ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: Matematyka-Fizyka z. 29 Nr kol. 559

Damian BRUCKNER, Marian PODHORODYŃSKI,
Bogdan SKALMIERSKI

CHARAKTERYSTYKI STATYSTYCZNE WEKTORA LOSOWEGO W UJĘCIU DYSTRYBUCYJNYM

Streszczenie. Niniejsza praca jest kolejną w cyklu artykułów poświęconych dystrybucyjnemu ujęciu rachunku prawdopodobieństwa. Przedstawimy w niej podstawowe charakterystyki statystyczne wektora losowego, dystrybuantę, gęstość, funkcję charakterystyczną, momenty, korelacje i quasimomenty, a także podamy ogólne związki między nimi. Zwrócimy uwagę na szczególną rolę wektora losowego typu normalnego, wyrażając za jego pomocą gęstość dość szerokiej klasy wektorów losowych. W końcu uogólnimy zarysowane w poprzedniej pracy [3], wyniki dotyczące zależności statystycznej układu skończonej ilości zmiennych losowych.

W artykule tym będziemy wykorzystywać podstawowe fakty teorii dystrybucji, które wraz ze szkicem dowodu równoważności obu ujęć (ciągowego [1], [4] i funkcjonałowego [5] [7]) przedstawiliśmy w poprzednich pracach [2], [3].

1. Dystrybuanta, gęstość i funkcja charakterystyczna wektora losowego

Przypominamy postawione w [2] definicje.

Rodzinę $(\xi^1, \ldots, \xi^N)$ ciągów układów liczb $({}_1\xi^1_\alpha, \ldots, {}_1\xi^N_\alpha), ({}_2\xi^1_\alpha, \ldots, {}_2\xi^N_\alpha), \ldots, ({}_i\xi^1, \ldots, {}_i\xi^N), \ldots, \alpha \in \Lambda$, takich, że dla każdego układu $(x^1, \ldots x^N)$, gdzie $x^k \in \bar{R} = R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, $k=1,\ldots,N$; granica

$$\langle H(x^1 - \xi^1) \ldots H(x^N - \xi^N) \rangle = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{N} H(x^k - {}_i\xi^k_\alpha), \tag{1.1}$$

przy czym

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

istnieje i nie zależy od wyboru ciągu $({}_i\xi^1_\alpha, \ldots, {}_i\xi^N_\alpha)$, $i \in \mathcal{N}$ (nie zależy od wyboru $\alpha \in \Lambda$), nazywamy N-wymiarowym wektorem losowym.

Funkcję

$$F_{\xi^1, \ldots, \xi^N}(x^1, \ldots, x^N) = \langle \prod_{k=1}^{N} H(x^k - \xi^k) \rangle \tag{1.3}$$

nazywamy dystrybuantą wektora losowego $(\xi^1,\dots,\xi^N)$, a jej pochodną dystrybucyjną

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N) = \left\langle \prod_{k=1}^{N} \delta(x^k - \xi^k) \right\rangle \tag{1.4}$$

gęstością wektora losowego $(\xi^1,\dots,\xi^N)$.

Przypominamy jeszcze, że powyższe definicje oparte są na pojęciu średniej po pewnej rodzinie ciągów realizacji $({}_i\xi^1_\alpha,\dots,{}_i\xi^N_\alpha)$, $i \in \mathcal{N}$, $\alpha \in \Lambda$

$$\langle f_y(\xi^1,\dots,\xi^N)\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_y({}_i\xi^1_\alpha,\dots,{}_i\xi^N_\alpha), \tag{1.5}$$

gdzie f_y dystrybucja zmiennej $y = (y^1,\dots y^N)$;
o ile ta granica dystrybucyjna istnieje i nie zależy od wyboru $\alpha \in \Lambda$.

Układ $(x_0^1,\dots,x_0^N) \in R^N$ nazywamy istotną realizacją wektora losowego $(\xi^1,\dots,\xi^N)$, jeżeli jego gęstość w żadnym otoczeniu otwartym punktu $(x_0^1,\dots,x_0^N)$ nie jest zerowa.

Średnią $\langle \exp j \sum_{k=1}^{N} u_k \xi^k \rangle$ nazywamy funkcję charakterystyczną wektora losowego $(\xi^1,\dots,\xi^N)$. Piszemy zatem:

$$\Theta_{\xi^1,\dots,\xi^N}(u_1,\dots,u_N) = \left\langle \exp j \sum_{k=1}^{N} u_k \xi^k \right\rangle \tag{1.6}$$

Zauważmy, że:

$$\left\langle \exp j \sum_{k=1}^{N} u_k \xi^k \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp j \sum_{k=1}^{N} u_k\, {}_i\xi^k_\alpha =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \left(\exp j \sum_{k=1}^{N} u_k x^k\right) \cdot \prod_{k=1}^{N} \delta(x^k - {}_i\xi^k_\alpha)\, dx^1\dots dx^N =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \exp j \sum_{k=1}^{N} u_k x^k \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \delta(x^k - {}_i\xi^k_\alpha)\, dx^1\dots dx^N \tag{1.7}$$

Wobec ciągłości transformacji Fouriera (1.4) i (1.6) otrzymujemy, że:

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(u_1,\dots,u_N) = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \exp j \sum_{k=1}^{N} u_k x^k \, g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N)dx^1\dots dx^N \tag{1.8}$$

co oznacza, że funkcja charakterystyczna wektora losowego $(\xi^1,\dots,\xi^N)$ jest transformatą Fouriera jego gęstości.

Odwrotnie gęstość wektora losowego $(\xi^1,\dots,\xi^N)$ jest transformatą odwrotną Fouriera jego funkcji charakterystycznej

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \exp j \sum_{k=1}^{N} u_k x^k \, \theta_{\xi^1,\dots,\xi^k}(u_1,\dots,u_N)du_1 \dots, du_N \tag{1.9}$$

Zakładając, że:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f(x^1,\dots,x^N)\, s_n^{\alpha}(x^1,\dots,x^N)dx^1\dots dx^N \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f(x^1,\dots,x^N) g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N)dx^1,\dots dx^N, \; n\to\infty \tag{1.10}$$

dla dowolnego $\alpha \in \Lambda$, przy czym $s_n^{\alpha}(x^1,\dots,x^N) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{N}\delta(k^k - {}_i\xi_{\alpha}^k)$; oraz że $f(x^1,\dots,x^N)$ jest taką dystrybucją, że występujące w (1.10) całki oznaczone mają sens [4], [2], otrzymujemy:

$$\langle f(\xi^1,\dots,\xi^N)\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f({}_i\xi_{\alpha}^1,\dots,{}_i\xi_{\alpha}^N) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f(x^1,\dots,x^N)\, s_n^{\alpha}(x^1,\dots,x^N)dx^1\dots dx^N =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f(x^1,\dots,x^N) g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N)dx^1\dots dx^N. \tag{1.11}$$

Zamiast (1.10) będziemy pisali:

$$f(x^1,\dots,x^N)\, s_n^{\alpha}(x^1,\dots,x^N) \xrightarrow{c} f(x^1,\dots,x^N) q_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N), \; \alpha \in \Lambda. \tag{1.10a}$$

2. Związki pomiędzy momentami, korelacjami i quasimomentami wektora losowego

Momentem $m^{j_1 \ldots j_s}$ rzędu s, $j_p = 1,\ldots,N$, $p = 1,\ldots s$, wektora losowego $(\xi^1,\ldots,\xi^N)$ nazywamy liczbę

$$m^{j_1 \ldots j_s} = \langle \xi^{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi^{j_s} \rangle . \tag{2.1}$$

Zakładając, że:

$$x^{j_1} \cdot \ldots \cdot x^{j_s} \; s_n^{\alpha}(x^1,\ldots,x^N) \xrightarrow{c} x^{j_1} \cdot \ldots \cdot x^{j_s} \; g_{\xi^1,\ldots,\xi^N}(x^1,\ldots x^N), \alpha \in \Lambda \tag{2.2}$$

otrzymujemy:

$$m^{j_1 \ldots j_s} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x^{j_1} \cdot \ldots \cdot x^{j_s} g_{\xi^1,\ldots,\xi^N}(x^1,\ldots,x^N) dx^1,\ldots dx^N . \tag{2.3}$$

Przy założeniu, że (2.2) zachodzi dla wszystkich wielowskaźników $j_1, \ldots, j_s$; $j_p = 1,\ldots,N$; $p = 1,\ldots,s$ i wszystkich $s \in \mathcal{N}$ momenty można obliczyć według wzoru:

$$m^{j_1,\ldots,j_s} = \frac{1}{j^s} \left. \frac{\partial^s \theta_{\xi^1,\ldots,\xi^N}(u_1,\ldots,u_N)}{\partial u_{j_1} \ldots \partial u_{j_s}} \right|_{u_1 = \ldots = u_N = 0} \tag{2.4}$$

Zatem funkcję charakterystyczną wektora losowego $(\xi^1,\ldots,\xi^N)$ można rozwinąć w szereg Taylora:

$$\theta_{\xi^1,\ldots,\xi^N}(u_1,\ldots,u_N) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{N} m^{j_1 \ldots j_s} u_{j_1} \cdot \ldots \cdot u_{j_s} . \tag{2.5}$$

Symetryczne współczynniki $k^{j_1 \ldots j_s}$ rozwinięcia funkcji charakterystycznej w szereg

$$\theta_{\xi^1,\ldots,\xi^N}(u_1,\ldots,u_N) = \exp\left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{N} k^{j_1 \ldots j_s} u_{j_1} \ldots u_{j_s} \right\} \tag{2.6}$$

nazywamy korelacjami rzędu s wektora losowego $(\xi^1,\ldots,\xi^N)$.

Ze wzorów (2.5) i (2.6) otrzymujemy po zlogarytmowaniu:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} k^{j_1\dots j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s} =$$

$$= \ln\Big(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} m^{j_1\dots j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s}\Big), \tag{2.7}$$

a po rozwinięciu prawej strony (2.7) w szereg:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} k^{j_1\dots j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} m^{j_1\dots j_s} \cdot$$

$$\cdot\, u_{j_1}\dots u_{j_s} - \frac{1}{2} \sum_{t,v=1}^{\infty} \frac{j^{t+v}}{t!v!} \sum_{j_1,\dots,j_t=1}^{N} \sum_{l_1,\dots,l_v=1}^{N} m^{j_1\dots j_t} \cdot m^{l_1\dots l_v} \cdot$$

$$\cdot\, u_{j_1}\dots u_{j_t} \cdot u_{l_1}\dots u_{l_v} + \dots \tag{2.8}$$

Ustalając $s \in \mathcal{N}$ i porównując współczynniki przy j^s oraz mnożąc przez $s!$ uzyskujemy:

$$\sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} k^{j_1\dots j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s} = \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} m^{j_1\dots j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{s} \frac{(-1)^{n+1} s!}{n} \sum_{\substack{\sigma_1,\dots\sigma_n \geq 1 \\ \sigma_1+\dots+\sigma_n=s}}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} \frac{m^{j_1\dots j_{\sigma_1}} \dots m^{j_{\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i+1},\dots j_s}}{\prod_{i=1}^{n} \sigma_i!}$$

$$u_{j_1}\dots u_{j_s}. \tag{2.9}$$

Ustalając konkretne wartości liczb $j_p = 1,\dots,N$, $p = 1,\dots,s$ i porównując współczynniki przy $u_{j_1}\dots u_{j_s}$ otrzymujemy wzór:

$$k^{j_1\dots j_s} = m^{j_1\dots j_s} + \sum_{n=2}^{s} \frac{(-1)^{n+1} s!}{n} \sum_{\substack{\sigma_1,\dots,\sigma_n \geq 1 \\ \sigma_1+\dots+\sigma_n=s}} \frac{M^{(j_1\dots j_s)(\sigma_1,\dots,\sigma_n)}}{\prod_{i=1}^{n} \sigma_i!} \tag{2.10}$$

gdzie:

$$M^{j_1\dots j_s}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=m^{j_1\dots j_{\sigma_1}}\dots m^{j_{\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i+1}\dots j_s}, \tag{2.10a}$$

a $M^{(j_1\dots j_s)}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ oznacza symetryzację $M^{j_1\dots j_s}(\sigma_1\dots\sigma_n)$.

Zależność momentów od korelacji ustala wzór:

$$m^{j_1\dots j_s} = k^{j_1\dots j_s} + \sum_{n=2}^{s} \frac{s!}{n!} \sum_{\substack{\sigma_1,\dots,\sigma_n\geq 1\\ \sigma_1+\dots+\sigma_n=s}} \frac{K^{(j_1\dots j_s)}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)}{\prod_{i=1}^{n}\sigma_i!} \tag{2.11}$$

gdzie:

$$K^{j_1\dots j_s}(\sigma_n,\dots,\sigma_n)= k^{j_1\dots j_{\sigma_1}}\dots k^{j_{\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i+1}\dots j_s}, \tag{2.11a}$$

a $K^{(j_1\dots j_s)}(\sigma_1\dots\sigma_n)$ oznacza symetryzację $K^{j_1\dots j_s}(\sigma_1\dots\sigma_n)$.

Wzór (2.11) uzyskuje się przez rozwinięcie w szereg Taylora prawej strony równości otrzymanej z (2.5) i (2.6) i porównanie współczynników najpierw przy j^s, $s\in\mathcal{N}$ a potem przy $u_{j_1}\dots u_{j_s}$, $j_p = 1,\dots,N$, $p=1,\dots,s$.

Ze wzorów (2.10) i (2.10a) wynika w szczególności, że:

$$k^{j_1} = m^{j_1}$$

$$k^{j_1j_2} = m^{j_1j_2} - m^{j_1}m^{j_2}$$

$$k^{j_1j_2j_3} = m^{j_1j_2j_3} - m^{j_1j_2}m^{j_3} - m^{j_1j_3}m^{j_2} - m^{j_2j_3}m^{j_1} + 2m^{j_1}m^{j_2}m^{j_3}$$

$$\begin{aligned} k^{j_1j_2j_3j_4} = {} & m^{j_1j_2j_3j_4} - m^{j_1}m^{j_2j_3j_4} - m^{j_2}m^{j_1j_3j_4} - m^{j_3}m^{j_1j_2j_4} - \\ & - m^{j_4}m^{j_1j_2j_3} - m^{j_1j_2}m^{j_3j_4} - m^{j_1j_3}m^{j_2j_4} - m^{j_1j_4}m^{j_2j_3} + 2m^{j_1}m^{j_2}m^{j_3j_4} + \\ & + 2m^{j_1}m^{j_3}m^{j_2j_4} + 2m^{j_1}m^{j_4}m^{j_2j_3} + 2m^{j_2}m^{j_3}m^{j_1j_4} + 2m^{j_2}m^{j_4}m^{j_1j_3} + \\ & + 2m^{j_3}m^{j_4}m^{j_1j_2} - 6m^{j_1}m^{j_2}m^{j_3}m^{j_4}, \end{aligned} \tag{2.10b}$$

a ze wzorów (2.11) i (2.11a) (bądź ze wzoru (2.10b)), że:

$$m^{j_1} = k^{j_1}$$

$$m^{j_1 j_2} = k^{j_1 j_2} + k^{j_1} k^{j_2}$$

$$m^{j_1 j_2 j_3} = k^{j_1 j_2 j_3} + k^{j_1 j_2} k^{j_3} + k^{j_1 j_3} k^{j_2} + k^{j_2 j_3} k^{j_1} + k^{j_1} k^{j_2} k^{j_3}$$

$$m^{j_1 j_2 j_3 j_4} = k^{j_1 j_2 j_3 j_4} + k^{j_1 j_2} k^{j_3 j_4} + k^{j_1 j_3} k^{j_2 j_4} + k^{j_1 j_4} k^{j_2 j_3} +$$

$$+ k^{j_1} k^{j_2 j_3 j_4} + k^{j_2} k^{j_1 j_3 j_4} + k^{j_3} k^{j_1 j_2 j_4} + k^{j_4} k^{j_1 j_2 j_3} +$$

$$+ k^{j_1} k^{j_2} k^{j_3 j_4} + k^{j_1} k^{j_3} k^{j_2 j_4} + k^{j_1} k^{j_4} k^{j_2 j_3} + k^{j_2} k^{j_3} k^{j_1 j_4} +$$

$$+ k^{j_2} k^{j_4} k^{j_1 j_3} + k^{j_3} k^{j_4} k^{j_1 j_2} + k^{j_1} k^{j_2} k^{j_3} k^{j_4} \tag{2.11b}$$

Symetryczne współczynniki $b^{j_1,\dots j_s}$, $s \in \mathcal{N}$; spełniające zależność:

$$\exp\left\{ \sum_{s=3}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} k^{j_1,\dots j_s} u_{j_1,\dots,u_{j_s}} \right\} =$$

$$= 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} b^{j_1\dots j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s} \tag{2.12}$$

nazywamy quasimomentami rzędu s wektora losowego $(\xi^1,\dots,\xi^N)$.

Rozwijając lewą stronę równości w szereg Taylora uzyskujemy równość:

$$1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} b^{j_1,\dots,j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s} = 1 +$$

$$+ \sum_{s=3}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} k^{j_1,\dots,j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s} +$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{t,v=3}^{\infty} \frac{j^{t+v}}{t!v!} \sum_{j_1,\dots j_t}^{N} \sum_{l_1,\dots l_v=1}^{N} k^{j_1,\dots j_t l_1,\dots,l_v} u_{j_1}\dots u_{j_t} \cdot u_{l_1} \cdot \dots \cdot u_{l_v} \tag{2.13}$$

Ustalając $3 \leqslant s \in \mathcal{N}$ i porównując współczynniki przy j^s oraz mnożąc $s!$ otrzymamy:

$$\sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} b^{j_1,\dots,j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s} = \sum_{j_1\dots j_s=1}^{N} k^{j_1,\dots,j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{[s/3]} \frac{s!}{n!} \sum_{\substack{\sigma_1,\dots,\sigma_n \geq 3 \\ \sigma_1+\dots+\sigma_n=s}} \sum_{j_1\dots j_s=1}^{N} \frac{k^{j_1,\dots,j_{\sigma_1}} \dots k^{j_{\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i+1},\dots,j_s}}{\prod_{i=1}^{n} \sigma_i!}$$

$$\cdot\, u_{j_1}\dots u_{j_s}. \tag{2.14}$$

Ustalając konkretne wartości liczb $j_p = 1,\dots N$, $p = 1,\dots,s$ i porównując współczynniki przy $u_{j_1}\dots u_{j_s}$ uzyskujemy wzór:

$$b^{j_1,\dots,j_s} = k^{j_1,\dots j_s} + \sum_{n=2}^{[s/3]} \frac{s!}{n!} \sum_{\substack{\sigma_1,\dots,\sigma_n \\ \sigma_1+\dots+\sigma_n=s}} \frac{K^{(j_1,\dots,j_s)(\sigma_1,\dots\sigma_n)}}{\prod_{i=1}^{n} \sigma_i!} \tag{2.15}$$

Zależność korelacji od quasimomentów podaje wzór:

$$k^{j_1,\dots,j_s} = b^{j_1,\dots,j_s} + \sum_{n=2}^{[s/3]} \frac{(-1)^{n+1} s!}{n} \sum_{\substack{\sigma_1,\dots,\sigma_n \geq 3 \\ \sigma_1+\dots+\sigma_n=s}} \frac{B^{(j_1,\dots,j_s)(\sigma_1,\dots,\sigma_n)}}{\prod_{i=1}^{n} \sigma_i!} \tag{2.16}$$

gdzie:

$$B^{j_1,\dots,j_s}(\sigma_1\dots\sigma_n) = b^{j_1,\dots,j_{\sigma_1}} \dots b^{j_{\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i+1},\dots,j_s}, \tag{2.16a}$$

a $B^{(j_1,\dots,j_s)(\sigma_1\dots\sigma_n)}$ oznacza symetryzację $B^{j_1,\dots,j_s}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$.

Wzór (2.16) wyprowadza się poprzez obustronne zlogarytmowanie równości (2.12), rozwinięcie w szereg Taylora prawej strony tak otrzymanej zależności i porównanie współczynników najpierw przy j^s, $3 \leq s \in \mathcal{N}$, a następnie przy $u_{j_1}\dots u_{j_s}$, $j_p = 1,\dots,N$, $p = 1,\dots,s$.

Ze wzoru (2.15) wynika w szczególności, że:

$$b^{j_1,\dots,j_s} = k^{j_1,\dots,j_s}, \quad s = 3, 4, 5$$

$$b^{j_1,\dots,j_6} = k^{j_1,\dots,j_6} + k^{j_1j_2j_3}k^{j_4j_5j_6} + k^{j_1j_2j_4}k^{j_3j_5j_6} +$$
$$+ k^{j_1j_2j_5}k^{j_3j_4j_6} + k^{j_1j_2j_6}k^{j_3j_4j_5} + k^{j_1j_3j_4}k^{j_2j_5j_6} +$$
$$+ k^{j_1j_3j_5}k^{j_2j_4j_6} + k^{j_1j_3j_6}k^{j_2j_4j_5} + k^{j_2j_3j_4}k^{j_1j_5j_6} +$$
$$+ k^{j_2j_3j_5}k^{j_1j_4j_6} + k^{j_2j_3j_6}k^{j_1j_4j_5}, \tag{2.15a}$$

a ze wzorów (2.16) i (2.16a) (bądź ze wzorów (2.15a)), że

$$k^{j_1,\dots,j_s} = b^{j_1,\dots,j_s} \quad s = 3, 4, 5$$
$$k^{j_1,\dots,j_6} = b^{j_1,\dots,j_6} - b^{j_1j_2j_3}b^{j_4j_5j_6} - b^{j_1j_2j_4}b^{j_3j_5j_6} -$$
$$- b^{j_1j_2j_5}b^{j_3j_4j_6} - b^{j_1j_2j_6}b^{j_3j_4j_5} - b^{j_1j_3j_4}b^{j_2j_5j_6} -$$
$$- b^{j_1j_3j_5}b^{j_2j_4j_6} - b^{j_2j_3j_6}b^{j_1j_4j_5} - b^{j_2j_3j_4}b^{j_1j_5j_6} -$$
$$- b^{j_2j_3j_5}b^{j_1j_4j_6} - b^{j_2j_3j_6}b^{j_1j_4j_5}. \tag{2.16b}$$

3. Wektory losowe I i II rodzaju

Wektor losowy $(\zeta^1,\dots,\zeta^N)$, dla którego korelacje

$$k^{j_1,\dots,j_s} = 0; \quad 2 \leqslant s \in \mathcal{N} \tag{3.1}$$

nazywamy wektorem losowym I rodzaju (zdeterminowanym).
Niech $m^k = \langle \zeta^k \rangle$.

Następujące warunki są konieczne i wystarczające na to, by wektor losowy $(\zeta^1,\dots,\zeta^N)$ był wektorem I rodzaju (wektorem zdeterminowanym):

(i) $g_{\zeta^1,\dots,\zeta^N}(x^1,\dots,x^N) = \prod_{k=1}^{N} \delta(x^k - m^k)$

(ii) $F_{\zeta^1,\dots,\zeta^N}(x^1,\dots,x^N) = \prod_{k=1}^{N} H(x^k - m^k)$

(iii) jedyną istotną realizacją wektora $(\zeta^1,\dots,\zeta^N)$ jest punkt $(m^1,\dots,m^N)$

(IV) $k^{ll} = 0, \quad l = 1,\dots,N.$

Istotnie. Załóżmy, że wektor $(\xi^1,\ldots,\xi^N)$ jest wektorem I rodzaju, tzn. spełniony jest warunek (3.1). Ze wzoru (2.6) wynika, że:

$$\theta_{\zeta^1,\ldots,\zeta^N}(u_1,\ldots,u_N) = \exp\left\{ j \sum_{k=1}^{N} m^k u_k \right\}. \tag{3.2}$$

Wykonując odwrotną transformację Fouriera na (3.2) otrzymujemy warunek (i), a wykonując transformację Fouriera na (i) otrzymujemy (3.2), co wobec (2.6) oznacza, że zachodzi (3.1). To, że warunek (i) jest równoważny warunkom (ii) oraz (iii) jest oczywiste. Oczywiste jest również, że z warunku (3.1) wynika (iv). Dla zakończenia dowodu załóżmy, że spełniony jest warunek (iv), co oznacza, że:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^l - m^l)^2 \, g_{\zeta^l}(x^l)dx^l = 0, \quad l = 1,\ldots,N. \tag{3.3}$$

Stąd otrzymujemy

$$g_{\zeta^l}(x^l) = \delta(x^l - m^l), \quad l = 1,\ldots,N, \tag{3.4}$$

a następnie warunek (i) równoważny (3.1), co kończy dowód.

Na zakończenie rozważań dotyczących wektora zdeterminowanego zauważmy, że w charakterze wektora losowego zdeterminowanego $(\zeta^1,\ldots,\zeta^N)$ wystarczy rozpatrywać rodzinę złożoną tylko z jednego ciągu stałego, którego elementami jest istotna realizacja $(m^1,\ldots,m^N)$, ponieważ tak obrana rodzina spełnia postulat (1.1) definicji wektora losowego. Tak więc układ liczb $(m^1,\ldots,m^N)$ może być traktowany jako wektor losowy i jego wszystkie charakterystyki statystyczne są identyczne z odpowiednimi charakterystykami wektora losowego zdeterminowanego, którego jedyną istotną realizacją jest układ liczb $(m^1,\ldots,m^N)$.

Wektor losowy $(\eta^1,\ldots,\eta^N)$, dla którego korelacje

$$k^{j_1,\ldots,j_s} = 0 \quad 3 \leqslant s \in \mathcal{N} \tag{3.5}$$

nazywamy wektorem losowym II rodzaju (typu normalnego - Gaussa).

Funkcja charakterystyczna wektora losowego $(\eta^1,\ldots,\eta^N)$ typu normalnego ma postać:

$$\theta_{\eta^1,\ldots,\eta^N}(u_1\ldots u_N) = \exp\left\{ j \sum_{j_1=1}^{N} k^{j_1} u_{j_1} - \frac{1}{2} \sum_{j_1,j_2=1}^{N} k^{j_1 j_2} u_{j1} \cdot u_{j2} \right\} \tag{3.6}$$

co wynika ze wzoru (1.6).

Dokonując odwrotnej transformacji Fouriera na (3.6) i korzystając z (1.9) uzyskujemy wzór na gęstość wektora losowego $(\eta^1,\dots,\eta^N)$ typu normalnego:

$$g_{\eta^1,\dots,\eta^N}(x^1,\dots,x^N) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\det(k^{j_1 j_2})} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j_1,j_2=1}^{N}(k^{j_1 j_2})^{-1}(x^{j_1}-k^{j_1})(x^{j_2}-k^{j_2})\right\} \tag{3.7}$$

gdzie $(k^{j_1 j_2})^{-1}$ oznacza odpowiedni element macierzy odwrotnej do macierzy korelacji drugiego rzędu. W trakcie obliczania gęstości (3.7) wykorzystuje się fakt, iż macierz ta jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną, co pozwala sprowadzić ją za pomocą macierzy ortogonalnej do postaci diagonalnej i umożliwia całkowanie.

Wektor losowy typu normalnego odgrywa istotną rolę, gdyż za jego pomocą oraz quasimomentów wektora losowego $(\xi^1,\dots,\xi^N)$ można wyrazić gęstość dość szerokiej klasy wektorów losowych $(\xi^1,\dots,\xi^N)$, których funkcje charakterystyczne mają postać (1.6) oraz dla których szereg

$$\sum_{s=3}^{\infty}\frac{i^s}{s!}\sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} b^{j_1,\dots,j_s}u_{j_1}\dots u_{j_s} \tag{3.8}$$

jest zbieżny w S'_N (przestrzeń N-wymiarowych dystrybucji temperowanych) [5], [7], [2]. Mianowicie, ze wzorów (1.6) i (2.15) wynika, że:

$$\theta_{\xi^1,\dots,\xi^N}(u_1,\dots,u_N) = \exp i\left\{\sum_{j_1=1}^{N} k^{j_1}u_{j_1} - \frac{1}{2}\sum_{j_1,j_2=1}^{N} k^{j_1 j_2}u_{j_1}u_{j_2}\right\}\cdot$$

$$\cdot\left(1+\sum_{s=3}^{\infty}\frac{i^s}{s!}\sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} b^{j_1,\dots,j_s}u_{j_1,\dots,u_{j_s}}\right), \tag{3.9}$$

stąd zaś i z (3.6), że:

$$\theta_{\xi^1,\dots,\xi^N}(u_1,\dots,u_N) = \theta_{\eta^1,\dots,\eta^N}(u_1,\dots,u_N) +$$

$$\theta_{\eta^1,\dots\eta^N}(u_1,\dots,u_N)\cdot\sum_{s=3}^{\infty}\frac{i^s}{s!}\sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} b^{j_1,\dots,j_s}u_{j_1}\dots u_{j_s}. \tag{3.10}$$

Dokonując transformacji odwrotnej Fouriera na (3.10) otrzymujemy:

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N) = g_{\eta^1,\dots,\eta^N}(x^1,\dots,x^N) +$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\theta_{\eta^1,\dots,\eta^N}(u_1,\dots,u_N) \sum_{s=3}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} b^{j_1\dots j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s})(x^1,\dots,x^N) \tag{3.11}$$

przy czym $g_{\eta^1,\dots,\eta^N}(x^1,\dots,x^N)$ dana jest wzorem (3.7). Korzystając ze zbieżności szeregu (3.5) w S'_N, liniowości i ciągłości transformacji odwrotnej Fouriera dochodzimy do wniosku, że:

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N) = g_{\eta^1,\dots,\eta^N}(x^1,\dots,x^N) +$$

$$+ \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{j_1,\dots j_s=1}^{N} b^{j_1\dots j_s} \cdot$$

$$\cdot \mathcal{F}^{-1}(\theta_{\eta^1,\dots,\eta^N}(u_1,\dots,u_N) \cdot (ju_{j_1}) \dots (ju_{j_s}))(x^1,\dots,x^N), \tag{3.12}$$

Stąd i z własności

$$\mathcal{F}^{-1}((-ju)^k \mathcal{F} f(x)) = f^{(k)}(x), \quad x = (x^1,\dots,x^N), \quad k = (k_1,\dots,k_N).$$

$$x^k = (x^1)^{k_1},\dots,(x^N)^{k_N}, \quad 0 \leqslant k_i \in Z, \tag{3.13}$$

wynika, że:

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N) = g_{\eta^1,\dots,\eta^N}(x^1,\dots,x^N) +$$

$$+ \sum_{s=3}^{\infty} \frac{(-i)^s}{s!} \sum_{j_1\dots j_s=1}^{N} b^{j_1\dots j_s} \frac{\partial^s g_{\eta^1,\dots,\eta^N}(x^1,\dots,x^N)}{\partial x^{j_1},\dots,\partial x^{j_s}} \tag{3.14}$$

W przypadku, gdy quasimomenty $b^{j_1\dots j_s}$ wektora losowego $(\xi^1,\dots,\xi^N)$ zerują się dla $s > r$, $3 \leqslant r \in \mathcal{N}$, wzór (3.14) jest nadal prawdziwy, ale przyjmuje prostszą postać:

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N) = g_{\eta^1,\dots,\eta^N}(x^1,\dots,x^N) +$$

$$+ \sum_{s=3}^{r} \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{j_1\dots j_s=1}^{N} b^{j_1\dots j_s} \frac{\partial^s g_{\eta^1\dots\eta^N}(x^1\dots x^N)}{\partial x^{j_1}\dots\partial x^{j_s}} \tag{3.15}$$

4. Statystyczna zależność układu N-zmiennych losowych

Rozpatrzmy układ zmiennych losowych $(\xi^1,\dots,\xi^N)$ (N-wymiarowy wektor losowy) o gęstości łącznej $g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N)$, danej wzorem (1.4). W przypadku, gdy wektor losowy $(\xi^1\dots\xi^L)$; $L<N$, rozpatrujemy niezależnie od wektora losowego $(\xi^{L+1},\dots,\xi^N)$. Jego gęstość wyraża się wzorem:

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^L}(x^1,\dots x^L) = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N)dx^{L+1}\dots dx^N, \tag{4.1}$$

wynikającym z warunków zgodności (2.26) [2]). Jeżeli natomiast znamy konkretną istotną realizację $(x_o^{L+1},\dots,x_o^N)$ wektora losowego $(\xi^{L+1},\dots,\xi^N)$, należy zamiast wektora losowego $(\xi^1,\dots,\xi^L)$ rozważać wektor $\xi^1,\dots,\xi^L/$ $/\xi^{L+1}\dots\xi^N$, którego gęstość

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^L/\xi^{L+1},\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^L/x_o^{L+1},\dots,x_o^N) \tag{4.2}$$

może zależeć od istotnej realizacji $(x_o^{L+1},\dots,x_o^N)$ wektora losowego $(\xi^{L+1},$ $,\dots,\xi^N)$.

Dystrybucję N-zmiennych $g_{\xi^1,\dots,\xi^L/\xi^{L+1},\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^L)x^{L+1},\dots,x^N)$, spełniającą warunek:

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N) = g_{\xi^1,\dots,\xi^L/\xi^{L+1},\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^L/x^{L+1},\dots,x^N)\cdot$$

$$\cdot\, g_{\xi^{L+1},\dots,\xi^N}(x^{L+1},\dots,x^N), \tag{4.3}$$

nazywamy globalną warunkową gęstością wektora losowego $(\xi^1\dots\xi^L)$ pod warunkiem $(\xi^{L+1},\dots,\xi^N)$.

Gęstość (4.2) jest wartością globalnej warunkowej gęstości wektora losowego $(\xi^1,\dots,\xi^L)$ pod warunkiem $(\xi^{L+1},\dots,\xi^N)$ w punkcie $(x^{L+1},\dots,x^N) =$ $=(x_o^{L+1},\dots,x_o^N)$.

Wektor losowy $(\xi^1,\dots,\xi^L)$ nazywamy wektorem niezależnym od wektora losowego $(\xi^{L+1},\dots,\xi^N)$, jeżeli:

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^L/\xi^{L+1},\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^L/x^{L+1},\dots,x^N) = g_{\xi^1,\dots,\xi^L}(x^1,\dots,x^L), \tag{4.4}$$

co oznacza, że $g_{\xi^1,\dots,\xi^L}(x^1,\dots,x^L)$ jest globalną warunkową gęstością wektora losowego $(\xi^1,\dots,\xi^L)$ pod warunkiem $(\xi^{L+1},\dots,\xi^N)$.

Wektory losowe $(\xi^1,\dots,\xi^L)$, $(\xi^{L+1},\dots,\xi^N)$ nazywamy wektorami niezależnymi, jeżeli zachodzi warunek:

$$q_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N) = q_{\xi^1,\dots,\xi^L}(x^1,\dots,x^L) \cdot g_{\xi^{L+1},\dots,\xi^N}(x^{L+1},\dots x^N). \tag{4.5}$$

Następujące warunki:

(i) wektor losowy $(\xi^1,\dots,\xi^L)$ jest niezależny od wektora losowego $(\xi^{L+1},\dots,\xi^N)$

(ii) wektor losowy $(\xi^{L+1},\dots,\xi^N)$ jest niezależny od wektora losowego $(\xi^1,\dots,\xi^L)$

(iii) wektory losowe $(\xi^1,\dots,\xi^L)$, $(\xi^{L+1},\dots,\xi^N)$ są niezależne,

są równoważne na podstawie (4.3), (4.4) i (4.5).

Zauważmy, że zakładając (4,3) dla odpowiednich układów zmiennych losowych, gęstość łączną wektora losowego $(\xi^1,\dots,\xi^N)$ można przedstawić w postaci:

$$q_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N) = g_{\xi^1/\xi^2,\dots,\xi^N}(x^1/x^2,\dots,x^N) \cdot$$

$$g_{\xi^2/\xi^3,\dots,\xi^N}(x^2/x^3,\dots,x^N) \cdot \dots \cdot g_{\xi^{N-1}/\xi^N}(x^{N-1}/x^N) \cdot g_{\xi^N}(x^N). \tag{4.6}$$

Zmienne losowe $\xi^1,\dots,\xi^N$ nazywamy zmiennymi niezależnymi, jeżeli

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N) = g_{\xi^1}(x^1) \cdot \dots \cdot g_{\xi^N}(x^N). \tag{4.7}$$

Warunek (4.7) wobec warunków zgodności gwarantuje niezależność dowolnego układu zmiennych losowych wybranych spośród $\xi^1,\dots,\xi^N$, a także niezależność dowolnych dwóch wektorów utworzonych (w sposób rozłączny - bez powtórzeń) z układu zmiennych losowych $(\xi^1,\dots,\xi^N)$.

Za pomocą warunku analogicznego do (4.5) można zdefiniować niezależność dowolnej skończonej ilości wektorów losowych.

Niech $(\xi^1,\dots,\xi^N)$ będzie układem niezależnych zmiennych losowych. Zakładając, że $f_k(u, x^k)$, $k = 1,\dots,N$; $\prod_{k=1}^{N} f_k(u, x^k)$ spełniają założenia (1.10a) otrzymujemy:

$$< \prod_{k=1}^{N} (f_k(u,\xi^k)> = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{N} f_k(u, x^k) g_{\xi^k}(x^k) \cdot dx^1 \cdot \dots \cdot dx^k =$$

$$= \prod_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(u, x^k)\, g_{\xi^k}(x^k) \cdot dx^k = \prod_{k=1}^{N} < f_k(u,\xi^k)> . \tag{4.8}$$

Wobec ciągłości transformacji Fouriera powyższe założenia są spełnione dla funkcji e^{jux^k}, $k = 1,\dots,N$ oraz $\exp^{ju\sum_{k=1}^{N} x^k}$. Stąd i z (4.5) wynika, że:

$$< e^{ju\sum_{k=1}^{N}\xi^k} > = \prod_{k=1}^{N} < e^{ju\xi^k} > \tag{4.9}$$

czyli, że:

$$\theta_{\xi^1+\dots+\xi^N}(u) = \prod_{k=1}^{N} \theta_{\xi^k}(u). \tag{4.10}$$

W celu podania gęstości sumy N-zmiennych niezależnych oznaczmy:

$$y^1 = x^1 + \dots + x^N \qquad \eta^1 = \xi^1 + \dots + \xi^N$$

$$y^k = x^k, \qquad \eta^k = \xi^k,\ k = 2,\dots,N \tag{4.11}$$

i obliczmy:

$$g_{\eta^1,\dots,\eta^N}(y^1,\dots,y^N) = < \delta(y^1 - \eta^1) \cdot \dots \cdot \delta(y^N - \eta^N)> . \tag{4.12}$$

Korzystając z (4.11) otrzymujemy:

$$g_{\xi^1+\dots+\xi^N,\xi^2,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N) = < \delta(x^1+\dots+x^N-\xi^1-\dots-\xi^N) \cdot$$
$$\cdot \dots \cdot \delta(x^N - \xi^N)> . \tag{4.13}$$

Stąd i ze wzoru

$$\delta(x^1 - f(a)) \cdot \delta(x^1 - a) = \delta(x^1 - f(x^2)) \cdot \delta(x^2 - a) \tag{4.14}$$

wynika, po skorzystaniu z niezależności zmiennych oraz (4.11), że:

$$g_{\xi^1+\dots+\xi^N,\xi^2,\dots,\xi^N}(y^1,\dots,y^N) = g_{\xi^1}(y^1-y^2-y^3\dots-y^N)\, g_{\xi^2}(y^2) \cdot \dots \cdot g_{\xi^N}(y^N). \tag{4.15}$$

Całkując ostatnią równość kolejno względem $y^2,\dots,y^N$ i korzystając z warunku zgodności (4.1) uzyskujemy wzór:

$$g_{\xi^1+\dots+\xi^N}(y^1) = g_{\xi^1} * \dots * g_{\xi^N}(y^1). \tag{4.16}$$

Ze wzorów (4.10), (4.16) i (1.9) wynikają następujące równości:

$$g_{\xi^1} * \dots * g_{\xi^N}(y^1) = \mathcal{F}^{-1}\left(\prod_{k=1}^{N} \theta_{\xi^k}(u)\right)(y^1) \tag{4.17}$$

$$\prod_{k=1}^{N} \theta_{\xi^k}(u) = \mathcal{F}(g_{\xi^1} * \dots * g_{\xi^N}(y^1))(u). \tag{4.18}$$

Wektor losowy $(\zeta^1,\dots,\zeta^L)$ nazywamy wektorem ściśle związanym z wektorem $(\xi^1,\dots,\xi^N)$, jeżeli istnieją funkcje $f^l(x^1,\dots,x^N)$ $l=1,\dots,L$, że $\zeta^l = f^l(\xi^1,\dots,\xi^N)$.

Łączna gęstość utworzonego z nich wektora losowego $(\zeta^1,\dots,\zeta^L, \xi^1,\dots,\xi^N)$ jest postaci:

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(y^1,\dots,y^L, x^1,\dots,x^N) = \left\langle \prod_{l=1}^{L} \delta(y^l - f^l(\xi^1,\dots,\xi^N)) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \prod_{k=1}^{N} \delta(x^k - \xi^k) \right\rangle . \tag{4.19}$$

Stosując w (4.19) wzór (4.14) otrzymujemy:

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(y^1,\dots,y^L, x^1,\dots,x^N) = \prod_{l=1}^{L} \delta(y^l - f^l(x^1,\dots,x^N)) \cdot$$

$$\cdot\, g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(x^1,\dots,x^N). \tag{4.20}$$

W przypadku gdy $N = L$ oraz odwzorowanie o składowych f^l, $l = 1,\dots,L$ przekształca R^N na R^N wzajemnie jednoznaczne i jest takie, że jakobian I tego odwzorowania w każdym punkcie jest różny od zera, otrzymujemy po scałkowaniu (4.20) względem $x^1,\dots,x^N$ i zamianie zmiennych

$$u^l = f^l(x^1,\dots,x^N) \quad l = 1,\dots,L=N$$

gęstość wektora $(f^1(\xi^1,\dots,\xi^N),\dots,f^N(\xi^1,\dots,\xi^N))$

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(y^1,\dots,y^N) = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{l=1}^{N} \delta(y^l - u^l) \cdot$$

$$\cdot\, g_{\xi^1,\dots,\xi^N}((f^1)^{-1}(u^1,\dots,u^N),\dots,(f^N)^{-1}(u^1,\dots,u^N)) \cdot |I^{-1}|\, du^1,\dots,du^N. \tag{4.21}$$

Obliczając całkę (4.21) otrzymujemy ostatecznie:

$$g_{\xi^1,\dots,\xi^N}(y^1,\dots,y^N)\; g_{\xi^1,\dots,\xi^N}((f^1)^{-1}(y^1,\dots,y^N),$$

$$,\dots,(f^N)^{-1}(y^1,\dots,y^N))\; |I|^{-1}. \tag{4.22}$$

5. Uwagi końcowe

W powyższym artykule uogólniliśmy wyniki umieszczone w pracy poprzedniej [3] na przypadek wektora losowego. Z rezultatów tych będziemy korzystali w następnym artykule cyklu o dystrybucyjnym ujęciu rachunku prawdopodobieństwa poświęconym procesom stochastycznym.

Przedstawiane zagadnienia są przedmiotem dyskusji seminarium Zakładu Mechaniki Teoretycznej w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego.

LITERATURA

[1] Antosik P., Mikusiński J., Sikorski R.: Theory od distributions, The sequential approach, E. S.P.C., Amsterdam, PWN, Warszawa 1973.

[2] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B.: Podstawy rachunku prawdopodobieństwa w ujęciu dystrybucyjnym, Zesz.Nauk.Pol.Śl. s. Mat.-Fiz. z. 29, Gliwice 1978.

[3] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B.: Charakterystyki statystyczne zmiennej losowej w ujęciu dystrybucyjnym, Zesz.Nauk. Pol.Śl. s. Mat.Fiz., z. 29, Gliwice 1978.

[4] Mikusiński J., Sikorski R.: Elementarna teoria dystrybucji, PWN, Warszawa 1964.

[5] Schwartz L.: Theorie des distributions, Herman, Paris 1973.

[6] Stratonovič R.A.: Izbrannyje voprosy tieorii fluktuacji w radiotiechnikie, Sovietskoje Radio, Moskwa 1961.

[7] Zemanian A.H.: Teoria dystrybucji i analiza transformat, PWN, Warszawa 1959.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОГО ВЕКТОРА В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ СМЫСЛЕ

Р е з ю м е

Эта работа является одной из цикла работ посвящённых теории вероятности в неклассическои смысле. В ней заключены основные статистические характеристики случайного вектора,функция распределения плотности,характеристическая функция, моменты, кореляции, квазимоменты и даются, также, общие связи между ними. Обращается внимание на особенную роль случайного вектора нормального типа, выражая при его помощи плотность, довольно обширного разряда случаиных векторов.

В конце работы обобщаются, начертанные в предыдущих работах [3], результаты касающиеся статистической зависимости системы конечного количества случайных величин.

В статье используются основные факты теории обошённой функции, которые вместе со схемой доказательства эквивалентности (последовательности [1],[4] и функционала [5], [7], были представлены в предыдущих равотах [2], [3].

THE STATISTICAL RANDOM VECTOR CHARACTERISTICS IN A DISTRIBUTIONAL FORMULATION

S u m m a r y

The present work is a successive one in a series of articles devoted to the distributional formulation of the probability calculus. We are presenting here the basic statistical characteristics of a random vector: a distribuant, density, characteristical function, moments,correlations and quasimoments as well as the connections between them. Special attention will be paid to the particular role played by the random vector of a normal type expressing with its help the density of a relatively large class of random vectors.

In the end, the results, outlined in the previons work [3], connected with the statistical dependences in the system of a finite random variable quantity will be generalised.

In this article the basic facts from the destribution theory, which were presented in our previous works [2], [3] together with the outline of an equivalence proof of both formulations sequential [1], [4] and functional ones [5], [7], will be utilized.