ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: Matematyka-Fizyka z. 29 Nr kol. 559

Damian BRÜCKNER, Marian PODHORODYŃSKI,
Bogdan SKALMIERSKI

FUNKCJONAŁ CHARAKTERYSTYCZNY I PEWNE CHARAKTERYSTYKI STATYSTYCZNE PROCESU STOCHASTYCZNEGO (UJĘCIE CIĄGOWE)

Streszczenie. W niniejszym artykule, będącym rozszerzeniem naszej poprzedniej pracy [5] przedstawiamy dalsze charakterystyki statystyczne procesów stochastycznych; jedno- i wielowymiarowych. Przytoczymy definicję funkcjonału charakterystycznego, uogólniającego pojęcie funkcji charakterystycznej w zakresie procesów stochastycznych spełniających mało krępujące warunki (i), (ii), (a), (b)). Podamy definicje funkcji: momentów, korelacji i quasimomentów oraz związki między nimi.

W toku rozważań będziemy w istotny sposób korzystać z przedstawionego w poprzednich naszych artykułach [2], [3], [4], [5] dystrybucyjnego ujęcia rachunku prawdopodobieństwa oraz z podstawowych faktów teorii dystrybucji [1], [7] przytoczonych w [2], [3].

1. Funkcjonał charakterystyczny a charakterystyki statystyczne jednowymiarowego procesu stochastycznego

Niech dany będzie jednowymiarowy proces stochastyczny $\xi(t)$ na T [5], tzn.: klasa abstrakcji względem niżej zdefiniowanej relacji równoważności $\sim$ określonej w rodzinie takich ciągów $({}_i\xi(t))$ funkcji typu T w R $\subset R$, dla których istnieje granica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} H(x^k - {}_i\xi(t^k)) \tag{1.1}$$

dla wszystkich ustalonych $t^k \in T$, $k=1,\dots,m$; $m \in \mathcal{N}$, $t^1 < \dots < t^m$ i zbieżność ta jest jednostajna na $-R^m$; przy czym:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1, & x \leqslant 0 \end{cases} \qquad x \in -R. \tag{1.2}$$

Ciągi o własności (1.1) nazywamy ciągami podstawowymi. Wyżej wspomniana relacja $\sim$ ma postać $(({}_i\xi(t)), ({}_i\zeta(t))$ - ciągi podstawowe):

$$({}_i\xi(t)) \sim ({}_i\xi(t)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} H(x^k - {}_i\xi(t^k)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} H(x^k - {}_i\xi(t^k)). \tag{1.3}$$

Dowolny reprezentant klasy abstrakcji $\xi(t) = [({}_i\xi(t))]$ nazywamy ciągiem realizacji procesu stochastycznego $\xi(t)$.

W przypadku, gdy realizacje były dowolnymi funkcjami, zdefiniowaliśmy [5] skończenie wymiarowe dystrybuanty, gęstości i funkcje charakterystyczne, a także ich zespoły.

Twierdzenie 1

Założenia: (i) T - otwarty podzbiór zbioru liczb rzeczywistych (ii) dla dowolnych $t^1,\dots,t^m \in T$ istnieje ciąg realizacji $({}_i\xi(t))$ jednowymiarowego procesu stochastycznego $\xi(t)$, ciągłych w pewnych otoczeniach punktów $t^1, \dots t^m$

Teza: Istnieje granica:

$$\theta_\xi[u(t)] = \lim_{n\to\infty} n \sum_{i=1}^{n} \exp j \int_T u(t)\, {}_i\xi(t)dt, \tag{1.4}$$

dla $u(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k \delta(t-t^k)$, $u_k \in R$, $t^k \in T$, $k=1,\dots,m$; $m \in \mathcal{N}$, $j = \sqrt{-1}$; i zachodzi równość:

$$\theta_\xi \left[\sum_{k=1}^{m} u_k \delta(t-t^k)\right] = \theta_\xi(u_1,\dots,u_m/t^1,\dots,t^m), \tag{1.5}$$

gdzie prawa strona równości została zdefiniowana w [5] jako m - wymiarowa funkcja charakterystyczna jednowymiarowego procesu stochastycznego $\xi(t)$ (pierwsza z równości (1.6)). W pracy [5] zdefiniowaliśmy też symbol średniej $< \ >$. Nie przypominamy tej definicji, gdyż jej sens wyjaśnia druga z równości (1.6).

Dowód:

$$\theta_\xi(u_1,\dots,u_m/t^1,\dots,t^m) = < \exp j \sum_{k=1}^{m} u_k \xi(t^k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp j \sum_{k=1}^{m} u_k\, {}_i\xi(t^k), \tag{1.6}$$

przy czym ze względu na niezależność średniej od wyboru ciągu realizacji można założyć, że w równości (1.6) $({}_i\xi(t))$ jest ciągiem realizacji ciągłych w pewnych otoczeniach punktów $t^1,\dots,t^m$ (istnienie takiego ciągu zostało założone). Stąd:

$$\theta_\xi(u_1,\dots,u_m/t^1,\dots,t^m) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp j \sum_{k=1}^{m} \int_T u_k\, {}_i\xi(t)\delta(t-t^k)dt =$$

$$= \theta_\xi\Big[\sum_{k=1}^{m} u_k\, \delta(t-t^k)\Big], \tag{1.7}$$

przy czym tym razem m jest ustalone. Ze wzoru (1.6) do (1.7) przeszliśmy korzystając z własności dystrybucji δ -Diraca [1], [2]:

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0), \quad \varepsilon > 0 \tag{1.8}$$

dla dowolnej funkcji $f(t)$ ciągłej w $(t_0-\varepsilon\,,\ t_0+\varepsilon)$.

Definicja:

Odwzorowanie, przyporządkowujące dystrybucjom $u(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k\delta(t-t^k)$ granicę $\theta_\xi[u(t)]$, nazywamy funkcjonałem charakterystycznym jednowymiarowego procesu stochastycznego $\xi(t)$.

Wniosek 1:

Funkcjonał charakterystyczny $\theta_\xi[u(t)]$ globalnie charakteryzuje proces o własnościach (i), (ii), można bowiem z niego otrzymać (1.5) funkcje charakterystyczne dowolnego wymiaru, a więc i wszystkie jego charakterystyki statystyczne.

Twierdzenie 2

Założenia: (i), (ii) oraz

$$\text{(iii)} \quad \theta_\xi[u(t)] = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \int_T \dots \int_T m^s_\xi(t_1,\dots,t_s)u(t_1)\,.\,\dots\,.$$

$$\dots\, u(t_s)dt_1\dots dt_s.$$

Teza:

$$m^s_\xi(t_1,\dots,t_s) = \langle \xi(t_1).\ \dots\ .\xi(t_s)\rangle\ . \tag{1.9}$$

Dowód:

Niech $u(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k \delta(t-t^k)$, $u_k \in R$, $t^k \in T$, $k=1,\dots,m$; $m \geqslant s$.

Wówczas:

$$\Theta_\xi \left[\sum_{k=1}^{m} u_k \delta(t-t^k) \right] = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \sum_{k_1,\dots,k_p=1}^{m} m_\xi^p(t^{k_1},\dots,t^{k_p}) u_{k_1} \cdot \dots \cdot u_{k_p} \tag{1.10}$$

Korzystając z (1.5) i (1.10) otrzymujemy rozwinięcie funkcji charakterystycznej wektora losowego $(\xi(t^1),\dots,\xi(t^m))$ w szereg:

$$\Theta_\xi(u_1,\dots,u_m/t^1,\dots,t^m) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \sum_{k_1\dots k_p=1}^{m} m_\xi^p(t^{k_1},\dots,t^{k_p}) u_{k_1} \cdot \dots \cdot u_{k_p} \tag{1.11}$$

z drugiej zaś strony [4], [5]:

$$\Theta_\xi(u_1,\dots,u_m/t^1,\dots,t^m) =$$

$$= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \sum_{k_1\dots k_p=1}^{m} \langle \xi(t^{k_1}) \cdot \dots \cdot \xi(t^{k_p}) \rangle u_{k_1} \cdot \dots \cdot u_{k_p}. \tag{1.12}$$

Porównując prawe strony (1.11) i (1.12) oraz kładąc $p=s$, $k_1=1,\dots,k_s=s$, otrzymujemy:

$$m_\xi^s(t^1,\dots,t^s) = \langle \xi(t^1) \cdot \dots \cdot \xi(t^s) \rangle \tag{1.9a}$$

co oznacza, że funkcje $m_\xi^s(t_1,\dots,t_s)$, $\langle \xi(t_1) \cdot \dots \cdot \xi(t_s) \rangle$ mają równe wartości dla dowolnie ustalonych $t^1,\dots,t^s \in T$, skąd wynika (1.9).

<u>Definicja</u>:

Funkcje $m - (t_1,\dots,t_s)$ nazywamy funkcjami momentów s-tego rzędu jednowymiarowego procesu stochastycznego $\xi(t)$.

Twierdzenie 3

Założenia: (i), (ii), (iii) oraz

$$(iv)\ \theta_{\xi}[u(t)] = \exp \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \int_T \cdots \int_T k_{\xi}^s(t_1,\ldots,t_s)u(t_1)\ldots u(t_s)dt_1\ldots dt_s.$$

Teza:

$$(1)\ k_{\xi}^s(t_1,\ldots,t_s) = k^s[\xi(t_1),\ldots,\xi(t_s)], \tag{1.13}$$

przy czym $k^s[\xi(t_1),\ldots,\xi(t_s)]$ oznacza korelację rzędu s wektora losowego $(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_s))$ [4]:

$$(2)\ k_{\xi}^s(t_1,\ldots,t_s) = m_{\xi}^s(t_1,\ldots,t_s) +$$

$$+ s! \sum_{n=2}^{s} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_n \geq 1 \\ \sigma_1+\ldots+\sigma_n=s}} \frac{M_{\xi}^s(\sigma_1,\ldots,\sigma_n,t_{(1,\ldots,s)})}{\prod_{i=1}^{n} \sigma_i!}, \tag{1.14}$$

gdzie:

$$M_{\xi}^s(\sigma_1,\ldots,\sigma_n,t_1\ldots t_s) =$$

$$= m_{\xi}^{\sigma_1}(t_1,\ldots,t_{\sigma_1}) \cdot \ldots \cdot m^{\sigma_n}(t_{\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i+1},\ldots,t_s), \tag{1.14a}$$

a $M^s(\sigma_1,\ldots,\sigma_n,t_{(1,\ldots,s)})$ oznacza symetryzację $M^s(\sigma_1,\ldots,\sigma_n,t_1,\ldots t_s)$ względem wskaźników $1,\ldots,s$.

Dowód:

Niech $u(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k\delta(t-t^k)$, przy czym $u_k \in R$, $t^k \in T$, $k=1,\ldots,m$, $m \geq s$.

Wówczas:

$$\theta_{\xi}\left[\sum_{k=1}^{m} u_k\delta(t-t^k)\right] = \exp \sum_{p=1}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \sum_{k_1,\ldots,k_p=1}^{m} k_{\xi}^p(t^{k_1},\ldots,t^{k_p}) \cdot u_{k_1} \cdot \ldots \cdot u_{k_p} \tag{1.15}$$

Korzystając z (1.5) i (1.15) otrzymujemy rozwinięcie funkcji charakterystycznej wektora losowego $(\xi(t^1),\ldots,\xi(t^m))$ w szereg:

$$\Theta_\xi(u_1,\dots,u_m/t^1,\dots,t^m) =$$

$$= \exp \sum_{p=1}^{\infty} \frac{j^p}{p!} \sum_{k_1,\dots,k_p=1}^{m} k_\xi^p(t^{k_1},\dots,t^{k_p}) \cdot u_{k_1} \cdot \dots \cdot u_{k_p}, \tag{1.16}$$

z drugiej zaś strony [4], [5]:

$$\Theta_\xi(u_1,\dots,u_m/t^1,\dots,t^m) =$$

$$= \exp \sum_{p=1}^{\infty} \frac{j^p}{p!} \sum_{k_1,\dots,k_p=1}^{m} k^p[\xi(t^{k_1}),\dots,\xi(t^{k_p})] \cdot u_{k_1} \cdot \dots \cdot u_{k_p} \tag{1.17}$$

Porównując prawe strony (1.16) i (1.17) oraz kładąc $p=s, k_1=1,\dots,k_s=s$ otrzymujemy:

$$k_\xi^s(t^1,\dots,t^s) = k^s[\xi(t^1),\dots,\xi(t^s)], \tag{1.13a}$$

co oznacza, że funkcje $k^s(t_1,\dots,t_s)$, $k^s[\xi(t_1),\dots,\xi(t_s)]$ mają równe wartości dla dowolnie ustalonych $t^1,\dots,t^s \in \mathcal{T}$, skąd wynika (1.13).

Przystępując do dowodu drugiej części tezy porównujemy logarytmy naturalne prawych stron (iii) oraz (iv) i rozwijamy logarytm prawej strony (iii) w szereg Taylora. Porównując współczynniki przy j^s i korzystając z faktu, że jeśli:

$$\int_{\mathcal{T}} \dots \int_{\mathcal{T}} h(t_1,\dots,t_s)u(t_1) \cdot \dots \cdot u(t_s)dt_1 \dots dt_s = 0$$

dla wszystkich $u(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k \delta(t-t^k)$, to:

$$h(t_1,\dots,t_s) \equiv 0, \tag{ }$$

otrzymujemy wzór (1.14).

Definicja:

Funkcje $k_\xi^s(t^1,\dots,t^s)$ nazywamy funkcjami korelacji s-tego rzędu jednowymiarowego procesu stochastycznego $\xi(t)$.

Twierdzenie 4

Założenia: (i), (ii), (iv) oraz

(v) $\exp \sum_{s=3}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \int_{\mathcal{T}} \dots \int_{\mathcal{T}} k_\xi^s(t_1,\dots,t_s)u(t_1) \cdot \dots \cdot u(t_s)dt_1 \cdot \dots \cdot dt_s =$

$$= 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \int_T \cdots \int_T b_\xi^s(t_1,\ldots,t_s)u(t_1)\cdot \ldots \cdot u(t_s)dt_1 \cdot \ldots \cdot dt_s.$$

Teza:

(1) $b_\xi^s(t_1,\ldots,t_s) = b^s[\xi(t_1),\ldots,\xi(t_s)], \quad s \geq 3,$ (1.18)

przy czym $b^s[\xi(t_1),\ldots,\xi(t_s)]$ oznacza quasimoment rzędu s wektora losowego $(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_s))$ [4];

(2) $b_\xi^s(t_1,\ldots,t_s) = k_\xi^s(t_1,\ldots,t_s) +$

$$+ s! \sum_{n=2}^{[s/3]} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_n \geq 3 \\ \sigma_1+\ldots+\sigma_n=s}} \frac{k_\xi^s(\sigma_1,\ldots,\sigma_n,t_{(1},\ldots,t_{s)})}{\prod_{i=1}^{n} \sigma_i!}, \quad s \geq 3, \tag{1.19}$$

gdzie:

$$k_\xi^s(\sigma_1,\ldots,\sigma_n, t_1,\ldots,t_s) = k_\xi^{\sigma_1}(t_1,\ldots,t_{\sigma_1})\cdot \ldots \cdot k_\xi^{\sigma_n}(t_{\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i+},\ldots,t_s), \tag{1.19a}$$

a $k_\xi^s(\sigma_1,\ldots, \sigma_n, t_{(1},\ldots, t_{s)})$ oznacza symetryzację $k_\xi^s(\sigma_1\ldots\sigma_n,t_1,\ldots,t_s)$ względem wskaźników $1,\ldots,s$.

Dowód:

Niech $u(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k \delta(t-t^k)$, przy czym $u_k \in R$, $t^k \in T$, $k=1,\ldots,m$; $m \geq s \geq 3$.

Wówczas równość (v) przyjmie postać:

$$\exp \sum_{p=3}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \sum_{k_1,\ldots,k_p=1}^{m} k_\xi^p(t^{k_1},\ldots,t^{k_p})u_{k_1},\ldots \cdot u_{k_p} =$$

$$= 1 + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \sum_{k_1,\ldots,k_p=1}^{m} b_\xi^p(t^{k_1},\ldots,t^{k_p})u_{k_1}, \ldots \cdot u_{k_p}, \tag{1.20}$$

z drugiej zaś strony [4], [5]:

$$\exp \sum_{p=3}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \sum_{k_1,\ldots,k_p=1}^{m} k^p[\xi(t^{k_1}),\ldots,\xi(t^{k_p})]\, u_{k_1}\cdot \ldots u_{k_p} =$$

$$= 1 + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{j^p}{p!} \sum_{k_1,\dots,k_p=1}^{m} b^p[\xi(t^{k_1}),\dots,\xi(t^{k_p})]\, u_{k_1}\cdot\ldots\cdot u_{k_p}, \tag{1.21}$$

oraz wobec (1.13)

$$k_\xi^p(t^{k_1},\dots,t^{k_p}) = k^p[\xi(t^{k_1}),\dots,\xi(t^{k_p})]. \tag{1.13b}$$

Korzystając z (1.20), (1.21) i (1.13b) oraz kładąc $p=s$, $k_1=1,\dots,k_s = s$; otrzymujemy:

$$b_\xi^s(t^1,\dots,t^s) = b^s[\xi(t^1),\dots,\xi(t^s)], \quad s>3 \tag{1.18a}$$

co oznacza, że funkcje $b_\xi^s(t_1,\dots,t_s)$, $b^s[\xi(t_1),\dots,\xi(t_s)]$, $s\geqslant 3$, mają równe wartości dla dowolnie ustalonych $t^1,\dots,t^s \in T$, skąd wynika (1.18).

Przystępując do dowodu drugiej części tezy rozwijamy lewą stronę równości (v) w szereg Taylora. Dalej porównując w tak otrzymanej równości współczynniki przy j^s, $s\geqslant 3$ i korzystając, podobnie jak w poprzednim dowodzie, z faktu (δ) otrzymujemy wzór (1.19).

Definicja:

Funkcje $b_\xi^s(t_1,\dots,t_s)$ nazywamy funkcjami quasimomentów s-tego rzędu jednowymiarowego procesu stochastycznego $\xi(t)$.

2. Funkcjonał charakterystyczny a charakterystyki statystyczne wielowymiarowego procesu stochastycznego

Niech dany będzie N-wymiarowy proces stochastyczny $(\xi^1(t),\dots,\xi^N(t))$ na T [5], tzn.: klasa abstrakcji względem niżej zdefiniowanej relacji równoważności $\approx$ określonej w rodzinie takich ciągów $({}_i\xi^1(t),\dots,{}_i\xi^N(t))$ funkcji typu T w R^N $T\subset R$, dla których istnieje granica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \prod_{l=1}^{m} H(x^{kl} - {}_i\xi^k(t^l)) \tag{2.1}$$

dla wszystkich ustalonych $t^l \in T$, $l=1,\dots,m$, $m\in\mathcal{N}$, $t^1<\dots<t^m$ i zbieżność ta jest jednostajna na $\bar{R}^{N\cdot m}$. Ciągi o własności (2.1) nazywamy ciągami podstawowymi. Wyżej wspomniana relacja $\approx$ ma postać:

$$({}_i\xi^1(t),\dots,{}_i\xi^N(t)) \approx ({}_i\eta^1(t),\dots,{}_i\eta^N(t)) \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \prod_{l=1}^{m} H(x^{kl} - {}_i\xi^k(t^l)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{N} \prod_{l=1}^{m} H(x^{kl} - \eta^k(t^l)), \tag{2.2}$$

przy czym $({}_i\xi^1(t),\ldots,{}_i\xi^N(t))$, $({}_i\eta^1(t),\ldots,{}_i\eta^N(t))$ oznaczają ciągi podstawowe. Dowolny reprezentant klasy abstrakcji $(\xi^1(t),\ldots,\xi^N(t)) = [({}_i\xi^1(t),\ldots,{}_i\xi^N(t))]_\approx$ nazywamy ciągiem N-wymiarowych realizacji procesu stochastycznego $(\xi^1(t),\ldots,\xi^N(t))$.

W przypadku, gdy realizacje były dowolnymi funkcjami, zdefiniowaliśmy [5] skończenie wymiarowe dystrybuanty, gęstości i funkcje charakterystyczne, a także ich zespoły.

Twierdzenie 5

Założenia:

a) $\mathcal{T}$ - otwarty podzbiór zbioru liczb rzeczywistych,

b) dla dowolnych $t^{k1},\ldots,t^{km}$, $k=1\ldots N$ istnieje ciąg realizacji ${}_i\xi^k(t)$, $k=1\ldots N$, N - wymiarowego procesu stochastycznego $(\xi^1(t),\ldots,\xi^N(t))$ ciągłych w pewnych otoczeniach punktów $t^{k1},\ldots,t^{km}$, $k=1,\ldots,N$.

Teza:

Istnieje granica:

$$\Theta_\xi[u_1(t),\ldots,u_N(t)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp j \int_{\mathcal{T}} \sum_{k=1}^{N} u_k(t)\, {}_i\xi^k(t)dt, \tag{2.3}$$

dla

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{m} u_{kl}\delta(t-t^{kl}),\ u_{kl} \in R,\ t^{kl} \in \mathcal{T},\ k=1,\ldots,N;\ l=1,\ldots,m,\ j=\sqrt{-1};$$

i zachodzi równość:

$$\Theta_\xi[\sum_{l=1}^{m} u_{1l}\delta(t-t^{1l}),\ldots,\sum_{l=1}^{m} u_{Nl}\delta(t-t^{Nl})] =$$

$$= \Theta_\xi(u_{11},\ldots,u_{1m},\ldots,u_{N1},\ldots,u_{Nm}/t^{11},\ldots,t^{1m},\ldots,t^{N1},\ldots,t^{Nm}), \tag{2.4}$$

gdzie prawa strona równości (2.4) została zdefiniowana w [5] jako N.m wymiarowa funkcja charakterystyczna wektora losowego $\xi^k(t^{kl})$, $k=1,\ldots,N$; $l=1,\ldots,m$, (pierwsza z równości (2.5). Występujący w równości (2.5) symbol średniej, wprowadzony w [5], objaśniliśmy wyżej (twierdzenie 1).

Dowód:

$$\theta_\xi(u_{11},\dots,u_{Nm}/t^{11},\dots,t^{Nm}) = \langle \exp j \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{m} u_{kl}\, \xi^k(t^{kl}) \rangle =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp j \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{m} u_{kl}\, {}_i\xi^k(t^{kl}), \tag{2.5}$$

przy czym ze względu na niezależność średniej od wyboru ciągu realizacji można przyjąć, że ${}_i\xi^k(t)$, k=1...N, jest ciągiem realizacji, którego istnienie gwarantuje założenie (b). Stąd:

$$\theta_\xi(u_{11},\dots,u_{Nm}/t^{11},\dots,t^{Nm}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp j \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{m} \int_T u_{kl}\, {}_i\xi^k(t)\delta(t-t^{kl})dt =$$

$$= \theta_\xi\Big[\sum_{l=1}^{m} u_{1l}\delta(t-t^{12}),\dots, \sum_{l=1}^{m} u_{Nl}\delta(t-t^{Nl})\Big], \tag{2.6}$$

przy czym tym razem m-ustalone.

<u>Definicja:</u>

Odwzorowanie przyporządkowujące układowi dystrybucji $\sum_{l=1}^{m} u_{kl}\,\delta(t-t^{kl})$, k=1,...,N granicę $\theta_\xi[u_1(t),\dots,n_N(t)]$ nazywamy funkcjonałem charakterystycznym N-wymiarowego procesu stochastycznego $(\xi^1(t),\dots,\xi^N(t))$.

<u>Wniosek 2:</u>

Funkcjonał charakterystyczny $\theta_\xi[u_1(t),\dots,u_N(t)]$ globalnie charakteryzuje proces stochastyczny o własnościach (a), (b) można bowiem z niego otrzymać (2.4) funkcje charakterystyczne dowolnego wymiaru, a więc i wszystkie jego charakterystyki statystyczne.

<u>Twierdzenie 6:</u>

Założenia: (a), (b) oraz

(c) $\theta_\xi[u_1(t),\dots,u_N(t)] =$

$$= 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{k_1\dots k_s=1}^{N} \int_T \dots \int_T m_\xi^{k_1\dots k_s}(t_1,\dots,t_s)u_{k_1}(t_1)\cdot \dots \cdot$$

$$u_{k_s}(t_s)dt_1\dots dt_s$$

Teza:

$$m_{\xi}^{k_1\dots k_s}(t_1,\dots,t_s) = \langle \xi^{k_1}(t_1)\cdot \dots \cdot \xi^{k_s}(t_s)\rangle \tag{2.7}$$

Dowód:

Niech $u_{kl} \in R$, $t^{kl} \in \tau$, $k=1,\dots,N$, $l=1,\dots,m$, $m \geqslant s$.

Wówczas:

$$\Theta_{\xi}\left[\sum_{l=1}^{m} u_{1l}\,\delta(t-t^{1l}),\dots,\sum_{l=1}^{m} u_{Nl}\,\delta(t-t^{Nl})\right] =$$

$$= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \sum_{k_1\dots k_p=1}^{N} m_{\xi}^{k_1\dots k_p}(t^{k_1 l_1},\dots,t^{k_p l_p})u_{k_1 l_1}\cdot \dots \cdot u_{k_p l_p}. \tag{2.8}$$

Korzystając z (2.4) otrzymujemy rozwinięcie funkcji charakterystycznej wektora losowego $\xi^k(t^{kl})$ $k=1,\dots,N$, $l=1,\dots,m$; w szereg (2.8), z drugiej zaś strony [4]; [5]:

$$\Theta_{\xi}(u_{11},\dots,u_{Nm}/t^{11},\dots,t^{Nm}) =$$

$$= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \sum_{k_1\dots k_p=1}^{N} \sum_{l_1\dots l_p=1}^{m} \langle \xi^{k_1}(t^{k_1 l_1})\cdot \dots \cdot \xi^{k_p}(t^{k_p l_p})\rangle \cdot$$

$$\cdot\, u_{k_1 l_1}\cdot \dots \cdot u_{k_p l_p}. \tag{2.9}$$

Porównując prawe strony (2.8) i (2.9) oraz kładąc $p=s$, $l_1=1,\dots,l_s=s$, oraz oznaczając $t^{k_r r} = t^r$, $r=1,\dots,s$; otrzymujemy:

$$m_{\xi}^{k_1\dots k_s}(t^1,\dots,t^s) = \langle \xi^{k_1}(t^1)\cdot \dots \cdot \xi^{k_s}(t^s)\rangle, \tag{2.7a}$$

co oznacza, że funkcje te mają równe wartości dla dowolnie ustalonych $t^1,\dots,t^s \in \tau$, skąd wynika teza.

<u>Definicja</u>:

Funkcje $m_{\xi}^{k_1,\dots,k_s}(t_1,\dots,t_s)$, $k_r = 1,\dots,N$, $r=1,\dots,s$; nazywamy funkcjami momentów s-tego rzędu N-wymiarowego procesu stochastycznego $(\xi^1(t),\dots,\xi^N(t))$.

Twierdzenie 7

Założenia: (a), (b), (c) oraz

(d) $\theta_{\xi}[u_1(t),\ldots,u_N(t)] =$

$$= \exp \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{k_1\ldots k_s=1}^{N} \int_{\mathcal{T}} \ldots \int_{\mathcal{T}} k_{\xi}^{k_1\ldots k_s}(t_1,\ldots,t_s) u_{k_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot$$

$$u_{k_s}(t_s)dt_1 \cdot \ldots \cdot dt_s.$$

Teza:

(1) $$k_{\xi}^{k_1\ldots k_s}(t_1,\ldots,t_s) = k^s[\xi^{k_1}(t_1),\ldots,\xi^{k_s}(t_s)] , \tag{2.10}$$

przy czym $k^s[\xi^{k_1}(t_1),\ldots,\xi^{k_s}(t_s)]$ oznacza korelację rzędu s wektora losowego $\xi^{k_r}(t_r)$, $r=1,\ldots,s$; [4],

(2) $$k_{\xi}^{k_1\ldots k_s}(t_1,\ldots,t_s) = m_{\xi}^{k_1\ldots k_s}(t_1,\ldots,t_s) +$$

$$+ s! \sum_{n=2}^{s} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_n \geq 1 \\ \sigma_1+\ldots+\sigma_n=s}} \frac{M_{\xi}^{k(1\ldots k_s)}(\sigma_n,\ldots,\sigma_n,\ t_{(1,\ldots,t_s)})}{\prod_{i=1}^{n} \sigma_i!} \tag{2.11}$$

gdzie:

$$M_{\xi}^{k_1\ldots k_s}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n,\ t_1,\ldots,t_s) =$$

$$= m_{\xi}^{k_1\ldots k_{\sigma_1}}(t_1,\ldots,t_{\sigma_1}) \cdot \ldots \cdot m_{\xi}^{k_{\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i+1},\ldots,k_s}(t_{\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i+1}),\ldots,t_s), \tag{2.11a}$$

a $M_{\xi}^{k(1,\ldots,k_s)}(\sigma_1,\ldots\sigma_n,\ t_{(1,\ldots,t_s)})$ oznacza symetryzację

$M_{\xi}^{k_1,\ldots,k_s}(\sigma_1\ldots\sigma_n,\ t_1\ldots t_s)$ względem wskaźników $1,\ldots,s$.

Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić analogicznie jak dowody twierdzeń 6 oraz 3, dlatego też nie przytaczamy go.

Definicja:

Funkcje $k_{\xi}^{k_1,\dots,k_s}(t_1,\dots,t_s)$ nazywamy funkcjami korelacji s-tego rzędu N-wymiarowego procesu stochastycznego $(\xi^1(t),\dots,\xi^N(t))$.

Podobnie jak dowody twierdzeń 6 i 4 przebiega dowód nastpującego twierdzenia:

Twierdzenie 8

Założenia: (a), (b), (d) oraz

$$\text{(e)}\ \exp\sum_{s=3}^{\infty}\frac{i^s}{s!}\sum_{k_1\dots k_s=1}^{N}\int_{T}\dots\int_{T}k_{\xi}^{k_1\dots k_s}(t_1,\dots t_s)u_{k_1}(t_1)\cdot\ \dots\ \cdot u_{k_s}(t_s)dt_1\dots dt_s = 1+\sum_{s=3}^{\infty}\frac{i^s}{s!}\sum_{k_1\dots k_s=1}^{N}\int_{T}\dots\int_{T}b_{\xi}^{k_1\dots k_s}(t_1,\dots,t_s)u_{k_1}(t_1\cdot\ \dots\ \cdot u_{k_s}(t_s)dt_1\dots dt_s.$$

Teza:

$$\text{(1)}\ b_{\xi}^{k_1\dots k_s}(t_1,\dots,t_s) = b^s\left[\xi^{k_1}(t_1),\dots,\xi^{k_s}(t_s)\right],\quad s\geq 3, \tag{2.12}$$

przy czym $b^s\left[\xi^{k_1}(t_1),\dots,\xi^{k_s}(t_s)\right]$ oznacza quasimoment rzędu s wektora losowego $\xi^{k_r}(t_r)$, $r=1,\dots,s$; [4],

$$\text{(2)}\ b_{\xi}^{k_1\dots k_s}(t_1,\dots,t_s) = k_{\xi}^{k_1\dots k_s}(t_1,\dots,t_s) + s!\sum_{n=2}^{[s/3]}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{\sigma_1,\dots,\sigma_n\geq 3\\ \sigma_1+\dots+\sigma_n=s}}\frac{K_{\xi}^{k(1\dots k_s)}(\sigma_1,\dots,\sigma_n,t_{(1},\dots,t_s)}{\prod_{i=1}^{n}\sigma_i!},\quad s\geq 3, \tag{2.13}$$

gdzie:

$$K_{\xi}^{k_1\dots k_s}(\sigma_1,\dots,\sigma_n,t_1,\dots,t_s) = k_{\xi}^{k_1\dots k_{\sigma_1}}(t_1,\dots,t_{\sigma_1})\cdot\ \dots\ \cdot k^{k_{\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i+1},\dots,k_s}(t_{\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i+1},\dots,t_s) \tag{2.13a}$$

a $K_{\xi}^{k_{(1},\ldots,k_{s})}(\theta_1,\ldots,\theta_n,\ t_{(1},\ldots,t_{s})}$ oznacza symetryzację

$K_{\xi}^{k_1,\ldots,k_s}(\theta_1,\ldots,\theta_n,\ t_1,\ldots,t_s)$ względem wskaźników $1,\ldots s$.

Definicja:

Funkcje $b^{k_1\ldots k_s}_{\xi}(t_1,\ldots,t_s)$ nazywamy funkcjami quasimomentów s-tego rzędu N-wymiarowego procesu stochastycznego $(\xi^1(t),\ldots,\xi^N(t))$.

3. Uwagi końcowe

W przypadku procesu, który nie spełnia założeń (i), (ii), (a), (b) nie można rozważać funkcjonału charakterystycznego. Można natomiast mówić o funkcji charakterystycznej dowolnego wymiaru, można też zdefiniować funkcje momentów, korelacji i quasimomentów wzorami (1.9), (1.13) i (1.18), (2.7), (2.10) i (2.12). Wyprowadzone związki ustalające zależności między tymi funkcjami pozostają nadal prawdziwe.

Z przedstawionych w artykule wyników będziemy korzystać w następnych pracach poświęconych nowemu pojęciu - wielkości losowej rzędu s.

LITERATURA

[1] Antosik P., Mikusiński J., Sikorski R.: Theory of distributions. The sequential approach. E.S.P.C. Amsterdam, PWN, Warszawa 1973.

[2] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B.: Podstawy rachunku prawdopodobieństwa w ujęciu dystrybucyjnym, Zeszyty Naukowe, Pol.Śl.,Gliwice, 1976.

[3] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B.: Charakterystyki statystyczne zmiennej losowej w ujęciu dystrybucyjnym, Zeszyty Naukowe Pol. Śl.,Matematyka-Fizyka z. 29, Gliwice 1978.

[4] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B.: Charakterystyki statystyczne wektora losowego w ujęciu dystrybucyjnym, Zeszyty Naukowe Pol. Śl., Matematyka-Fizyka z. 29, Gliwice 1978.

[5] Brückner D., Podhorodyński M., Skalmierski B.: Proces stochastyczny w ujęciu dystrybucyjnym, Prace Matematyczne Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1976.

[6] Gichmann J.J., Skorochod A.W.: Wstęp do teorii procesów stochastycznych, PWN, Warszawa 1968.

[7] Schwartz L.: Theorie des distributions, Herman, Paris 1973.

[8] Stratonov R.A.: Izbrannyje woprosy tieorii fluktuacji w radiotiechnikie, Sovietskoje Radio, Moskwa 1961.

[9] Zubrzycki S.: Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, PWN, Warszawa 1966.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ФУНКЦИОНАЛ И НЕКОТОРАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В НЕКЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ

Р е з ю м е

В работе представлено: характеристический функционал, функции моментов, корреляции и квазимоментов одно- и многомерного случаиного процесса; подано также связи между ними.

THE CHARACTERISTICAL FUNCTIONAL AND SOME STATISTICAL CHARACTERISTICS OF A STOCHASTIC PROCESS (SEQUENTIAL FORMULATION)

S u m m a r y

In the present article, being an extension of our previous works, some further statistical characteristics of stochastic processes uni - and multi - dimensional were presented. We are quoting here the definition of a characteristic functional generalising the notion of a charakteristical function in the range of stochastic processes which fulfill not binding conditions (i), (ii), (a), (b). The definitions of the following functions of: moments, correlations and quasimoments and the connections between them will be given.

In the course of our considerations we are going to utilize the distributional formulation of probability calculus presented in our previous articles [2], [3], [4], [5] and the basic facts from the distributional theory [1], [7] quoted in [2], [3].