

Bohdan MOCHNACKI

Instytut Mechaniki Teoretycznej - Politechnika Śląska

Radosław GRZYMKOWSKI

Instytut Matematyki - Politechnika Śląska

O PEWNYCH PROBLEMACH APROKSYMACJI RÓŻNICOWEJ WARUNKÓW BRZEGOWYCH
PRZEPŁYWU CIEPŁA NA STYKU DWÓCH OŚRODKÓW

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę polepszenia dokładności modelu różnicowego w przypadku niestacjonarnego przepływu ciepła w ośrodku niejednorodnym przy znacznie różniących się właściwościach termofizycznych podobszarów.

1. Wstęp

Weryfikacja rozwiązań numerycznych (różnicowych) zadań z dziedziny przepływu ciepła w podobszarach niejednorodnych z danymi doświadczalnymi wykazała, że symulowany na EMC proces przebiega znacznie mniej intensywnie niż w rzeczywistości - szczególnie, gdy ze względów technicznych stosuje się niezbyt gęsty podział.

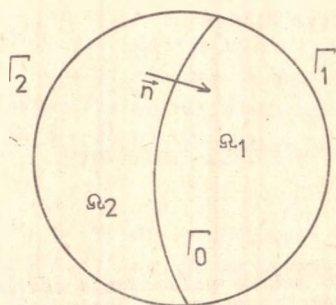
Przeprowadzona przez autorów analiza tego zjawiska doprowadziła do wniosku, że przyczyną małej dokładności modelu różnicowego jest aproksymacja pochodnej normalnej na brzegu podobszarów operatorem różnicowym Δ rzędu O_h . Okazało się jednak, że przybliżenie $\partial u / \partial n$ operatorami wielopunktowymi poprawia wynik stosunkowo nieznacznie.

Tematem artykułu jest pewien sposób przybliżania przebiegu funkcji U w pobliżu brzegu parabolą stopnia α i przedstawienie ulepszonej w ten sposób metody różnicowej obliczania niestacjonarnego pola temperatury w obszarze niejednorodnym.

2. Opis matematyczny i różnicowy model numeryczny procesu wymiany ciepła

Obszar Ω , w którym zachodzi proces przepływu ciepła, jest sumą dwóch podobszarów Ω_m $m = 1, 2$, których właściwości termofizyczne c_m , ρ_m , λ_m znacznie różnią się między sobą.

Rozpatrywany obszar ograniczony jest brzegiem $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, zaś kontur Γ_0 rozdziela podobszary Ω_1 i Ω_2 (rys. 1).



Rys. 1

Nieustalony przepływ ciepła w ww układzie opisuje układ równań różniczkowych Fouriera.

$$c_m \rho_m \frac{\partial U_m(X, t)}{\partial t} =$$

$$= \nabla \cdot \lambda_m \nabla U_m(X, t); \quad m=1, 2 \quad (1)$$

gdzie:

$c_m \rho_m \lambda_m$ - właściwe pojemności cieplne, gęstości i współczynniki przewodzenia w podobszarach Ω_m ,

$U_m(X, t)$ - pole temperatury, X - współrzędne, t - czas.

Równanie (1) uzupełniają warunki brzegowe:

$$\Gamma_m : A_m(X, t) \frac{\partial U_m(X, t)}{\partial n} + B_m(X, t) U_m(X, t) = C_m(X, t) \quad (2)$$

$$\Gamma_0 : \begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial U_1(X, t)}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial U_2(X, t)}{\partial n} \\ U_1(X, t) = U_2(X, t) \end{cases} \quad (3)$$

warunek początkowy:

$$U_m(X, 0) = U_{m0}(X), \quad m=1, 2, \quad (4)$$

oraz geometria układu:

$$\Gamma_m \{X : \varphi_m(X) = 0\} \quad m=0, 1, 2. \quad (5)$$

Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy $X = x^1, x^2$.

Aby rozwiązać w sposób przybliżony problem, obierzmy w obszarze Ω dyskretny zbiór punktów $V_{h,k}$, będących wierzchołkami prostokątów. Węzłem wewnętrznym obszaru siatkowego nazwiemy punkt $(P_i(x_i^1, x_j^2))$, $P_i \in \Omega_{h,k}$ - taki,

że węzły $(x_{i+1}^1, x_j^2) \dots (x_i^1, x_{j-1}^2)$ należą do tego samego podobzaru. Punkty nie będące węzłami wewnętrznymi tworzą zbiór węzłów brzegowych.

Wprowadzamy jeszcze dyskretny zbiór punktów t_Δ , gdzie $t \in (0, \infty)$ i t oznacza czas.

Funkcję określoną na zbiorze $V_{h,k} \times t_\Delta$ oznaczać będziemy $U(x_i^1, x_j^2, t_\Delta)$. W szczególności dla dwóch sąsiednich węzłów t wprowadzono oznaczenie

$$U(x_i^1, x_j^2, t_\Delta) = U_{ij}; \quad U(x_i^1, x_j^2, t_{\Delta+1}) = \bar{U}_{ij}. \quad (6)$$

Zgodnie z zasadą jawnych schematów różnicowych równania określające funkcję U w punktach wewnętrznych obszaru $\Omega_{h,k}$ można napisać w postaci:

$$\frac{U_{i,j} - U_{i,j}}{\Delta t} = \frac{1}{c_{ij} \varrho_{ij}} \nabla_{h,k} \cdot \lambda_{ij} \nabla_{hk} U_{ij}, \quad (7)$$

gdzie:

$c_{ij}, \varrho_{ij}, \lambda_{ij}$ - wartości stałych fizycznych w węzłach (x_i^1, x_j^2) ,

$\nabla_{h,k}$ - operator różnicowy odpowiadający operatorowi ∇ .

Przyjmując

$$\begin{aligned} \nabla_{hk} \cdot \lambda_{ij} \nabla_{hk} U_{ij} &= \frac{1}{h} [\bar{\lambda}_{i+1,j} \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} - \bar{\lambda}_{i-1,j} \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h}] + \\ &+ \frac{1}{k} [\bar{\lambda}_{i,j+1} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} - \bar{\lambda}_{i,j-1} \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{k}] \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$$\bar{\lambda}_{i+1,j} = \frac{2\lambda_{i+1,j}\lambda_{i,j}}{\lambda_{i+1,j} + \lambda_{i,j}} \dots \quad (9)$$

dochodzimy do równania liniowego:

$$c_{ij} \varrho_{ij} \frac{\bar{U}_{ij} - U_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{h} (\dot{q}_{i+1,j} + \dot{q}_{i-1,j}) + \frac{1}{k} (\dot{q}_{i,j+1} + \dot{q}_{i,j-1}) \quad (10)$$

gdzie:

$$\dot{q}_{i+1,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{0.5 h (\frac{1}{\lambda_{ij}} + \frac{1}{\lambda_{i+1,j}})} \quad (11)$$

można interpretować jako jednostkowy strumień ciepła przepływający między węzłami (x_i^1, x_j^2) , (x_{i+1}^1, x_j^2) itd. Mianownik w równaniu (11) jest oporem cieplnym na odcinku $h = x_{i+1}^1 - x_i^1$.

Równania (10) pozwalają na bezpośrednie wyznaczenie wartości U_{ij} w węzłach wewnętrznych:

$$\bar{U}_{ij} = A_{ij}^0 U_{ij} + A_{ij}^1 U_{i+1,j} + A_{ij}^2 U_{i-1,j} + A_{ij}^3 U_{i,j+1} + A_{ij}^4 U_{i,j-1} \quad (12)$$

przy czym dla zapewnienia stabilności rozwiązania musi być $A_{ij}^0 > 0$.

W klasycznej metodzie różnicowej pochodną na brzegu przybliża się wyrażeniem:

$$\frac{\partial U_m(X,t)}{\partial n} \sim \frac{U_{ij} - U_{i',j'}}{h} \cos \alpha_h + \frac{U_{i,j} - U_{i'',j''}}{k} \cos \alpha_k, \quad (13)$$

gdzie:

i', j', i'', j'' - indeksy węzłów sąsiadujących z brzegowym $(i, j) \in \Gamma_m$, które wykorzystano przy tworzeniu ilorazu, $\bar{n}[\cos \alpha_h, \cos \alpha_k]$.

Wykorzystanie (13) do aproksymacji warunków (8) prowadzi do równań liniowych uzupełniających równania (12).

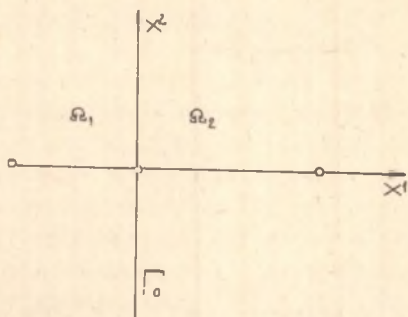
Przedstawiony wyżej schemat przybliżonego rozwiązania problemu przepływu ciepła w ośrodku niejednorodnym jest zbieżny i przy odpowiednio gęstym podziale różnicowym wystarczająco dokładny dla celów praktycznych.

Okazuje się jednak, że przy znacznie różniących się właściwościach termofizycznych podobszarów Ω_1 i Ω_2 rozwiązania numeryczne, nawet przy stosunkowo małych krokach siatek przestrzennych (ograniczenia wynikają tu przede wszystkim z pojemności pamięci operacyjnej użytej do obliczeń maszyny cyfrowej), znacznie różniły się od oczekiwanych na podstawie danych literaturowych i doświadczeń własnych przebiegów procesu przepływu ciepła. Podjęte wówczas próby zastosowania do aproksymacji pochodnej na brzegu Γ_0 operatorów wielopunktowych dały również wyniki niewiele odbiegające od uzyskanych poprzednio rozkładów pola temperatury.

W związku z powyższym autorzy niniejszego artykułu przyjęli metodę ulepszenia dokładności modelu różnicowego, polegającą na nieliniowej aproksymacji funkcji $U(X,t)$ między węzłami brzegowymi z sąsiadującymi z nimi węzłami wewnętrznymi podobszarów Ω_1 i Ω_2 .

3. Modelowanie warunku brzegowego na styku podobszarów

Niech punkty (x_{i-1}^1, x_j^2) , (x_{i+1}^1, x_j^2) będą węzłami siatki różnicowej sąsiadującymi z węzłem brzegowym (x_i^1, x_j^2) i $\bar{n}[1, 0]$.



Rys. 2

Rozkład temperatury w kierunku x^1 przyjmijmy w postaci:

$$\begin{aligned}
 U_1(x^1, t) &= U_1(x_{i-1}^1, x_j^2, t_\Delta) + a_1(x^1 + h_1)^{\alpha_1}; x^1 \in [x_{i-1}^1, x_i^1] \\
 U_2(x^1, t) &= U_2(x_{i+1}^1, x_j^2, t_\Delta) + a_2(x^1 - h_2)^{\alpha_2}; x^1 \in (x_i^1, x_{i+1}^1]
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Wykorzystując warunek brzegowy (3) : $x^1 = 0$ dochodzi się do równań:

$$U_{i-1,j} + a_1 h_1^{\alpha_1} = U_{i+1,j} + (-1)^{\alpha_2} h_2^{\alpha_2}
 \tag{15}$$

$$\bar{\lambda}_{i-1,j} a_1 h_1^{\alpha_1-1} = \bar{\lambda}_{i+1,j} a_2 (-1)^{\alpha_2-1} h_2^{\alpha_2-1}$$

Założmy dodatkowo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Eliminując z układu równań współczynniki a_1, a_2 dochodzimy do wzorów:

$$U_1(x^1, t) = U_{i-1,j} + \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{h_1^\alpha (1 + \frac{R_2}{R_1})} (x^1 + h_1)^\alpha
 \tag{16}$$

$$U_2(x^1, t) = U_{i+1,j} + \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{h_2^\alpha (1 + \frac{R_1}{R_2})} (x^1 - h_2)^\alpha (-1)^{\alpha-1},$$

gdzie:

$$R_m = \frac{h_m}{\lambda_m}, m=1,2 - \text{jest oporem cieplnym między węzłami } P_{i-1,j}, P_{i,j} \text{ lub } P_{i,j}, P_{i+1,j}$$

Wprowadzając analogicznie do (10) oznaczenie:

$$-\dot{q} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{R_1 + R_2} \quad (17)$$

dochodzimy do równania opisującego funkcję $U_1(x^1, t)$ w postaci:

$$U_1(x^1, t) = U_{i-1,j} - \dot{q} R_1 \left(1 + \frac{x^1}{h_1}\right)^\alpha, \quad (18)$$

skąd:

$$\left. \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial n} \right|_{\Gamma_0} = \left. \frac{d U_1(x^1, t)}{dx^1} \right|_{\Gamma_0} = -\dot{q} R_1 \alpha \frac{1}{h_1}. \quad (19)$$

Wynikający z przyjętej aproksymacji funkcji $U_1(x, t)$ strumień ciepła przepływający między węzłami $P_{i-1,j}$ i $P_{i,j}$ wynika z równania:

$$\dot{q}_\alpha = -\bar{\lambda}_{i-1,j} \left. \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial n} \right|_{\Gamma_0} = \dot{q} \alpha \quad (20)$$

Można łatwo wykazać, że przyjęcie $\alpha = 1$ jest jednoznaczne z realizacją modelu numerycznego omówionego w rozdziale poprzednim, zaś korekta $\alpha \neq 1$ prowadzi (por. wzór 10) do równań typu:

$$U_{ij} = A_{ij}^0 U_{ij} + A_{ij}^1 U_{i+1,j} + A_{ij}^2 U_{i-1,j} + \alpha A_{ij}^3 U_{i,j+1} + A_{ij}^4 U_{i,j-1}, \quad (21)$$

przy czym we wzorze (21) dla ustalenia uwagi przyjęto, że rozpatrywany węzeł wewnętrzny sąsiaduje z węzłem na brzegu Γ_0 , położonym na prawo od P_{ij} .

Wartości funkcji U na brzegu Γ_0 można obliczyć z równania (16a) lub (16b), z których dla $x = 0$:

$$U_1(0, t) = U_2(0, t) = \frac{U_{i+1,j} R_1 + U_{i-1,j} R_2}{R_1 + R_2}, \quad (22)$$

niezależnie od α , zaś współczynnik korygujący α występuje w równaniach typu (21) dla zbioru węzłów wewnętrznych, sąsiadujących z brzegowymi.

W zależności od konfiguracji (np. węzły narożne na Γ_0) może zachodzić potrzeba poprawiania większej liczby składników wzoru (21).

4. Oszacowanie współczynnika

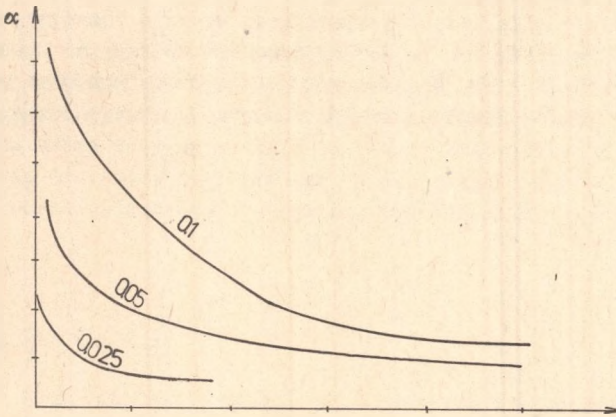
Jak wynika ze wzoru (20), współczynnik α jest stosunkiem rzeczywistej wartości jednostkowego strumienia ciepła przepływającego w punkcie (X, t) między obszarami Ω_1 i Ω_2 do wielkości strumienia ciepła obliczonego przy zastosowaniu operatora ΔU w siatce o kroku $\Delta x_1^1 = h_1$; $\Delta x_2^1 = h_2$.

Lokalna wartość współczynnika α jest funkcją czasu, właściwości termofizycznych podobszarów, odległości między węzłami w pobliżu brzegu.

Obliczenia stosunku $\dot{q}_\alpha : q$ polegały na porównaniu rozwiązania numerycznego z rozwiązaniem przybliżonym na bardzo gęstych siatkach lub z rozwiązaniem analitycznym (w przypadku ośrodków półnieskończonych z warunkiem IV rodzaju).

Dotychczasowe wyniki są dość fragmentaryczne i wykorzystano je przede wszystkim dla doraźnych potrzeb związanych z konkretnie rozwiązywanymi problemami.

Na rys. 3 przedstawiono przykładowo zależność $\alpha = \alpha(t)$ dla jednowymiarowego przepływu ciepła między stygnącym odlewem stalowym $U_1(X, 0) = 1500^\circ\text{C}$ a formą z masy CMS $U_2(X, 0) = 50^\circ\text{C}$ przy $h_1 = 0,05$ m, $h_2 = 0,025$; $0,05$; $0,1$ m [2].



Rys. 3

Pewne elementy pracy związane są z badaniami numerycznymi prowadzonymi w ramach problemu podstawowego, koordynowanego przez Instytut Odlewnictwa Politechniki Śląskiej

LITERATURA

- [1] Kozdoba N.I.: Nieliniejszyje problemy ciepłowodnosti, Moskwa 1975.
- [2] Model matematyczny procesu zasilania i krzepnięcia odlewu stożka wielkopięcowego. Sprawozdanie z pracy NB dla Huty Dzierżyńskiego w Dąbrowie Górniczej. Instytut Odlewnictwa, Gliwice, 1976.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ АПРОКСИМАЦИИ
КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ТЕЧЕНИЯ ТЕПЛА НА СТЫКЕ ДВУХ СРЕД

R e z y m e

В работе представлен метод улучшения точности дифференциального модели в случае нестационарного течения тепла в неоднородной среде при значительно отличающихся теплофизических качествах подобластей.

ABOUT SOME DIFFERENTIAL APPROXIMATION PROBLEMS OF BOUNDARY
HEAT TRANSFER CONDITIONS AT THE TWO MEDIA CONTACT

S u m m a r y

In the paper a method has been presented to improve the differential model precision in case of a non-stationary heat transfer in a heterogeneous medium, when the thermophysical subareas differ greatly in their properties.