

Teresa DUDEK

Instytut Mechaniki Teoretycznej

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE PROBLEMÓW BRZEGOWYCH TEORII SKRĘCANIA
PRĘTÓW ZŁOŻONYCH Z RÓŻNYCH OŚRODKÓW

(Komunikat)

Streszczenie. W pracy do rozwiązania zagadnienia zastosowano podejście wariacyjne, które jest równoważne problemowi brzegowemu zadania. Wykorzystując twierdzenie o minimum energii uzupełniającej zastosowano do minimalizacji podstawowego funkcjonału metodę podobszarów, co prowadzi w efekcie końcowym do układów równań algebraicznych metody.

1. Wstęp

Badaczem, który postawił zagadnienie skręcania prętów złożonych z różnych ośrodków i wyprowadził równania opisujące to zjawisko był N.I. Muschieliszwilli [1]; zadanie sprowadził do równania całkowego Fredholma i udowodnił twierdzenie o istnieniu rozwiązania tego równania, korzystając przy tym z teorii funkcji zmiennej zespolonej.

Z innych prac analitycznych wymienimy badania I. Wekuy i A. Ruchadze [3], którzy stosowali do rozwiązywania zadania odwzorowania konforemne.

K. Czobanian [4] podał metodę rozwiązania wykorzystując funkcję naprężeń Prandtla.

I.W. Gonczariuk [5] rozwiązywał problem brzegowy przy wykorzystaniu R-funkcji.

W pracy [6a] podano zlinearyzowany ciąg iteracyjny problemów brzegowych dla rozwiązania nieliniowych zagadnień skręcania prętów o obszarach wielospójnych, a w [6b] podano algorytmy numerycznego rozwiązania zadań brzegowych dla ośrodków fizycznie nieliniowych.

Autorzy pracy [8] stosowali metodę Ritza do rozwiązywania problemów brzegowych skręcania prętów złożonych z różnych ośrodków.

W niniejszej pracy do rozwiązania zadania zastosowano metodę wariacyjno-różnicową, korzystając przy tym z wyników podanych w pracy [7].

2. Sformułowanie zadania

Weźmy pod uwagę pręt pryzmatyczny zajmujący obszar $D \subset \mathbb{R}^2$ o przekroju poprzecznym D , który składa się z częścią $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ wypełnionej materiałem izotropowym sprężystym o module sprężystości poprzecznej G_1 i obszaru $D_2 \subset \mathbb{R}^2$, wypełnionego ośrodkiem sprężystym i izotropowym o module sprężystości poprzecznej G_2 , tak że $D_1 \cup D_2 = D, D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Brzeg przekroju D_1 , oznaczmy przez L_1 , a krzywą oddzielającą obszary D_1 i D_2 przez L_2 .

Oznaczając przez:

$$\tau_{xz}^{(i)}, \tau_{yz}^{(i)}, \varphi_{xz}^{(i)}, \varphi_{yz}^{(i)} \quad (i=1,2) \quad (2.1)$$

niezerowe składowe tensorów naprężenia i odkształcenia dla obszaru D_i ($i=1,2$) a funkcję naprężenia przez:

$$U(x,y) = \begin{cases} U_1(x,y) & \text{dla } (x,y) \in D_1, \\ U_2(x,y) & \text{dla } (x,y) \in D_2, \end{cases} \quad (2.2)$$

otrzymujemy (por. [4], [5]) następujące zadanie brzegowe:

$$\nabla^2 U_i(x,y) = -2G_i \quad \text{dla } (x,y) \in D_i, \quad (2.3)$$

$$U_1|_{L_1} = 0, \quad U_1|_{L_2} = U_2|_{L_2},$$

$$\frac{1}{G_1} \frac{\partial U_1}{\partial n} \Big|_{L_2} = \frac{1}{G_2} \frac{\partial U_2}{\partial n} \Big|_{L_2}.$$

Moment skręcający M określimy z równania:

$$M = 2\Theta \iint_D U(x,y) dx dy, \quad (2.4)$$

gdzie Θ jest jednostkowym kątem skręcenia.

Wykorzystując twierdzenie o minimum energii uzupełniającej zadanie (2.3) sprowadzamy do równoważnego mu zadania minimalizacji następującego funkcjonału:

$$v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{G_i} \iint_{D_i} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y} \right)^2 - 4 G_i U_i \right] dx dy \quad (2.5)$$

przy spełnieniu warunków (2.3)₂ i (2.3)₃.

3. Rozwiązanie zadania

Do rozwiązania zadania zastosujemy jedną z metod wariacyjnych - metodę podobszarów. Przeprowadzamy podział obszaru D na podobszary trójkątne Δ_i i przyjmujemy w tych podobszarach funkcję U_i jako liniową

$$U_i(x,y) = \alpha_{i1} + \alpha_{i2}x + \alpha_{i3}y \quad \text{dla } (x,y) \in \Delta_i. \quad (3.1)$$

Wartości funkcji naprężeń w węzłach siatki trójkątnej oznaczamy przez F_{i1}, F_{i2}, F_{i3} .

Wariacja funkcjonału w podobszarze Δ_i ma postać:

$$\delta V_i = (\delta F_i^T) (k_i F_i - D_i). \quad (3.2)$$

Macierz k_i , zwana macierzą sztywności elementu $\in D_j$ ($j=1,2$), ma postać:

$$K_i = \frac{1}{2G_j s} \begin{bmatrix} s^2 + (t-1)^2 & -s^2 - t(t-1) & t-1 \\ \dots & \dots & \dots \\ s^2 - t(t-1) & s^2 + t^2 & -t \\ \dots & \dots & \dots \\ t-1 & -t & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

gdzie

$$s = \frac{h_2}{h_1}, \quad t = \frac{x_C}{h_1}. \quad (3.3)$$

W (3.3) h_1 jest podstawą, h_2 - wysokością, a x_C - odcięta wierzchołka trójkąta.

Macierz F_i jest macierzą szukanych wartości funkcji naprężeń w węzłach siatki trójkątnej, D_i macierzą wyrazów wolnych, postaci:

$$D_i = \frac{h_1 h_2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (3.4)$$

Wariacja funkcjonału w całym obszarze D jest określona przez

$$\delta V = 19^2 (\delta F^T) (KF-D) \quad (3.5)$$

Z warunku koniecznego minimum funkcjonału

$$\delta V = 0 \quad (3.6)$$

dochodzimy do układu równań algebraicznych, liniowych

$$KF-D = 0. \quad (3.7)$$

gdzie K jest macierzą sztywności układu, utworzoną blokowo z macierzy K , F - macierzą niewiadomych wartości funkcji naprężeń w węzłach siatki trójkątnej, D - macierzą wyrazów wolnych, zbudowaną z macierzy D .

Rozwiązując układ (3.7) należy także uwzględnić warunki (2.3)₂, natomiast warunków (2.3)₃ po dyskretyzacji można zapisać następująco:

$$F_i = a F_{i+1} + b F_k + c F_{i-1} + d F_j. \quad (3.8)$$

Równość ta określa wartość funkcji naprężeń F_i na linii rozdziału ośrodków, przy pomocy wartości w punktach sąsiednich obszarów D_1 i D_2 . Stałe a , b , c , d wyrażają się wzorami:

$$a = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \frac{\alpha h_2}{\alpha h_2 + \beta h_1}, \quad c = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \frac{\beta h_1}{\alpha h_2 + \beta h_1},$$

$$b = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \frac{\alpha h_2}{\alpha h_2 + \beta h_1}, \quad d = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \frac{\beta h_1}{\alpha h_2 + \beta h_1},$$

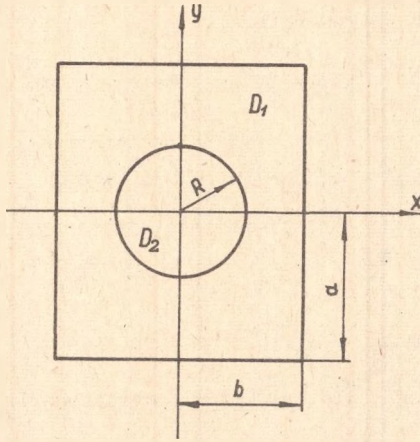
tutaj α , β są cosinusami kierunkowymi pochodnej normalnej w danym punkcie linii L_2 rozdziału ośrodków.

4. Przykład liczbowy

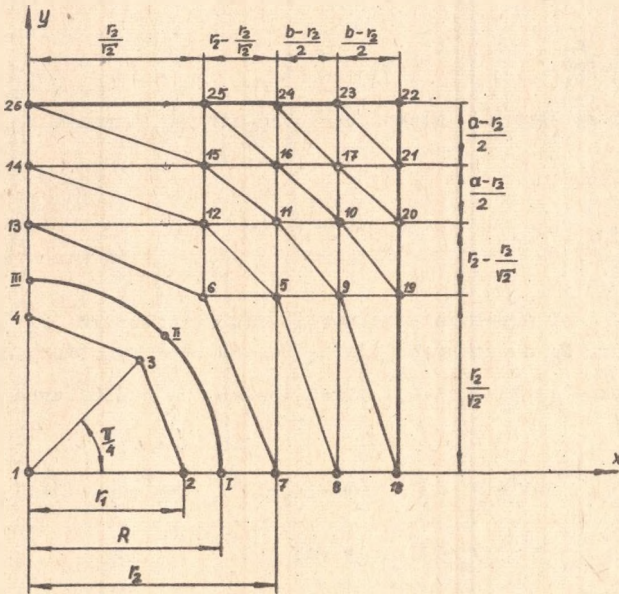
Przekrój poprzeczny pręta przedstawia rys. 1a. Obszarem D_1 jest prostokąt o wymiarach $2a$ i $2b$, zaś obszar D_2 kołem o promieniu R .

Uwzględniając symetrię obszaru względem obu osi współrzędnych bierzemy pod uwagę jedynie obszar zawarty w I ćwiartce. Przeprowadzamy podział obszaru D na podobszary trójkątne, oddzielając wąskim "pasem" obszary D_1 i D_2 ; numerując węzły jak na rys. 1b z warunku brzegowego $U_1|_{L_1} = 0$ otrzymamy:

$$F_{18} = F_{19} = \dots = F_{26} = 0$$



Rys. 1a



Rys. 1b

Biorąc pod uwagę jeden z trójkątów leżących w obszarze D_2 uzyskujemy następującą macierz sztywności:

$$K_i = \frac{1}{2G_2\alpha} \begin{bmatrix} \alpha^2 + (\alpha_C - 1)^2 & \alpha - 2 - \alpha_C(\alpha_C - 1) & \alpha_C - 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -\alpha^2 - \alpha_C(\alpha_C - 1) & \alpha^2 + \alpha_C^2 & -\alpha_C \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_C - 1 & -\alpha_C & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

gdzie $\alpha = \frac{r_1/\sqrt{2}}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \alpha_C$.

Macierze sztywności dla trójkątów zawartych w D_1 mają postać:

$$K_j = \frac{1}{2G_1s} \begin{bmatrix} s^2 + 1 & -s^2 & -1 \\ -s^2 & s^2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

gdzie $s = \frac{h_2}{h_1}$.

Macierz sztywności całego układu będzie miała postać:

$$K = \left[\begin{array}{c|c} K_1 & 0 \\ \hline 0 & K_2 \end{array} \right], \quad (4.3)$$

gdzie K_1 jest macierzą sztywności ćwiartki obszaru D_2 o wymiarach 4×4 , K_2 - obszaru D_1 o wymiarach 13×13 . Są one blokowo utworzone z macierzy K_i określonych w (4.1) i (4.2). Przedstawiono je w tablicach 1 i 2.

Tablica 1

$$K_1 = \frac{1}{2G_2\alpha} \begin{bmatrix} 8[\alpha^2 + (\alpha_C - 1)^2] & -\alpha^2 - (\alpha_C - 1)^2 & -\alpha^2 - (\alpha_C - 1)^2 & -\alpha^2 - (\alpha_C - 1)^2 \\ -\alpha^2 - (\alpha_C - 1)^2 & \alpha^2 + \alpha_C^2 + 1 & -\alpha_C & 0 \\ -\alpha^2 - (\alpha_C - 1)^2 & -\alpha_C & \alpha^2 + \alpha_C^2 + 1 & -\alpha_C \\ -\alpha^2 - (\alpha_C - 1)^2 & 0 & -\alpha_C & \alpha^2 + \alpha_C^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Tablica 2

$\sum_{i=1}^2 (a_i + \frac{1}{a_i}) - a_1 - a_2$	$-a_1 - a_2$	$-\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$	$-2 \cdot a_3$	$-\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4}$									
$-a_1 - a_2$	$a_1 + a_2 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$			$-\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4}$	$-\frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_6}$	$-\frac{1}{a_7} - \frac{1}{a_8}$							
$-\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$	$2(a_2 + \frac{1}{a_2}) - 2 \cdot a_2$												
	$-2 \cdot a_2$	$4(a_2 + \frac{1}{a_2}) - \frac{2}{a_2}$											
$-a_3 - a_4$			$2(a_2 + \frac{1}{a_2} + a_3 + \frac{1}{a_3}) - 8 \cdot a_3$										
		$-\frac{1}{a_3}$		$2(a_3 + \frac{1}{a_3} + a_4 + \frac{1}{a_4}) - 4 \cdot a_4$									$-\frac{2}{a_5}$
$-\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4}$				$-\frac{1}{a_4} - a_4$	$-\frac{1}{a_5} - a_5$								$-\frac{1}{a_6} - \frac{1}{a_7}$
				$\sum_{i=5,7,8} (a_i + \frac{1}{a_i}) - a_4 - a_7$	$-\frac{1}{a_5} - a_5$	$-\frac{1}{a_6} - a_6$							$-\frac{1}{a_6} - \frac{1}{a_7}$
													$2(a_5 + a_6 + \frac{1}{a_5}) - \frac{2}{a_6}$
													$4(a_6 + \frac{1}{a_6}) - 2 \cdot a_6$
													$-2 \cdot a_6$
													$2(a_6 + \frac{1}{a_5} + a_7 + \frac{1}{a_7}) - 2 \cdot a_7$
													$2(a_7 + \frac{1}{a_7} + a_8 + \frac{1}{a_8}) - 2 \cdot a_8$
													$4(a_8 + \frac{1}{a_8})$

$x_2 = \frac{1}{241}$

W tablicy 2 wprowadzono oznaczenia:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{2} + 1, & \alpha_5 &= \sqrt{2} - 1, \\ \alpha_2 &= \frac{r_2 \sqrt{2}}{b-r_2}, & \alpha_6 &= \frac{a-r_2}{r_2 \sqrt{2}}, \\ \alpha_3 &= \frac{r_2 \sqrt{2} (\sqrt{2}-1)}{b-r_2}, & \alpha_7 &= \frac{a-r_2}{r_2 (2-\sqrt{2})}, \\ \alpha_4 &= 1, & \alpha_8 &= \frac{a-r_2}{b-r_2}. \end{aligned}$$

Macierz D ma postać:

$$D = \begin{bmatrix} 8\beta & 2\beta & 2\beta & 2\beta & \beta_1 + \beta_3 + 2(\beta_2 + \beta_4) & \beta_1 + \beta_4 & \beta_5 & \beta_1 + 3\beta_2 & 6\beta_2 \\ 3(\beta_2 + \beta_3) & 3(\beta_3 + \beta_8) & \beta_4 + \beta_8 + 2(\beta_3 + \beta_7) & \beta_5 + \beta_7 + 2(\beta_4 + \beta_6) & 2\beta_5 + 3\beta_6 & 6\beta_6 & 3(\beta_6 + \beta_7) & 3(\beta_7 + \beta_8) & 6\beta_8 \end{bmatrix}^T \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{r_1^2}{3\sqrt{2}}, & \beta_5 &= \frac{1}{6} r_2^2 (\sqrt{2} - 1), \\ \beta_1 &= \frac{1}{6} r_2^2 (\sqrt{2} - 1), & \beta_6 &= \frac{(a-r_2)r_2}{6\sqrt{2}}, \\ \beta_2 &= \frac{r_2(b-r_2)}{6\sqrt{2}}, & \beta_7 &= \frac{r_2(a-r_2)(\sqrt{2}-1)}{6\sqrt{2}}, \\ \beta_3 &= \frac{r_2(b-r_2)(\sqrt{2}-1)}{6\sqrt{2}}, & \beta_8 &= \frac{1}{12} (a-r_2)(b-r_2), \\ \beta_4 &= \frac{1}{3} \left(r_2 - \frac{r_2}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

Zadanie polega na rozwiązaniu układu równań:

$$KF - D = 0. \quad (4.5)$$

Wartości funkcji naprężenia na brzegu L_2 można obliczyć z równań:

$$\begin{aligned} F_I &= aF_8 + bF_2, \\ F_{II} &= aF_6 + bF_3, \\ F_{III} &= aF_{13} + bF_4. \end{aligned}$$

Współczynniki a , b dane są wzorami:

$$a = \frac{G_2(R-r_1)}{G_1(r_2-R)+G_2(R-r_1)},$$

$$b = \frac{G_1(r_2 - R)}{G_1(r_2-R)+G_2(R-r_1)}.$$

5. Wnioski końcowe

W niniejszej pracy ograniczono się do przedstawienia równań algebraicznych przykładu liczbowego. Rozwiązanie tego typu równań należy przeprowadzać na maszynach cyfrowych. W pracy nie zajmowano się też problemami zbieżności i oszacowaniami rozwiązań przybliżonych; zagadnieniami tymi zajmujemy się w dalszych pracach.

LITERATURA

- [1] Muschieliszwilli N.I.: K zadacze kruczenija i izgiba brusiew sostawlennyh iz razlicznych materiałow. Izw.AN SSSR 1954.
- [2] Arutiunian N.Ch., Abramjan B.Ł.: Kruczenije uprugich tieł, Fizmatgiz 1963,
- [3] Wiekua I.N., Ruchadze A.K.: Kruczenije i izgib popieriecznoj siłoj brusa, sostawlennogo iz dwoch materiałow ograniczennyh konfokalnymi elipsami, Prikl.Mat. i Mech. 1,2 (1933), 167-178.
- [4] Czobanian K.S.: Primienienije funkcji napraženij w zadacze o kruczenii prizmatyczeskich stierżniej sostawlennyh iz razlicznych materiałow, Izv.AN SSSR, 2, 1955, 17-30.
- [5] Gonczariuk I.W.: Kruczenije prizmatyczeskich stierżniej sostawlennyh iz razlicznych materiałow, Wyczysl. i Prikl.Mat., 17,1972, 28-38.
- [6] Borkowski Sz.: a) Skręcanie prętów o przekroju wielospójnym przy uwzględnieniu nieliniowości fizycznej ośrodka, III Ogólnopolska Konf. Zast.Mat., Rzeszów-Polańczyk 1974, Materiały 31-33.
b) Wariacyjno-różnicowa metoda rozwiązywania zadań brzegowych ośrodków fizycznie nieliniowych, Zesz.Nauk.Pol.Sl. s. Mat-Fiz.(w druku).
- [7] Wójcik R.: Wariacyjno-różnicowa metoda rozwiązywania zadań brzegowych nieliniowej teorii skręcania prętów, Zesz.Nauk.Pol.Sl., Mat.-Fiz., w druku.
- [8] Bevilacqua L., Feijoo R., Rojas M.L.: A variational principle for the Laplace operator with application in the torsion of composite rods, Int.J.Solids and Structures, 10, 10 (1974), 1091-1102.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ПРОБЛЕМ ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ
СТЕРЖНЕЙ СОСТОЯЩИХ ИЗ РАЗНОЙ СРЕДЫ

Р е з ю м е

В работе для решения задачи применяется вариантный подход, эквивалентный краевой проблеме задания. Используя теорему о минимуме дополнительной энергии, применяется для минимализации основного функционала метод подчастей, что ведёт в основном к системе алгебраических уравнений метода.

NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS IN THE THEORY OF
BARIRON ROADS COMPOSED AF DIFFERENT MEDIA

S u m m a r y

In the paper for the solution of the problem a variational approach has been adopted. It is equivalent to the boundary problem of the task. Utilizing the assumption of the minimum complementary energy, there was used a method of subares to minimize the fundamental functional. This way leads in its final effect to the system of the algebraic equations method.