ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: Matematyka-Fizyka z. 29 Nr kol. 559

Jerzy KLAMKA

Instytut Automatyki Przemysłowej i Pomiarów -
Politechnika Śląska

Lesław SOCHA

Instytut Mechaniki Teoretycznej -
Politechnika Śląska

STEROWALNOŚĆ STOCHASTYCZNA NIELINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono zagadnienie -sterowalności stochastycznej dla liniowych i nieliniowych układów dynamicznych. Korzystając z metody stochastycznej funkcji Lapunowa podano warunki wystarczające sterowalności stochastycznej. Otrzymane w pracy wyniki zilustrowano prostym przykładem.

Wstęp

Jednym z podstawowych problemów teorii sterowania jest zagadnienie sterowalności układów dynamicznych. Przy rozwiązywaniu tego zagadnienia w deterministycznej teorii posługiwano się różnymi metodami, między innymi w roku 1971 Gershwin i Jacobson w swoim artykule [1] do badania sterowalności układów nieliniowych wykorzystali metodę funkcji Lapunowa. Metoda ta i wyniki przez nich uzyskane pozwoliły grupie japońskich badaczy na uogólnienie zagadnienia na układy opisane stochastycznymi równaniami Ito [2], [3].

W niniejszym artykule będziemy się zajmowali badaniem sterowalności stochastycznej układów nieliniowych opisanych stochastycznymi równaniami Ito-Gichmana. Otrzymane wyniki są uogólnieniem wyników zamieszczonych w [2] i [3].

Postawienie problemu

Będziemy rozpatrywać układy dynamiczne, na które działają procesy stochastycznie ciągłe o przyrostach niezależnych.

Ponieważ każdy stochastycznie ciągły proces $\xi(t,\omega)$ o przyrostach niezależnych, można przedstawić w postaci sumy continuum niezależnych procesów Poissona skokowych i procesu Wienera. Można to zapisać w sposób następujący:

$$\xi(t) = \xi_w(t) + \int\limits_{\|x\|<1} x\,\tilde{\vartheta}(t, dx) + \int\limits_{\|x\|>1} x\,\vartheta(t, dz),$$

gdzie:

$\vartheta[t,A]$ jest miarą Poissona, której rozkład prawdopodobieństwa jest określony wzorem:

$$P\{\vartheta[t,A] = k\} = \frac{\left(\int\limits_0^t \pi(t,A)dt\right)^k}{k!} \exp\left[-\int\limits_0^t \pi(t,A)dt\right],$$

gdzie $\pi(t,A)$ jest pewną miarą nielosową, spełniającą warunek $\int\limits_0^t \pi(t,A)dt < \infty$ dla każdego T 0 oraz dla każdego zbioru A nie zawierającego w sobie $\{0\} \in R^n$,

$$\tilde{\vartheta}(t,A) = \vartheta(t,A) - \int\limits_0^t \pi(t,A)dt$$

ξ_w - proces wienerowski niezależny od miary ϑ.

W związku z tym w dalszej części pracy będziemy się posługiwać formułą Ito-Gichmana.

$$dx(t) = f(t,x(t), u(t,x))dt + G(t,x(t))dw(t) + \int\limits_{R^n} \gamma(t,x(t),v)\tilde{\vartheta}(dt,dv), \tag{1}$$

gdzie:

$f(t,x(t), u(t,x(t)))$, $G(t,x(t))$, $\gamma(t,x(t),v)$ - są funkcjami deterministycznymi,

f, γ - przyjmują wartości z E^n, $t\in[0,T]$, $x\in E^n$, $v\in E^n$,

G - jest macierzą nxp,

$u(t,\cdot)$ - jest wektorem sterowania m - wymiarowym o wartościach z przestrzeni E^m $(m \leq n)$,

$w(t)$ - jest p-wymiarowym procesem Wienera,

$\tilde{\vartheta}(t,A) = \vartheta(t,A) - t\pi(A)$,

$\vartheta(t,A)$ - jest miarą Poissona w E^n,

$$E\vartheta(t,A) = t\pi(A),$$

proces $w(t)$ i miara $\vartheta(t,A)$ są niezależne.

W dalszej części pracy będziemy zakładać, że spełnione są założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań [4].

Definicja

Mówimy, że stan początkowy x_0 układu 1 jest stochastycznie ε-sterowalny z prawdopodobieństwem ϱ w sensie normy kwadratowej względem określonego zbioru docelowego z normą $\sqrt{\varepsilon}$ w przedziale czasowym $[0, t_1]$, jeśli istnieje sterowanie u(t,x) takie, że:

$$P\left\{\|x(t_1)\|^2 \geqslant \varepsilon \;\middle|\; x(0) = x_0\right\} \leqslant 1 - \varrho, \tag{2}$$

gdzie: $0<\varrho<1$, $\|\cdot\|$ - norma w E^n.

W rozważaniach naszych będziemy się posługiwać funkcją V(t,x), która ma ciągłe pochodne względem czasu $t\in[0,+\infty)$ i ciągłe pierwsze i drugie pochodne względem współrzędnych przestrzennych $x \in R^n$, gdzie $x = x(t)$ jest rozwiązaniem równania stochastycznego (1).

Korzystając z formuły Ito - Gichmana [4] możemy wprowadzić operator różniczkowy L(.), który działa na funkcję V(t,x) w sposób następujący:

$$L\,V = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(t,x,u) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[G^T(t,x)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right)^T \cdot\right.$$

$$\left. \cdot\, G(t,x)\right] + \int_{R^n} \left\{V[t, x + \gamma(t,x,v)] - V(t,x) - \frac{\partial V}{\partial x}\gamma(t,x,v)\right\} \pi(dv). \tag{3}$$

Główne wyniki

Twierdzenie 1

Stan początkowy x_0 układu (1) jest stochastycznie ε - sterowalny z prawdopodobieństwem ϱ w sensie normy kwadratowej ze względu na stan końcowy w przedziale czasu $[0, t_1]$, jeśli spełnione są następujące warunki:

I) Funkcja skalarna V(t,x) posiada ograniczone i ciągłe pierwszą i drugą pochodną względem $x\in E^n$ oraz pierwszą pochodną względem t, $t \neq t_1$.

II) $$V(t_1,x) > \frac{1}{\alpha}\, x^T(t_1)\, x(t_1)$$

III) Istnieje takie sterowanie u(t,x), że wzdłuż trajektorii układu (1) zachodzi nierówność:

$$L(V) \leqslant 0,$$

gdzie L(V) jest określone wzorem (3).

IV) Dla dowolnego warunku początkowego spełniona jest nierówność:

$$V(t_0,x_0) \leqslant (1-\varrho)\,\frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Dowód

Prawdziwość tezy wykazuje się w sposób analogiczny jak w twierdzeniu 1 [2]. Korzysta się z nierówności Czebyszewa oraz warunku III i podobnie jak to było pokazane w [5] otrzymuje się nierówność:

$$P\left\{\sup_{t_0\leqslant t\leqslant\infty} V(t,x)\geqslant\varepsilon \,|\, x(0)=x_0\right\}\leqslant\frac{V(t_0,x_0)}{\varepsilon},\quad (t_0=0), \tag{4}$$

korzystając z własności prawdopodobieństwa

$$P\left\{\sup_{t_1\leqslant t\leqslant\infty} V(t,x)\geqslant\varepsilon \,|\, x(0)=x_0\right\}\leqslant P\left\{\sup_{t_0\leqslant t\leqslant\infty} V(t,x)\geqslant\varepsilon \,|\, x(0)=x_0\right\}\leqslant\frac{V(t_0,x_0)}{\varepsilon} \tag{5}$$

z warunku (I) i (II) otrzymujemy:

$$P\left\{\|x(t_1)\|^2\geqslant\varepsilon \,|\, x(0)=x_0\right\}\leqslant\frac{\alpha}{\varepsilon}V(t_0,x_0)\leqslant 1-\varrho \qquad \text{c.b.d.c.} \tag{6}$$

Zajmiemy się obecnie badaniem sterowalności układu liniowego opisanego następującym równaniem:

$$dx(t)=F(t)x(t)dt+C(t)u(t,x)dt+x(t)\sigma(t)dw(t)+\int_{R^n}D(t)x(t)\tilde{\nu}(dt\,dv) \tag{7}$$

gdzie: F C, D są macierzami odpowiednio o wymiarach $n\times n$, $n\times m$, $n\times n$ oraz $\sigma(t)$ jest p-wymiarowym wierszowym wektorem, ponadto

$$\int_{R^n}\pi(du)=\lambda=\text{const.}$$

Podamy teraz warunki wystarczające sterowalności stochastycznej układu liniowego (7).

Twierdzenie 2

Stan początkowy x_0 układu (1) jest stochastycznie -sterowalny z prawdopodobieństwem ϱ w sensie normy kwadratowej ze względu na stan końcowy w przedziale czasu $[0, t_1]$, jeśli spełnione są warunki (I) i (IV) twierdzenia 1 oraz następujący warunek:

V) Istnieje ograniczona symetryczna i dodatnio zdefiniowana macierz $S(t)$ dla $t\in[0, t_1]$ spełniająca warunek:

$$\frac{d\,S(t)}{dt}+S(t)F(t)+F^T(t)S(t)-S(t)C(t)C^T(t)S(t)+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\sigma^T(t)\,\sigma(t)\right\}S(t)+$$
$$+\lambda D^T(t)\,S(t)D(t)=0, \tag{8}$$

z warunkiem końcowym:

$$S(t_1) = \frac{I}{\alpha}. \tag{9}$$

Dowód

Przyjmując funkcję $V(t,x)$ o postaci:

$$V(t,x) = x^T S(t)x \tag{10}$$

oraz sterowanie

$$u(t,x) = -\frac{1}{2} C^T(t)\, S(t)x \tag{11}$$

i korzystając z (2) i (7) otrzymujemy:

$$L(V) = x^T \Big\{ \frac{d\,S(t)}{dt} + F^T(t)S(t) + S(t)F(t) - S(t)C(t)C^T(t)S(t) + \frac{1}{2}\, tr\Big\{ \sigma^T(t)\sigma(t) \Big\} S(t) + \lambda D^T(t)S(t)D(t) \Big\}\, x = 0. \tag{12}$$

Stąd oraz z założenia (V) otrzymujemy:

$$L\,V \leqslant 0.$$

Wykorzystując warunek (9) otrzymujemy tezę twierdzenia.

c.b.d.o.

Przykład

Rozważmy równanie skalarne:

$$dx(t) = F\,x(t)dt + C\,u(t,x)dt + x(t)dw(t) + \int_{-\infty}^{\infty} D\,x(t)\,\tilde{\nu}(dt,dv),$$

gdzie F, C, σ, D są liczbami rzeczywistymi

$\tilde{\nu}(t,A) = 0$, jeżeli $\{1\} \not\subset A$

$$t\pi(A) = \begin{cases} \lambda t, & \text{jeśli } \{1\} \subset A \\ 0, & \text{jeśli } \{1\} \not\subset A. \end{cases}$$

Korzystając z równania Rikatiego (8) otrzymujemy następujący warunek:

$$\frac{dS(t)}{dt} + 2\,F\,S(t) + C^2\,S^2(t) + \sigma^2\,S(t) + \lambda D^2\,S(t) = 0 \qquad S(t_1) = \frac{1}{\alpha}.$$

Rozwiązanie tego równania ma następującą postać:

$$S(t) = \frac{1}{(\alpha+\frac{B}{A})\exp A(t-t_1) - \frac{B}{A}},$$

gdzie:

$A = 2F + \sigma^2 + \lambda D^2,$

$B = C^2.$

Definiując ϱ przez:

$$\varrho = P\left\{\|x(t_1)\|^2 < \varepsilon \mid x(0) = x_0\right\}$$

i korzystając z warunku IV otrzymujemy:

$$\varrho_{max} = 1 - \frac{\alpha}{\varepsilon} x_0^T S(0) x_0$$

$$\varrho_{max} = 1 - \frac{\alpha}{\varepsilon} x_0^2 \frac{1}{(\alpha+\frac{B}{A})\exp(-A t_1) - \frac{B}{A}}.$$

Twierdzenie 2 można rozszerzyć na następującą klasę układów nieliniowych:

$$dx(t) = F(t)x(t)dt + h(t,x)dt + C(t)u(t,x)dt + x(t)\sigma(t)dw(t) +$$

$$+ \int_{E^n} D(t)\, x(t)\tilde{\nu}(dt,dv), \tag{13}$$

gdzie $h(t,x)$ jest n-wymiarową nieliniową funkcją wektorową. Wówczas, aby teza twierdzenia 2 została spełniona, musi dodatkowo zachodzić warunek:

VI) Nieliniowa funkcja $h(t,x)$ istnieje i spełnia warunek

$$C(t)\, q(t,x) + h(t,x) = - p(x)R(t)x,$$

gdzie:

$q(t\ x)$ - jest m-wymiarową funkcją wektorową deterministyczną, zadaną w przedziale czasowym $[0,\ t_1]$.

$p(x)$ - jest nieujemną deterministyczną funkcją skalarną;

$R(t)$ - jest macierzą $n \cdot n$ taką, że $SR + R^TS$ jest dodatnio określona.

Dowód tego twierdzenia wynika natychmiast, przyjmując bowiem

$$u(t,x) = \frac{1}{2} C^T(t)S(t)x + q(t,x)$$

oraz V(t,x) tak jak w poprzednich twierdzeniach otrzymujemy:

$$L\,V(t,x) = x^T\left\{\frac{d\,S(t)}{dt} + F^T(t)S(t) + S(t)F(t) - S(t)C(t)C^T(t)S(t) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{tr}\left\{\sigma^T(t)\sigma(t)\right\} S(t) + \lambda D^T(t)S(t)D(t)\right\} x + 2\,x^T\,S(t)$$

$$\cdot \left[C(t)q(t,x) + h(t,x)\right], \qquad (14)$$

stosując warunek VI otrzymujemy:

$$L\,V(t,x) = -\,p(x)\,x^T\left\{S(t)R(t) + R^T(t)S(t)\right\}\,x \leqslant 0,$$

z czego wynika teza twierdzenia.

Uwagi ogólne i wnioski

W celu wyznaczenia zależności funkcyjnej między wielkościami ϱ_{max}, α, ε, t_1 dla danego układu możemy posłużyć się następującą procedurą [2].

1. Dany jest stan początkowy i obszar docelowy określony liczbą ε oraz czas końcowy t_1.
2. Rozwiązujemy równanie Ricatiego z warunkiem końcowym $S(t_1) = \frac{I}{\alpha}$ i znajdujemy wartość początkową S(0).
3. Wyliczamy ϱ z równości powyżej i rysujemy zależności między ϱ i α z wartością t_1 jako parametr.

Warto podkreślić, że chociaż metody dowodzenia twierdzeń są podobne do metod stosowanych w [2] i [3], jednak rozważana klasa układów dynamicznych jest szersza.

Zauważmy, że w podobny sposób można podać kryteria sterowalności stochastycznej z prawdopodobieństwem 1.

LITERATURA

[1] Gershwin S.B., Jacobson D.H.: A controllability theory for nonlinear systems, I.E.E.E. vol. AC-16 Nr 1, 1971.

[2] Sunahara Y., Kabeucki T., Asada Y., Aihara S., Kishino K.: On Stochastic Controllability for nonlinear systems, I.E.E.E. vol AC-19, 1974.

[3] Sunahara Y., Aihara S., Kishino K.: On the stochastic observability and controllability for nonlinears systems. International Journal of Control vol 22, Nr 1, 1975.

[4] Gihman I.I., Skorohod A.V.: Stochastic differential equations, Springer-Verlag, vol. 72, Berlin 1972.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Р е з ю м е

В работе представлены вопросы - стохастического управления для линейных и нелинейных динамических систем. Используя метод стохастической функции Ляпунова, приводятся достаточные условия стохастического управления. Полученные в работе результаты проиллюстрированы простым примером.

STOCHASTIC CONTROLLABILITY OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

S u m m a r y

The stochastic - controllability of continous nonlinear stochastic dynamical systems is considered. Using a stochastic Lyapunov - like approach, the sufficient conditions for stochastic - controllability are formulated. Finally a simple example of stochastic - controllable systems is ilso presented.

Praca wpłynęła do Redakcji
w październiku 1976 r.