkiem ξ^2.

Gęstość (4.4) jest wartością globalnej warunkowej gęstości zmiennej losowej $\xi^1|\xi^2$ w punkcie $x^2 = x_o^2$.

Skorzystaliśmy tu z dwóch definicji należących do teorii dystrybucji [1], których wcześniej nie wprowadziliśmy, mianowicie:

- Wartością dystrybucji $f(x,y)$, $x \in R^p$, $y \in R^{N-p}$ w punkcie y_0 nazywamy dystrybucję p - wymiarową zmiennej x

$$f(x, y_0) = [f * \delta_n(x, y_0)], \qquad (i)$$

o ile ciąg $f * \delta_n(x, y_0)$ jest podstawowy dla każdego ciągu deltowego $\delta_n(x, y)$.

- Iloczyn dystrybucji N - wymiarowych $f(x) \cdot g(x)$ nazywamy dystrybucję

$$f(x) \cdot g(x) = [f(x)\, \delta_n(x) \cdot g(x)\, \delta_n(x)], \qquad (ii)$$

o ile ciąg $f(x) * \delta_n(x) \cdot g(x) * \delta_n(x)$ jest podstawowy dla dowolnego ciągu deltowego $\delta_n(x)$ [1].

Zmienną losową ξ^1 nazywamy niezależną od ξ^2, jeżeli:

$$g_{\xi^1|\xi^2}(x^1|x^2) = g_{\xi^1}(x^1), \qquad (4.6)$$

co oznacza, że $g_{\xi^1}(x^1)$ jest globalną warunkową gęstością zmiennej losowej ξ^1 pod warunkiem ξ^2.

Zmienne losowe ξ^1, ξ^2 spełniające warunek:

$$g_{\xi^1\xi^2}(x^1, x^2) = g_{\xi^1}(x^1) \cdot g_{\xi^2}(x^2), \qquad (4.7)$$

nazywamy zmiennymi losowymi niezależnymi.

Z (4.6), (4.5) i (4.7) wynika, że ξ^1 nie zależy od ξ^2 wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne losowe ξ^1 i ξ^2 są niezależne oraz wtedy i tylko wtedy, gdy ξ^2 nie zależy od ξ^1.

Niech ξ^1, ξ^2 będą zmiennymi losowymi niezależnymi.
Zakładając, że $f_1(u, x^1)$, $f_2(u, x^2)$ i $f_1(u, x^1) \cdot f_2(u, x^2)$ spełniają założenie (3.3a), otrzymujemy:

$$\langle f_1(u,\xi^1) \cdot f_2(u,\xi^2)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(u,x^1) f_2(u,x^2) g_{\xi^1}(x^1) g_{\xi^2}(x^2)\,dx^1 dx^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u, x^1) g_{\xi^1}(x^1)\,dx^1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2(u,x^2) g_{\xi^2}(x^2)\,dx^2 = \langle f_1(u,\xi^1)\rangle \langle f_2(u,\xi^2)\rangle$$

(4.8)

Wobec ciągłości transformacji Fouriera powyższe założenia są spełnione dla funkcji e^{jux^1}, e^{jux^2}, oraz $e^{ju(x^1+x^2)}$. Stąd i z (4.8) wynika, że:

$$\langle e^{ju(\xi^1+\xi^2)}\rangle = \langle e^{ju\,\xi^1}\rangle \langle e^{ju\,\xi^2}\rangle , \tag{4.9}$$

co oznacza, że:

$$\theta_{\xi^1+\xi^2}(u) = \theta_{\xi^1}(u)\cdot\theta_{\xi^2}(u). \tag{4.10}$$

W celu podania gęstości sumy dwóch zmiennych niezależnych oznaczmy:

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 + x^2 & \eta^1 &= \xi^1 + \xi^2 \\ y^2 &= x^2 & \eta^2 &= \xi^2 \end{aligned} \tag{4.11}$$

i obliczmy:

$$g_{\eta^1\eta^2}(y^1, y^2) = \langle \delta(y^1 - \eta^1)\cdot\delta(y^2 - \eta^1)\rangle . \tag{4.12}$$

Korzystając z (4.11) otrzymujemy:

$$g_{1\,2}(y^1, y^2) = \langle \delta(x^1 + x^2 - \xi^1 - \xi^2)\cdot\delta(x^2 - \xi^2)\rangle \tag{4.13}$$

Stąd i ze wzoru:

$$\delta(x^1 - f(a))\cdot\delta(x^2 - a) = \delta(x^1 - f(x^2))\cdot\delta(x^2 - a) \tag{4.14}$$

wynika, po skorzystaniu z niezależności zmiennych ξ^1, ξ^2 oraz z (4.11), że:

$$g_{\eta^1\eta^2}(y^1, y^2) = g_{\xi^1}(y^1 - y^2)\cdot g_{\xi^2}(y^2). \tag{4.15}$$

Całkując ostatnią równość obustronnie względem y^2 i korzystając z warunku zgodności (4.4) oraz z (4.11) otrzymujemy:

$$g_{\xi^1+\xi^2}(y^1) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\xi^1}(y^1 - y^2)\, g_{\xi^2}(y^2)dy^2 \tag{4.16}$$

czyli, że:

$$g_{\xi^1+\xi^2}(y^1) = g_{\xi^1}(y^1) * g_{\xi^2}(y^1). \tag{4.17}$$

Ze wzorów (4.10), (4.17), (4.22) i (4.24) wynikają następujące równości:

$$g_{\xi^1}(y^1) * g_{\xi^2}(y^1) = \mathcal{F}^{-1}(\Theta_{\xi^1}(u)\cdot\Theta_{\xi^2}(u))(y^1) \tag{4.18}$$

$$\Theta_{\xi^1}(u)\cdot\Theta_{\xi^2}(u) = \mathcal{F}(g_{\xi^1}(y^1) * g_{\xi^2}(y^1))(u). \tag{4.19}$$

Zmienną losową ξ^1 nazywamy ściśle związaną ze zmienną losową ξ^2, jeżeli istnieje funkcja $f(x)$, że:

$$\xi^1 = f(\xi^2). \tag{4.20}$$

Łączna gęstość układu tych dwóch zmiennych ma postać:

$$g_{f(\xi^2),\xi^2}(x^1, x^2) = \langle\delta(x^1 - f(\xi^2)).\ \delta(x^2-\xi^2)\rangle . \tag{4.21}$$

Stosując w (4.21) wzór (4.14) otrzymujemy:

$$g_{f(\xi^1),\xi^2}(x^1, x^2) = \delta(x^1 - f(x^2))g_{\xi^2}(x^2). \tag{4.22}$$

Niech ξ oznacza dowolną zmienną losową.
W celu podania gęstości zmiennej losowej $a\xi + b$, gdzie $a, b \in R$, $a \neq 0$; połóżmy w (4.22):

$$\xi^2 = \xi,\ x^2 = z,\quad x^1 = x \tag{4.23}$$

i scałkujmy tak otrzymaną równość względem z. Stąd i z (4.4) otrzymujemy:

$$g_{a\xi+b}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{a\xi+b,}(x,z)\ dz = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-az-b)\ g_{\xi}(z)dz. \tag{4.24}$$

Korzystając ze wzoru

$$\delta(f(z)) = \frac{1}{|f'(z_0)|}\ \delta(z - z_0),\ f(z_0) = 0 \tag{4.25}$$

otrzymujemy:

$$g_{a\xi+b}(x) = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z-\frac{x-b}{a})g_{\xi}(z)dz = \frac{1}{|a|}\ g_{\xi}(\frac{x-b}{a}). \tag{4.26}$$

Wzór (4.26) można też otrzymać dokonując retransformacji Fouriera na funkcji charakterystycznej

$$\Theta_{a\xi+b}(u) = \langle e^{ju(a\xi+b)}\rangle = e^{jub}\ \Theta_{\xi}(au), \tag{4.27}$$

a następnie korzystając ze wzoru:

$$\mathcal{F}^{-1}\,(f(au))(x-b) = \frac{1}{|a|}\,\mathcal{F}^{-1}\,(f(u))\,\left(\frac{x-b}{a}\right). \tag{4.28}$$

Uwagi końcowe

W powyższym artykule nie wyczerpaliśmy tematyki dotyczącej zmiennej losowej; zamieściliśmy w nim to, co uważaliśmy za najistotniejsze. Uogólnienie tych wyników znajdzie swój wyraz w następnych artykułach poświęconych wektorom losowym i procesom stochastycznym.

Wszystkie te zagadnienia są przedmiotem dyskusji seminarium Zakładu Mechaniki Teoretycznej w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego.

LITERATURA

[1] Antosik P., Mikusiński J., Sikorski.: Theory of distributions. The sequential approch. E.S.P.C. Amsterdam, PWN, Warszawa 1973.

[2] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B.: Podstawy rachunku prawdopodobieństwa w ujęciu dystrybucyjnym, Zesz.Nauk.Pol.Śl. s.Mat.-Fiz. z 29, Gliwice 1978.

[3] Lighthill M.J.: Wstęp do analizy Fouriera i teorii dystrybucji, PWN, Warszawa 1963.

[4] Mikusiński J., Sikorski R.: Elementarna teoria dystrybucji, PWN, Warszawa 1964.

[5] Schwartz L.: Theorie des distributions, Herman, Paris 1973.

[6] Stratonowič R.A.: Izbrannyje voprosy tieorii fluktuacii w radiotiechnikie, Sovietskoje Radio, Moskwa 1961.

[7] Zemanian A.H.: Teoria dystrybucji i analiza transformat, PWN, Warszawa 1969.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В НЕКЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ

Р е з ю м е

В работе представлены статистические характеристики случайной переменной: характерные функции, моменты, семиинварианты и квазимоменты, а также связи между ними. Введено понятие независимости случайных переменных, условной плотности и переменных строго связанных.

THE STATISTICAL RANDOM VECTOR CHARACTERISTICS IN A DISTRIBUTIONAL FORMULATION

S u m m a r y

In the work there have been presented the statistic characteristics of random variable, the characteristic functions, moments, seminvariants and quasimoments as well as their interelations.

The notions of random variable independence, conditional density and variables closely related have been introduced.