ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: Matematyka-Fizyka z. 29 Nr kol. 559

Bogdan SKALMIERSKI

PROBLEMY PRZEWYŻSZANIA W UKŁADACH DYNAMICZNYCH

Streszczenie. W pracy przedyskutowano problem przenoszenia się łącznych gęstości procesu wielowymiarowego oraz jego pochodnej przez układ liniowy. Omówiono dwa zagadnienia: (i) - gdy proces wejściowy jest normalny; oraz (ii) - gdy wejściowy proces odbiega od normalnego. W celu zrealizowania postawionych zadań ustalono ogólne związki pomiędzy korelacjami dowolnego rzędu wejścia i wyjścia układu. Podano również ogólne związki wiążące momenty oraz quasimomenty z korelacjami.

Wstęp

Niniejsza praca jest kontynuacją mojego artykułu [5] w zeszycie poprzednim, zawierającym prace Instytutu Mechaniki Teoretycznej pt.: "Wielowymiarowe zagadnienia przewyższania".

Przypomnę, że przedstawiony problem dotyczył konstrukcji procesów $\eta^+(t_0,T)$ oraz $\eta^-(t_0,T)$ oznaczających przypadkową liczbę wyjść lub wejść wielowymiarowego procesu różniczkowalnego $\xi^i(t,\omega)$ do obszaru D. Sam obszar był ograniczony hiperpowierzchniami w przestrzeni konfiguracyjnej o równaniach:

$$\Phi_r(q^1,\dots,q^N,t) = 0 \quad (r=1,\dots,L) \tag{0.1}$$

$$D = \left\{ q^i : \Phi_r(q^1,\dots,q^N,t) \leq 0 \right\} \tag{0.1a}$$

Konstrukcja procesów $\eta^+(t_0, T)$ oraz $\eta^-(t_0,T)$ była możliwa dzięki wprowadzeniu nowego procesu

$$\tilde{\Phi}_r = \Phi_r(\xi^1(t,\omega),\dots,\xi^N(t,\omega),t) \tag{0.2}$$

jak również wykorzystaniu pewnych własności dystrybucji Heaviside'a i Dirace. Okazało się przy tym, że dla określenia średnich wartości przypadkowej liczby wyjść lub wejść do obszaru D potrzebna jest znajomość gęstości rozkładów prawdopodobieństwa.

$$\varepsilon_{\xi^1,\dots,\xi^N,\dot{\xi}^1,\dots,\dot{\xi}^N}(x^1,\dots,x^N,\dot{x}^1,\dots,\dot{x}^N,t), \tag{0.3}$$

W niniejszym opracowaniu zastanowimy się, jak można określić rozkłady gęstości (0.3) procesów będących reakcją układu dynamicznego na zakłócenie stochastyczne o znanej charakterystyce statystycznej.

Rozważania przeprowadzimy w dwóch etapach; dyskutując zagadnienie układów liniowych zakłócanych procesami normalnymi oraz problemów układów liniowych pod wpływem dowolnych procesów stochastycznych.

1. Układy liniowe pod wpływem procesów normalnych

Weźmiemy układy dynamiczne o zdeterminowanych parametrach strukturalnych [3, 4], dla których zakłócenie stochastyczne z reakcją związane są następującym układem równań różniczkowych:

$$\sum_{k=1}^{N} (a_{ik}\ddot{q}^k + h_{ik}\dot{q}^k + c_{ik}q^k) = Q_i(t), \tag{1.1}$$

gdzie a_{ik}, b_{ik} oraz c_{ik} są macierzami o współczynnikach stałych, q^k wektor "odpowiedzi" układu, natomiast $Q_i(t)$ - przypadkowy wektor zakłóceń.

Problem ten można rozszerzyć przez wprowadzenie ogólniejszych równań niż (1.1), tzn. przyjmując związki pomiędzy "wejściem" $Q_i(t)$ oraz "wyjściem" $q^k(t)$, np. w postaci:

$$\sum_{k=1}^{N} L_{ik}^{(1)} q^k = \sum_{k=1}^{N} L_i^{(2)k} Q_k(t), \tag{1.2}$$

gdzie: $L_{ik}^{(1)}$ oraz $L_i^{(2)k}$ są liniowymi operatorami różniczkowo-całkowymi. Układ (1.2) może opisywać nie tylko układy mechaniczne - nadaje się on również w przypadku układów elektrycznych, elektromechanicznych, hydraulicznych i innych.

Rozwiązanie układu (1.2) posiada budowę:

$$q^k(t) = \int_{-\infty}^{t} \sum_{i=1}^{N} G^{ki}(t-\tau)Q_i(\tau)d\tau; \tag{1.3}$$

założymy przy tym: (i) że proces wejściowy $Q_i(t)$ jest mierzalny $(t \in R)$ procesem drugiego rzędu (posiada skończoną wariancję) o danej macierzy korelacyjnej $K_{ik(Q)}(t_1,t_2)$, (ii) - macierz $K_{ik(Q)}(t,t)$ jest całkowalna względem t, w każdym skończonym przedziale (a,b), (iii) - impulsowa macierz przejściowa $G^{ki}(t)$ jest całkowalna z kwadratem na każdym skończonym przedziale [a, b]

$$\bigwedge_{i,k} G^{ik}(t) \in L^2[a,b].$$

Przy spełnieniu założeń (i) - (iii) istnieje proces wyjściowy $q^k(t)$ i ma dobrze określoną macierz korelacyjną. Proces $q^k(t)$, określony wzorem (1.3), jest różniczkowalny. Jeśli proces $Q_i(t)$ jest normalny, to również proces "wyjściowy" $q^k(t)$ jest normalny (układ liniowy). Przypadek procesów normalnych pozwala na badanie przewyższeń w sposób stosunkowo prosty. Korelacje procesu wyjściowego są wynikiem działania operatora liniowego na macierze korelacyjne procesu "wejściowego". Bardziej szczegółowe rozważania na ten temat znajdą się w dalszych częściach artykułu.

Srednie $q^k(t)$ oraz macierz korelacyjną drugiego rzędu $k_q^{mn}(t_1,t_2)$ określają wzory [4].

$$\langle q^k(t)\rangle = \int_{-\infty}^{t} G^{ki}(t-\tau)\langle Q_i(\tau)\rangle d\tau, \tag{1.4}$$

$$k_{(q)}^{mn}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} G^{mk}(t_1-\tau_1)G^{nl}(t_2-\tau_2)k_{kl(Q)}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \tag{1.5}$$

Ze względu na normalność procesu $Q_i(t)$ wyższe korelacje znikają. Zauważmy, że średnie (1.4) oraz korelacje (1.5) wystarczą do określenia średnich pochodnej $\dot{q}^k(t)$ oraz korelacji pomiędzy procesami $q^k(t)$ oraz $\dot{q}^k(t)$. Naszym zadaniem będzie określenie łącznej gęstości prawdopodobieństwa $g_{q^1,\ldots,q^N,\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^N}(x^1,\ldots,x^N,\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^N,t)$ potrzebnej do rozstrzygania problemu przekroczenia granic obszaru D przez proces $q^k(t)$.

Przenumerowując zmienne napiszemy:

$$\dot{q}^i = q^{i+N}$$

oraz

$$\dot{x}^i = x^{i+N};$$

zatem będziemy poszukiwali gęstości:

$$g_{q^1,\ldots,q^{2N}}(x^1,\ldots,x^{2N},t).$$

Utwórzmy macierz korelacyjną wektora losowego $[q^1,\dots,q^{2N}]$,

$$[k^{ik}_{(q)}(t_1, t_2)] =$$

$$\begin{bmatrix} k^{11}_{(q)}(t_1, t_2),\dots,k^{1N}_{(q)}(t_1,t_2), & \frac{\partial k^{11}_{(q)}(t_1, t_2)}{\partial t_2},\dots, & \frac{\partial k^{1N}_{(q)}(t_1,t_2)}{\partial t_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k^{N1}_{(q)}(t_1, t_2),\dots,k^{NN}_{(q)}(t_1,t_2), & \frac{\partial k^{N,N+1}_{(q)}(t_1, t_2)}{\partial t_2},\dots, & \frac{\partial k^{N\,N}_{(q)}(t_1,t_2)}{\partial t_2} \\ \frac{\partial k(q)^{1\,1}(t_1,t_2)}{\partial t_1},\dots, & \frac{\partial k(q)^{1N}(t_1,t_2)}{\partial t_1}, & \frac{\partial^2 k^{11}_{(q)}(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}, \frac{\partial^2 k^{N}_{(q)}(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2} \\ \frac{\partial k^{N\,1}_{(q)}(t_1,t_2)}{\partial t_1},\dots, & \frac{k^{N\,1}_{(q)}(t_1,t_2)}{\partial t_1},\dots, & \frac{\partial^2 k^{N\,1}_{(q)}(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}, \frac{\partial^2 k^{N\,N}_{(q)}(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Tworzenie macierzy (1.6) jest możliwe ze względu na znajomość macierzy (1.5).

Obecnie konstruujemy funkcję charakterystyczną $\Theta_{(q)}(u_1,\dots,u_{2N}/t)$ procesu q (t)

$$\Theta_{(q)}(u_1,\dots,u_{2N}/t) =$$

$$= \exp\left\{ i \sum_{\alpha=1}^{2N} \langle q^{\alpha}(t)\rangle u_{\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2n} k^{\alpha\beta}_{(q)}(t,t) u_{\alpha} u_{\beta} \right\}. \tag{1.7}$$

Gęstość określimy przez wykonanie odwrotnej transformacji Fouriera na funkcji charakterystycznej [2].

$$g_{q^1,\dots,q^{2N}}(x^1,\dots,x^{2N}/t) = \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{(q)}(u_1,\dots,u_{2N}/t) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(- i \sum_{\alpha=1}^{2N} x^{\alpha} u_{\alpha}\right) du_1,\dots,du_{2N}. \tag{1.8}$$

Podstawiając (1.7) do (1.8) napiszemy:

$$g_{q^1,\dots,q^{2N}}(x^1,\dots,x^{2N}/t) = \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{- i \sum_{\alpha=1}^{2N} (x^\alpha - \langle q^\alpha(t)\rangle)\, u_\alpha - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2N} k^{\alpha\beta}_{(q)}(t,t) \times\right.$$

$$\left.\times\, u_\alpha\, u_\beta\right\} du_1,\dots du_{2N}. \tag{1.8a}$$

Dokonujemy podstawienia

$$y^\alpha = x^\alpha - \langle q^\alpha(t)\rangle. \tag{1.9}$$

$$u_\alpha = \sum_{\nu=1}^{2N} c_{\alpha\nu} h^\nu, \tag{1.10}$$

gdzie macierz $[c_{\alpha\nu}]$ jest tak dobrana, ażeby forma kwadratowa

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2N} k^{\alpha\beta}_{(q)}(t,t) u_\alpha\, u_\beta$$

przeszła w sumę kwadratów, tzn.:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2N} k^{\alpha\beta}_{(q)}(t,t) u_\alpha\, u_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2N} k^{\alpha\beta}_{(q)}(t,t) c_{\alpha\nu} c_{\beta\mu} h^\nu\, h^\nu =$$

$$= \sum_{\mu,\nu=1}^{2N} \lambda_\mu \delta_{\mu\nu} h^\nu\, h^\mu = \sum_{\nu=1}^{2N} \lambda_\nu (h^\nu)^2. \tag{1.11}$$

Takie przekształcenie formy kwadratowej występującej w (1.8a) umożliwi zmianę całki wielokwadratowej na iloczyn całek. Na podstawie (1.11) widzimy, że:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2N} k^{\alpha\beta}_{(q)}(t,t)\, c_{\alpha\nu}\, c_{\beta\mu} = \lambda_\mu \delta_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} \tag{1.12}$$

gdzie $\delta_{\mu\nu}$ jest δ - Kroneckera.

Przekształcenie macierzy $\left[k^{\alpha\beta}_{(q)}(t,t)\right]$ za pomocą macierzy $\left[c_{\alpha\vartheta}\right]$ będziemy poszukiwali zakładając, iż:

$$\left[c_{\alpha\vartheta}\right] = \left[c^{-1}_{\vartheta\alpha}\right]. \tag{1.13}$$

Wówczas równanie (1.12) można zapisać w postaci macierzowej, jak następuje:

$$C^{-1} K\, C = D. \tag{1.14}$$

Wiadomo, że przekształcenie (1.14) prowadzi do zamierzonego celu. Przedstawienie (1.9) i (1.10) do (1.8a) daje:

$$g_{q^1,\dots,q^{2N}}(x^1,\dots,x^{2N}|t) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[- i \sum_{\alpha,\vartheta=1}^{2N} y^{\alpha} c_{\alpha\vartheta} h^{\vartheta} -$$

$$- \sum_{\alpha,\beta,\mu,\vartheta=1}^{2N} k^{\alpha\beta}_{(q)}(t,t) c_{\alpha\vartheta} c_{\beta\mu} h^{\vartheta} h^{\mu}\Big] \det\left[c_{ik}\right] dh^1\dots dh^{2N} \quad . \tag{1.15}$$

Możemy tak dobrać macierz c_{ik}, ażeby $\det\left[c_{ik}\right] = 1$, podstawiając

$$z_{\vartheta} = \sum_{\alpha=1}^{2N} y^{\alpha} c_{\alpha\vartheta} \tag{1.14}$$

oraz uwzględniając (1.12) w (1.15) napiszemy:

$$g_{q^1,\dots,q^{2N}}(x^1,\dots,x^{2N}/t) = \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[- i \sum_{\vartheta=1}^{2N} z_{\vartheta} h^{\vartheta} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\vartheta=1}^{2N} \lambda_{\vartheta} (h^{\vartheta})^2 \Big] dh^1\dots dh^{2N} =$$

$$\prod_{\vartheta=1}^{2N} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[- \frac{1}{2}\Big(\sqrt{\lambda_{\vartheta}} h^{\vartheta} + i \frac{z_{\vartheta}}{\sqrt{\lambda_{\vartheta}}}\Big)^2\Big] d(\sqrt{\lambda_{\vartheta}}\, h) \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\vartheta}}} \exp\Big(- \frac{z^2_{\vartheta}}{2\lambda_{\vartheta}}\Big) =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{2N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}} \exp\left(-\frac{z_\nu^2}{2\lambda_\nu}\right) = \frac{1}{(2\pi)^N \prod_{\nu=1}^{2N}\sqrt{\lambda_\nu}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{2N}\frac{z_\nu^2}{\lambda_\nu}\right).$$

Zauważmy, że:

$$\prod_{\nu=1}^{2N} \lambda_\nu = \det\left[k_q^{\alpha\beta}(t,t)\right]$$

natomiast

$$\sum_{\nu=1}^{2N} \frac{z^2}{\lambda_\nu} = \sum_{\mu,\nu=1}^{2N} D_{\mu\nu}^{-1} z_\mu z_\nu = \sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta=1}^{2N} D_{\mu\nu}^{-1} c_{\alpha\mu} y^\alpha c_{\beta\nu} y^\beta =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{2N} k_{(q)\alpha\beta}^{-1} y^\alpha y^\beta$$

gdzie macierze $\left[D_{\mu\nu}^{-1}\right]$ oraz $\left[k_{(q)\alpha\beta}^{-1}\right]$ są macierzami odwrotnymi do $\left[D_{\mu\nu}\right]$ oraz $\left[k_q^{\alpha\beta}\right]$.

Ostatecznie:

$$g_{q^1,\ldots,q^{2N}}(x^1,\ldots,x^{2N}/t) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^N \sqrt{\det\left[k_{(q)}^{\alpha\beta}(t,t)\right]}} = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2N} k_{(q)\alpha\beta}^{-1}(t,t)\left(x^\alpha - \langle q^\alpha(t)\rangle\right)\left(x^\beta - \langle q^\beta(t)\rangle\right)\right]. \tag{1.15}$$

Wzór (1.15) odpowiada na pytanie, jak określić łączną gęstość procesu wielowymiarowego z jego pochodnymi czasowymi, będącego reakcją układu liniowego w wielu stopniach swobody na wielowymiarowy proces normalny.

2. Układy liniowe pod wpływem dowolnych procesów stochastycznych

Obecnie przejdziemy do ogólniejszego przypadku przyjmując, że na "wejściu" układu liniowego działa dowolny proces wielowymiarowy. Wówczas jego funkcja będzie zawierała wyższe korelacje od koleracji rzędu drugiego. Funkcja charakterystyczna pobudzeń układu ("wejście") w tak ogólnym przypadku wyrazi się wzorem:

$$\theta_{(Q)}(u_1,\dots,u_N) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} m_{(Q)}{}^{j_1\dots j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s}, \quad (2.1)$$

gdzie:

$$m_{(Q)j_1,\dots,j_s} = \left\langle \prod_{k=1}^{s} Q_{j_k} \right\rangle \quad (2.1a)$$

przy czym dla ustalonego k wskaźnik j_k przyjmuje wartości $(1,\dots,N)$.

$$m_{(Q)j_1,\dots,j_s}$$

jest momentem rzędu s.

Widać ze wzoru (2.1), że funkcję charakterystyczną określają momenty. Można również funkcję charakterystyczną wyrazić poprzez korelacje związkiem:

$$\theta_{(Q)}(u_1,\dots,u_N) = \exp \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} k_{(Q)j_1,\dots,j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s}. \quad (2.2)$$

gdzie: $k_{(Q)j_1,\dots,j_s}$ są korelacjami rzędu s.

W poprzednim przypadku, gdy rozważaliśmy rozkłady Gaussa (wzór 1.7) lewa strona (2.2) redukowała się, gdyż s przebiegało wartości 1 i 2.

Zanim przejdziemy do zasadniczych rozważań, zastanowimy się nad problemem określenia związków pomiędzy korelacjami i momentami. Umiejętność znajdowania tych związków w przyszłych naszych rozważaniach okaże się korzystne.

Porównujemy zatem prawe strony (2.1) i (2.2), a następnie je zlogarytmujemy.

Wówczas:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} k_{j_1,\dots,j_s} u_{j_1} u_{j_s} =$$

$$\ln\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} m_{j_1,\dots,j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s}\right)^{*} \quad (2.3)$$

*) Pominięto tu indeks Q jako nieistotny w tych rozważaniach.

Traktując prawą stronę jak funkcję $\ln(1+x)$, rozwińmy ją w szereg potęgowy:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots .$$

Zatem

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} k_{j_1,\dots,j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s} =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{N} m_{j_1,\dots,j_s} u_{j_1}\dots u_{j_s} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{c,n=1}^{\infty} \frac{i^{c+n}}{c!n!} \sum_{\substack{j_1,\dots,j_c=1\\ r_1,\dots,r_n=1}}^{N} m_{j_1,\dots,j_c} m_{r_1,\dots,r_n} u_{j_1}\dots u_{j_c} u_{r_1}\dots u_{r_n} +$$

$$+ \frac{1}{3} \sum_{l,n,p=1}^{\infty} \frac{i^{s+n+p}}{c!n!p!} \sum_{\substack{j_1,\dots j_e=1\\ r_1,\dots,r_n=1\\ t_1,\dots,t_r=1}}^{N} m_{j_1,\dots,j_c} m_{r_1,\dots,r_n} m_{t_1,\dots t_p} u_{j_1}\dots u_{j_c}$$

$$u_{r_1}\dots u_{r_n} u_{t_1}\dots u_{t_p} \dots \tag{2.4}$$

Porównując wyrazy przy tych samych potęgach $i = \sqrt{-1}$ otrzymamy:

$$k_{j_1,\dots,j_s} = m_{j_1,\dots,j_s} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{s} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\nu_1=1}^{s} \dots \sum_{\nu_{n-1}=1}^{s} \frac{s!H(c_n - \frac{1}{2})D^{(n)}_{(j_1,\dots,j_s)}(\nu_1,\dots,\nu_{n-1})}{c_n!\,\nu_1!\dots\nu_{n-1}!}, \tag{2.5}$$

gdzie: $c_n = s - \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i$, $H(\cdot)$ funkcja Heuviside'a.

Wprowadzono tu symbol symetrycznej części wielkości wielowskaźnikowej $A_{j_1,\dots,j_s}$, oznaczając ją symbolem $A_{(j_1,\dots,j_s)}$.

Część symetryczną $A_{(j_1,\dots,j_s)}$ tworzymy wg wzoru:

$$A_{(j_1,\dots,j_s)} = \frac{1}{s!}\left(A_{j_1,j_2,\dots,j_s} + A_{j_2,j_1,\dots,j_s} + \dots\right) \tag{2.6}$$

Sumowanie rozpościera się na wszystkie permutacje ciągu $j_1,\dots,j_s$.

Zauważmy jeszcze, że:

$$k_{(j_1,\dots,j_s)} = k_{j_1,\dots,j_s} \quad \text{oraz} \quad m_{(j_1,\dots,j_s)} = m_{j_1,\dots,j_s}.$$

Symbol $D^{(n)}_{j_1,\dots,j_s}(\vartheta,\dots\vartheta_{n-1})$ wyraża się wzorem:

$$D^{(n)}_{j_1,\dots,j_s}(\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1}) = m_{j_1,\dots,j_{s-b_1^{(n)}}}\, m_{j_{s-b_{1+1}^{(n)}},\dots,j_{s-b_2^{(n)}}} \cdots$$

$$\cdots\, m_{j_{s-b_{n-1}^{(n)}}+1,\dots,j_s} \tag{2.7}$$

gdzie:

$$b_k^{(n)} = \sum_{i=k}^{n-1} \vartheta_i. \tag{2.8}$$

Z (2.5) wynika, że

$$k_{j_1} = m_{j_1}, \tag{a}$$

$$k_{j_1 j_2} = m_{j_1,j_2} - \frac{1}{2}\sum_{\vartheta_1=1}^{1} \frac{2!\,\frac{1}{2!}(m_{j_1}m_{j_2} + m_{j_2}m_{j_1})}{(2-1)!\,1!} = m_{j_1 j_2} - m_{j_1}m_{j_2} \tag{b}$$

$$k_{j_1 j_2 j_3} = m_{j_1 j_2 j_3} + \sum_{n=2}^{3} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\vartheta_1=1}^{4-n} \sum_{\vartheta_{n-1}=1}^{4-n} \frac{3!\, D^{(n)}_{(j_1,j_2,j_3)}(\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})}{(3-\sum_{i=1}^{n-1}\vartheta_i)!\,\prod_{i=1}^{n-1}(\vartheta_i!)}$$

$$= m_{j_1 j_2 j_3} - \frac{1}{2}\sum_{\vartheta_1=1}^{2} \frac{3!\, D^{(2)}_{(j_1,j_2,j_3)}(\vartheta_1)}{(3-\vartheta_1)!\,\vartheta_1!} + \frac{1}{3}\sum_{\vartheta_1=1}^{1}\sum_{\vartheta_2=1}^{1} \frac{3!\, D^{(3)}_{(j_1,j_2,j_3)}(\vartheta_1,\vartheta_2)}{(3-\vartheta_1-\vartheta_2)!\,\vartheta_1!\,\vartheta_2!} =$$

$$= m_{j_1 j_2 j_3} - \frac{1}{2}\left[\frac{3!\, D^{(2)}_{(j_1 j_2 j_3)}(1)}{(3-1)!\,1!\,1!} + \frac{3!\, D^{(2)}_{(j_1 j_2 j_3)}(2)}{(3-2)!\,2!\,1!}\right] +$$

$$+ \frac{1}{3}\,\frac{3!}{(3-1-1)!\,1!\,1!\,1!}\, D^{(3)}_{(j_1, j_2, j_3)}(1,1).$$

Zgodnie ze wzorami (2.7) i (2.8) będzie:

$$b^{(2)}_1 = \vartheta_1 ;$$

$$D^{(2)}_{j_1 j_2 j_3}(1) = m_{j_1 j_2}\, m_{j_3};$$

$$D^{(2)}_{j_1, j_2, j_3}(2) = m_{j_1}\, m_{j_2 j_3} ;$$

$$b^{(3)}_1 = \sum_{i=1}^{2} \vartheta_i = \vartheta_1 + \vartheta_2;$$

$$b^{(3)}_2 = \vartheta_2;$$

$$D^{(3)}_{j_1, j_2, j_3}(1,1) = m_{j_1}\, m_{j_2}\, m_{j_3}.$$

Symetryzując otrzymamy:

$$D^{(2)}_{(j_1, j_2, j_3)}(1) = \frac{1}{3!}\,(m_{j_1 j_2}\, m_{j_3} + m_{j_3 j_1}\, m_{j_2} + m_{j_2 j_3}\, m_{j_1} +$$

$$+ m_{j_2 j_1}\, m_{j_3} + m_{j_1 j_3}\, m_{j_2} + m_{j_3 j_2}\, m_{j_1} = \frac{2}{3!}(m_{j_1 j_2}\, m_{j_3} + m_{j_3 j_1}\, m_{j_2} + m_{j_2 j_3}\, m_{j_1}),$$

$$D^{(2)}_{(j_1, j_2, j_3)}(2) = D^{(2)}_{(j_1, j_2, j_3)}(1);$$

$$D^{(3)}_{(j_1, j_2, j_3)}(1,1) = m_{j_1}\, m_{j_2}\, m_{j_3}.$$

Zatem

$$k_{j_1, j_2, j_3} = m_{j_1, j_2, j_3} - m_{j_1 j_2}\, m_{j_3} - m_{j_3 j_1}\, m_{j_2} - m_{j_2 j_3}\, m_{j_1} + 2\, m_{j_1}\, m_{j_2}\, m_{j_3} \qquad \text{(c)}$$

$$k_{j_1,j_2,j_3,j_4} = m_{j_1,j_2,j_3,j_4} - \frac{1}{2}\sum_{\vartheta_1=1}^{3} \frac{4!\, D^{(2)}_{(j_1,j_2,j_3,j_4)}(\vartheta_1)}{(4-\vartheta_1)!\,\vartheta_1!} +$$

$$+ \frac{1}{3}\sum_{\vartheta_1=1}^{2}\sum_{\vartheta_2=1}^{2} \frac{4!\, D^{(3)}_{(j_1,\ldots,j_4)}(\vartheta_1,\vartheta_2) H(4-\vartheta_1-\vartheta_2-\frac{1}{2})}{(4-\vartheta_1-\vartheta_2)!\,\vartheta_1!\,\vartheta_2!} -$$

$$- \frac{1}{4}\sum_{\vartheta_1=1}^{1}\sum_{\vartheta_2=1}^{1}\sum_{\vartheta_3=1}^{1} \frac{4!\, D^{(4)}_{(j_1,\ldots,j_4)}(\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3)}{(4-\vartheta_1-\vartheta_2-\vartheta_3)!\,\vartheta_1!\,\vartheta_2!\,\vartheta_3!}$$

$$\left.\begin{aligned}
D^{(2)}_{j_1,\ldots,j_4}(1) &= m_{j_1 j_2 j_3} m_{j_4},\\
D^{(2)}_{j_1,\ldots,j_4}(2) &= m_{j_1 j_2} m_{j_3 j_4},\\
D^{(2)}_{j_1,\ldots,j_4}(3) &= m_{j_1} m_{j_2 j_3 j_4},\\
D^{(3)}_{j_1,\ldots,j_4}(1,1) &= m_{j_1 j_2} m_{j_3} m_{j_4},\\
D^{(3)}_{j_1,\ldots,j_4}(1,2) &= m_{j_1} m_{j_2} m_{j_3 j_4},\\
D^{(3)}_{j_1,\ldots,j_4}(2,1) &= m_{j_1} m_{j_2 j_3} m_{j_4},\\
D^{(4)}_{j_1,\ldots,j_4}(1,1,1) &= m_{j_1} m_{j_2} m_{j_3} m_{j_4},
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(d)}$$

Zatem

$$k_{j_1,j_2,j_3,j_4} = m_{j_1,j_2,j_3,j_4} - \frac{1}{2}\frac{4!}{3!\,1!} D^{(2)}_{(j_1,\ldots,j_4)}(1) -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{4}{2!\,2!} D^{(2)}_{(j_1,\ldots,j_4)}(2) - \frac{1}{2}\frac{4}{1!\,3!} D^{(2)}_{(j_1,\ldots,j_4)}(3) +$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{4!}{2!\,1!\,1!} D^{(3)}_{(j_1,\ldots,j_4)}(1,1) + \frac{1}{3}\frac{4!}{1!\,1!\,2!} D^{(3)}_{(j_1,\ldots,j_4)}(1,2) +$$

$$+\frac{1}{3}\frac{4!}{1!\,2!\,1!}D^{(3)}_{(j_1,\ldots,j_4)}(2,1)-\frac{1}{4}\frac{4!}{1!\,1!\,1!\,1!}D^{(4)}_{(j_1,\ldots,j_4)}(1,1,1) \quad (e)$$

Wystarczy obecnie znaleźć części symetryczne wyrażeń określone związkami (d), ażeby otrzymać wzór analogiczny do wzoru (e). Zauważmy, że w przypadku zmiennych losowych o średniej zero wyrażenie (e) znacznie się upraszcza. Wówczas będziemy mieli:

$$k_{j_1,j_2,j_3,j_4}=m_{j_1,j_2,j_3,j_4}-\frac{1}{2}\frac{4!}{2!\,2!}D^{(2)}_{(j_1,\ldots,j_4)}(2), \quad (e1)$$

gdzie:

$$D^{(2)}_{(j_1,\ldots,j_4)}=\frac{8}{4!}\left(m_{j_1j_2}m_{j_3j_4}+m_{j_2j_3}m_{j_1j_2}+m_{j_2j_4}m_{j_1j_3}\right).$$

Zatem

$$k_{j_1,\ldots j_4}=m_{j_1,\ldots,j_4}-\left(m_{j_1j_2}m_{j_3j_4}+m_{j_2j_3}m_{j_1j_2}+m_{j_2j_4}m_{j_1j_3}\right). \quad (e2)$$

Wzory dla wyższych wartości s niż 4 można ustalić w sposób analogiczny na podstawie wzoru ogólnego (2.5), który jest istotny ze względu na ustalenie ogólnego związku pomiędzy korelacjami sygnału wejściowego i wyjściowego, przy przejściu przez układ liniowy.
W tym celu przepiszemy wzór (1.3) w następujący sposób:

$$q^{j_k}(t_k)=\int_{-\infty}^{t_k}\sum_{i_k=1}^{N}G^{j_ki_k}(t_k-\tau_k)Q_{i_k}(\tau_k)d\tau_k,$$

gdzie j_k dla każdego k zmienia się od 1 do N (N jest ilością stopni swobody układu); natomiast k, od 1 do s.

Jeśli $Q_{i_k}(\tau)$ jest procesem, to $q^{j_k}(t)$ jest procesem.

Utwórzmy moment rzędu s sygnału wyjściowego

$$m^{j_1,\ldots,j_s}_{(q)}=\langle q^{j_1}(t_1)\ldots q^{j_s}(t_s)\rangle=$$

$$=\left\langle\prod_{k=1}^{s}\sum_{i_k=}^{N}\int_{-\infty}^{t_k}G^{j_ki_k}(t_k-\tau_k)Q_{i_k}(\tau_k)d\tau_k\right\rangle$$

Jeśli $G^{j_k i_k}(t)$ jest funkcją zdeterminowaną, to wówczas:

$$m_q^{j_1,\dots,j_s} = \int_{-\infty}^{t_1},\dots \int_{-\infty}^{t_s} \sum_{i_1,\dots,i_s=1}^{N} \prod_{k=1}^{s} G^{j_k i_k}(t_k-\tau_k) \times$$

$$\times \left\langle \prod_{k=1}^{s} Q_{i_k}(\tau_k) \right\rangle d\tau_1,\dots,d\tau_s. \tag{2.9}$$

Ponieważ

$$\left\langle \prod_{k=1}^{s} Q_{i_k}(\tau_k) \right\rangle = m_{(Q)i_1,\dots,i_s}(\tau_1,\dots,\tau_s),$$

przeto

$$m_{(q)}^{j_1,\dots,j_s} = \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_s} \sum_{i_1,\dots,i_s=1}^{N} \left[\prod_{k=1}^{s} G^{j_k i_k}(t_k-\tau_k) \right] \times$$

$$\times\, m_{(Q)i_1,\dots,i_s}(\tau_1,\dots,\tau_s) d\tau_1 \dots d\tau_s. \tag{2.10}$$

Zauważmy że podobnie transformułują się iloczyny momentów i dlatego:

$$D_{(q)}^{(n)j_1,\dots,j_s}(t_1,\dots,t_s,\nu_1,\dots,\nu_{n-1}) = \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_s} \sum_{i_1,\dots,i_s=1}^{N} \prod_{k=1}^{s} G^{j_k i_k}(t_k-\tau_k)$$

$$\times\, D_{(Q)}^{(n)}(i_1,\dots,i_s)(\tau_1,\dots,\tau_s,\nu_1,\dots,\nu_{n-1}(d\tau_1,\dots,d\tau_s. \tag{2.11}$$

Zatem funkcje korelacyjne rzędu s procesu $q^{j_k}(t)$ wyraża wzór:

$$k_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t_1,\dots,t_s) = m_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t_1,\dots,t_s) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{s} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{j_1,\dots,j_{n-1}=1}^{s} \frac{s!\, H(c_n-\frac{1}{2})\, D_q^{(n)(j_1,\dots,j_s)}(t_1,\dots,t_s,\nu_1,\dots\nu_{n-1})}{c_n!\, \nu_1! \dots \nu_{n-1}!} \tag{2.12}$$

Podstawiając (2.10) oraz (2.11) do (2.12) otrzymamy:

$$k_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t_1,\dots,t_s) = \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_s} \sum_{i_1,\dots,i_s=1}^{N} \left[\prod_{k=1}^{s} G^{j_k i_k}(t_k - \tau_k) \right] \times$$

$$\times \left[m_{(Q)i_1,\dots,i_s}(\tau_1,\dots,\tau_s) + \sum_{n=2}^{s} \frac{(-1)^{m+1}}{n} \sum_{j_1,\dots,j_{n-1}=1}^{s} \right.$$

$$\left. \frac{s!\, H(c_n - \frac{1}{2})\, D_{(Q)(i_1,\dots,i_s)}^{(n)}(\tau_1,\dots,\tau_s,\ \vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})}{c_n!\ \vartheta_1!\ \dots\ \vartheta_{n-1}!} \right] d\tau_1 \dots d\tau_s \quad (2.13)$$

Czyli funkcje korelacyjne transformują się tak samo jak momenty, tzn. wg wzoru:

$$k_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t_1,\dots,t_s) = \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_s} \sum_{i_1,\dots,i_s=1}^{N} \prod_{k=1}^{s} G^{j_k i_k}(t_k - \tau_k) \times$$

$$\times\ k_{(Q)i_1,\dots,i_s}(\tau_1,\dots,\tau_s) d\tau_1 \dots d\tau_s, \quad (2.14)$$

Zauważmy, że wzór (1.5) jest szczególnym przypadkiem wzoru (2.14).

Jeśli zatem potrafimy znaleźć funkcję korelacyjną sygnału wyjściowego dowolnego rzędu, to potrafimy również znaleźć funkcję charakterystyczną odpowiadającą gęstości prawdopodobieństwa (0.3).

Pamiętamy, że w teorii przewyższeń, której poświęcona jest niniejsza praca, chodzi o wyznaczenie łącznej gęstości prawdopodobieństwa położeń i prędkości. Przenumerowując współrzędne w taki sposób, że:

$$\dot{q}^{j_k} = q^{j_k + N},$$

będziemy poszukiwali rozkładu gęstości prawdopodobieństwa w postaci:

$$g_{q^1,\dots,q^{2N}}(x^1,\dots,x^{2N}|t).$$

Funkcje korelacyjne rzędu s, utworzone ze wszystkich kombinacji procesów od q^1 do q^{2N}, zbudujemy w ten sposób, że dołączymy do korelacji $k_q^{j_1,\dots,j_s}(t_1,\dots,t_s)$ wszystkie możliwe kombinacje pochodnych względem czasów $t_1, t_2,\dots,t_s$.

I tak np.

$$k_{(q)}^{j_1,\ldots,j_k+N,\ldots,j_s}(t_1,\ldots,t_s) = \frac{\partial k_{(q)}^{j_1,\ldots,j_s}(t_1,\ldots,t_s)}{\partial t_k}.$$

Dzięki kolejnym operacjom różniczkowania otrzymamy korelacje: $k_{(q)}^{j_1,\ldots,j_s}(t_1,\ldots,t_s)$, gdzie j_k dla dowolnego k będzie przyjmować wartości nie jak poprzednio od 1 do N lecz od 1 do 2N.
Dzięki takiej zmianie funkcja charakterystyczna sygnału wyjściowego będzie posiadała budowę:

$$\theta_{(q)}(u_1,\ldots,u_{2N},t_1,\ldots,t_s) =$$

$$= \exp \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{2N} k_{(q)}^{j_1,\ldots,j_s}(t_1,\ldots,t_s) u_{j_1,\ldots,j_s}. \tag{2.15}$$

Wzór (1.7) jest szczególnym przypadkiem wzoru (2.15).

Poszukiwany rozkład gęstości prawdopodobieństwa zależy od jednej chwili t; jest zatem transformatą Fouriera funkcji charakterystycznej (1.29) dla $t_1 = t_2 = \ldots = t_s = t$, tzn. funkcji:

$$\theta_{(q)}(u_1,\ldots,u_{2N}/t) =$$

$$= \exp \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{2N} k_{(q)}^{j_1,\ldots,j_s}(t)\, u_{j_1,\ldots,u_{j_s}}. \tag{2.15a}$$

gdzie w celu skrócenia zapisu funkcji $k(t,\ldots,t)$ zapisano symbolem $k(t)$.

W celu określenia gęstości jako odwrotnej transformacji Fouriera, wykonanej na (2.15a), zastosujemy znany sposób [6], polegający na wprowadzeniu pojęcia quasimomentów $b_{(q)}^{j_1,\ldots,j_s}(t)$ związanych z funkcjami korelacyjnymi związkiem:

$$\exp \sum_{s=3}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{2N} k_{(q)}^{j_1,\ldots,j_s}(t)\, u_{j_1,\ldots u_{j_s}} =$$

$$= 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{2N} b_{(q)}^{j_1,\ldots,j_s}(t) u_{j_1,\ldots,u_{j_s}} \tag{2.16}$$

W celu określenia związków pomiędzy quasimomentami $b^{j_1,\dots,j_s}(t)$ a funkcjami korelacyjnymi $k^{j_1,\dots,j_s}(t)$ rozwiniemy prawą stronę w szereg potęgowy ($e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$). Zatem

$$1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{2N} b_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t) u_{j_1} \cdot \ldots \cdot u_{j_s} =$$

$$= 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{2N} k_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t) u_{j_1} \cdot \ldots \cdot u_{j_s} +$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{c,n=3}^{\infty} \frac{i^{c+n}}{c!n!} \sum_{j_1,\dots,j_c=1}^{2N} \sum_{r,\dots,r_n=1}^{2N} k_{(q)}^{j_1,\dots,j_c}(t) k_{(q)}^{r_1,\dots,r_n}(t) \cdot$$

$$\cdot u_{j_1} \cdot \ldots \cdot u_{j_c} u_{r_1} \cdot \ldots \cdot u_{r_n} + \frac{1}{3!} \sum_{e,n,p=1}^{\infty} \frac{i^{c+n+p}}{c!n!p!} \sum_{j_1,\dots,j_c=1}^{2N} \sum_{r_1,\dots,r_n=1}^{2N}$$

$$\sum_{w_1,\dots,w_p=1}^{2N} k_{(q)}^{j_1,\dots,j_c}(t) k_{(q)}^{r_1,\dots,r_n}(t) k_{(q)}^{w_1,\dots,w_p}(t) \cdot$$

$$\cdot u_{j_1} \cdot \ldots \cdot u_{j_c} u_{r_1} \cdot \ldots \cdot u_{r_n} u_{w_1} \cdot \ldots \cdot u_{w_p} + \dots \tag{2.17}$$

Porównując w (2.17) wyrazy przy tych potęgach „i" możemy ustalić wzór:

$$b^{j_1,\dots,j_s}(t) = k^{j_1,\dots,j_s}(t) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{s} \frac{1}{n!} \sum_{\vartheta_1=1}^{s} \cdots \sum_{\vartheta_{n-1}=1}^{s} \frac{s! H(c_n - \frac{1}{2}) B_{(n)}^{(j_1,\dots,j_s)}(t,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})}{c_n! \vartheta_1! \cdots \vartheta_{n-1}!}, \tag{2.18}$$

gdzie: $c_n = s - \sum_{i=1}^{n-1} \vartheta_i$, $H(\cdot)$ - jest funkcją Heaviside'a.

$B_{(n)}^{(j_1,\dots,j_s)}(t,\nu_1,\dots,\nu_{n-1})$ - jest częścią symetryczną wyrażenia

$$B_{(n)}^{j_1,\dots,j_s}(t,\nu_1,\dots,\nu_{n-1}) = k^{j_1,\dots,j_{s-b_1^{(n)}}}(t)\cdot k^{j_{s+b_1^{(n)}+1},\dots,j_{s-b_2^{(n)}}}(t)\cdot\dots\cdot$$

$$\dots\cdot k^{j_{s-b_2^{(n)}+1},\dots,j_s}(t).$$

gdzie: $b_k^{(n)} = \sum_{i=k}^{n-1} \nu_i$.

Wzór (1.32) dla przypadku, gdy po prawej stronie uwzględnimy również dwie pierwsze korelacje k^{j_1} oraz $k^{j_1 j_2}$, określa momenty $m_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}$ dowolnego rzędu. W celu wyznaczenia quasimomentów należy przyjąć po prawej stronie dwie pierwsze korelacje równe zeru.

Ze wzoru (2.18) wynika, że:

$$b_{(q)}^{j_1,j_2,j_3}(t) = k_{(q)}^{j_1,j_2,j_3}(t), \tag{a}$$

$$b_{(q)}^{j_1,j_2,j_3,j_4}(t) = k_{(q)}^{j_1,j_2,j_3,j_4}(t), \tag{b}$$

$$b_{(q)}^{j_1,\dots,j_5}(t) = k_{(q)}^{j_1,\dots,j_5}(t), \tag{c}$$

$$b^{j_1,\dots,j_6}(t) = k_{(q)}^{j_1,\dots,j_6}(t) +$$

$$+\sum_{n=2}^{6}\frac{1}{n!}\sum_{\nu_1=1}^{6}\dots\sum_{\nu_{n-1}=1}^{6}\frac{6!\,B_{(n)}^{(j_1,\dots,j_6)}(t,\nu_1,\dots,\nu_{n-1})H(6-\sum_{i=1}^{n-1}\nu_i)}{(6-\sum_{i=1}^{n-1}\nu_i)!\,\nu_1!\dots\nu_{n-1}!} =$$

$$= k_{(q)}^{j_1,\dots,j_6}(t) + \frac{1}{2}\frac{6!}{3!3!}B_{(2)}^{(j_1,\dots,j_6)}(t,3), \tag{d}$$

gdzie $B_{(2)}^{(j_1,\dots j_6)}(t,3)$ jest częścią symetryczną wyrażenia:

$$B_2^{j_1,\dots,j_6}(t,3) = k_q^{j_1 j_2 j_3}(t)\,k^{j_4 j_5 j_6}(t)\cdot$$

$$b^{j_1,\dots,j_7}(t) = k^{j_1,\dots,j_7}(t) +$$

$$+\sum_{n=2}^{7}\frac{1}{n!}\sum_{\vartheta_1=1}^{7}\cdots\sum_{\vartheta_{n-1}=1}^{7}\frac{7!\,B_{(n)}^{(j_1,\ldots,j_7)}(t,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1})H(7-\sum_{i=1}^{n-1}\vartheta_i)}{(7-\sum_{i=1}^{n-1}\vartheta_i)!\,\vartheta_1!\,\vartheta_2!\ldots\vartheta_{n-1}!}=$$

$$=k^{(j_1,\ldots,j_7)}+\frac{1}{2}\frac{7!}{4!3!}B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_7)}(t,3)+\frac{1}{2}\frac{7!}{4!3!}B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_7)}(t,4).$$

Ponieważ $B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_7)}(t,3)=B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_7)}(t,4)$, przeto

$$b^{j_1,\ldots,j_7}(t)=k^{j_1,\ldots,j_7}(t)+\frac{7!}{4!3!}B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_7)}(t,3), \qquad \text{(e)}$$

gdzie

$B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_7)}(t,3)$ jest częścią symetryczną wyrażenia;

$$B_{(2)}^{j_1,\ldots,j_7}(t,3)=k^{j_1j_2j_3j_4}(t)\,k^{j_1j_2j_3}(t).$$

$$b^{j_1,\ldots,j_8}(t)=k^{j_1,\ldots,j_8}(t)+$$

$$+\sum_{n=2}^{8}\frac{1}{n!}\sum_{\vartheta_1=1}^{8}\cdots\sum_{\vartheta_{n-1}=1}^{8}\frac{8!\,B_{(n)}^{(j_1,\ldots,j_8)}(t,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1})H(8-\sum_{i=1}^{n-1}\vartheta_i)}{(8-\sum_{i=1}^{n-1}\vartheta_i)!\,\vartheta_1!\ldots\vartheta_{n-1}!}=$$

$$=k^{j_1,\ldots,j_8}(t)+\frac{1}{2}\frac{8!}{5!3!}B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_8)}(t,3)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{8!}{4!4!}B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_8)}(t,4)+\frac{1}{2}\frac{8!}{5!3!}B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_8)}(t,5).$$

Ponieważ $B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_8)}(t,3)=B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_8)}(t,5)$,

przeto:

$$b^{j_1,\ldots,j_8}(t)=k^{j_1,\ldots,j_8}(t)+\frac{8!}{5!3!}B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_8)}(t,3)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{8!}{4!4!}B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_8)}(t,4), \qquad \text{(f)}$$

gdzie $B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_8)}(t,3)$ oraz $B_{(2)}^{(j_1,\ldots,j_8)}(t,4)$

są częściami symetrycznymi wyrażeń:

$$B_{(2)}^{j_1,\dots,j_8}(t,3) = k^{j_1,\dots,j_5}(t)k^{j_6j_7j_8}(t).$$

$$B_{(2)}^{j_1,\dots,j_8}(t,4) = k^{j_1,\dots,j_4}(t)k^{j_5,\dots,j_8}(t).$$

Analogicznie, korzystając ze wzoru ogólnego (2.18),,można wyznaczyć quasimomenty wyższych rzędów.

Wszystkie quasimomenty wyznaczamy na podstawie znajomości funkcji korelacyjnych $k^{j_1,\dots,j_s}(t)$ określonych związkami (2.14).Wracając do funkcji charakterystycznej (2.15a) oraz uwzględniając równość (2.16) napiszemy:

$$\Theta_{(q)}(u_1,\dots,u_{2N}/t) =$$

$$= \exp\left[i\sum_{j_1=1}^{2N} k_q^{j_1}(t)\,u_1 - \frac{1}{2}\sum_{j_1,j_2=1}^{2N} k_q^{j_1j_2}(t)u_{j_1}u_{j_2}\right] \times$$

$$\times\left[1 + \sum_{s=3}^{\infty}\frac{i^s}{s!}\sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{2N} b_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t)u_{j_1}\dots u_{j_s}\right]. \tag{2.19}$$

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa określimy przez wykonanie na (2.19) odwrotnej transformacji Fouriera:

$$g_{q^1,\dots,q^{2N}}(x^1,\dots,x^{2N}|t) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2N}}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\sum_{\alpha=1}^{2N} x^\alpha u_\alpha\right) \times$$

$$\exp\left[i\sum_{j_1=1}^{2N} k_{(q)}^{j_1}(t)u_{j_1} - \frac{1}{2}\sum_{j_1,j_2=1}^{2N} k_{(q)}^{j_1,j_2}\,u_{j_1}u_{j_2}\right] \times$$

$$\times\left[1 + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{i^s}{s!}\sum_{j_1,\dots j_s=1}^{2N} b_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t)u_{j_1}\dots u_{j_s}\right] du_1\dots du_{2N}. \tag{2.20}$$

Zauważmy, że jeżeli transformujemy pochodną funkcji jednej zmiennej wg wzoru:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(x)}{dx}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx}\, e^{inx} dx,$$

to otrzymamy:

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x)e^{inx}\Big|_{-\infty}^{\infty} - in\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{inx}dx,$$

Jeżeli f(x) w nieskończoności ($\pm\infty$) dąży do zera, to wówczas:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(x)}{dx}\right\} = -in\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{inx}dx = -in\mathcal{F}\left\{f(x)\right\}.$$

Odwrotna zatem transformacja funkcji $in\mathcal{F}\left\{f(x)\right\}$ będzie równa:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{in\mathcal{F}\left\{f(x)\right\}\right\} = -\frac{df(x)}{dx}.$$

Dla wyższych pochodnych uzyskujemy wynik analogiczny.

Całka (2.20) jest właściwie odwrotną transformacją tego typu w przypadku wielowymiarowym i dlatego wynik całkowania jest łatwy do uzyskania. Rzeczywiście

$$\exp\left[i\sum_{j_1=1}^{2N} k^{j_1}_{(q)}(t)u_{j_1} - \frac{1}{2}\sum_{j_1,j_2=1}^{2N} k^{j_1 j_2}_{(q)}(t)u_{j_1}u_{j_2}\right] =$$

$$= \mathcal{F}\left\{\tilde{g}_{q^1,\ldots,q^{2N}}(x^1,\ldots,x^{2N}/t)\right\},$$

gdzie: $\tilde{g}_{q^1,\ldots,q^{2N}}(x^1,\ldots,x^2N/t) =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N\sqrt{\det\left[k^{\alpha\beta}_{(q)}(t,t)\right]}}\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2N} k^{-1}_{(q)\alpha\beta}(t,t)(x^\alpha - k^\alpha_{(q)}(t))(x^\beta - k^\beta_{(q)}(t))\right]$$

(por. wzór (1.15)).

Wzór (1.34) przy tych oznaczeniach można przepisać w postaci:

$$g_{q^1,\ldots,q^{2N}}(x^1,\ldots,x^{2N}/t) =$$

$$= \tilde{g}_{q^1,\dots,q^{2N}}(x^1,\dots,x^{2N}/t) + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{2N} b_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t) \times$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{2N}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} i\, u_{j_1} \dots i u_{j_s} \mathcal{F}\left\{ \tilde{g}_{q^1,\dots,q^{2N}}(x^1,\dots,x^{2N}/t) \right\} \times$$

$$\times \exp\left[- i \sum_{\alpha=1}^{2N} x^{\alpha} u_{\alpha} \right] du_1 \dots du_{2N}.$$

Stąd uzyskujemy:

$$g_{q^1,\dots,q^{2N}}(x^1,\dots,x^{2N}/t) =$$

$$\left\{ 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{2N} b_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t) \prod_{k=1}^{s} \left(- \frac{\partial}{\partial_x jk} \right) \right\} \tilde{g}_{q^1,\dots,q^{2N}}(x^1,\dots,x^{2N}/t). \tag{2.21}$$

Przedstawiony tak sposób postępowania przy wyznaczeniu gęstości (2.21) okazał się dość złożony. Ze względu na ogólność rozważań jest to jednocześnie rozwiązanie całej klasy zagadnień liniowych, których aspekt praktyczny jest istotny. Wyznaczenie korelacji przebiegało przy założeniu zdeterminowanych parametrów strukturalnych układów.

Przyjęto również, że współczynniki równań różniczkowych, opisujących dynamikę układów, są stałe. Stąd impulsowa macierz przejścia jest układem funkcji zależnych od różnicy czasu $t - \tau$ $(G^{ik}(t-\tau))$. Naturalnie rozszerzając klasę zagadnień można było przyjąć odpowiedź układu w postaci:

$$q^k(t) = \int_{-\infty}^{t} \sum_{i=1}^{N} G^{ki}(t,\tau) Q_i(\tau) d\tau. \tag{2.22}$$

Zachowując ten sam tok rozważań można również przyjąć losowy charakter parametrów strukturalnych układów, co odpowiadałoby losowemu charakterowi funkcji $G^{ik}(t,\tau)$. Wówczas wyjście procesu stochastycznego $q^k(t)$ z obszaru D przy zdeterminizowanym sygnale wejściowym $Q_i(t)$ można byłoby np. komentować jako przypadkowe uszkodzenie układu.

Przedstawiony schemat teoretyczny to połowa rozwiązania konkretnego problemu. Następna trudność to zagadnienie numeryczne, którego trudność rośnie szybciej aniżeli liczba wymiarów (stopni swobody) układu.

LITERATURA

[1] Grandall S.H. (Editor): Random vibration. Vol.2 Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts 1963.

[2] Gichman I.I., Skorochod A.W.: Wstęp do teorii procesów stochastycznych, PWN, Warszawa 1968.

[3] Skalmierski B., Tylikowski A.: Procesy stochastyczne w dynamice, PWN, Warszawa 1972.

[4] Skalmierski B.: Mechanika z wytrzymałością materiałów dla automatyków PWN, Warszawa 1973.

[5] Skalmierski B.: Wielowymiarowe zagadnienia przewyższania. Zeszyty Naukowe Pol.Sl. s. Mat.-Fiz. z. 28, Gliwice 1977 r.

[6] Stratonowicz R.L.: Izbrannyje woprosy teorii fluktuacji w radiotechnikie. Izdatielstwo "Sowietskoje Radio", Moskwa 1961.

ПРОБЛЕМЫ ПРЕВЫШЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Р е з ю м е

В работе обсуждается проблема переноса совместных плотностей многомерного процесса, а также его производной, через линейную систему. Рассмотрены две проблемы: (I) когда входный процесс является нормальным, а также (II), когда входный процесс отличается от нормального. Для реализации поставленных задач устанавливаются общие связи между корреляциями любого ряда входа и выхода системы. Даются также общие связи, связывающие моменты и мнимые моменты с корреляциями.

SURPASSING PROBLEMS IN DYNAMIC SYSTEMS

S u m m a r y

In the paper a problem of all densities transfer of a multidimensional process, as well as its derivatives through a linear system has been discussed.

Two problems have been discussed (i) when the input process is normal and (ii) when the input process derivates from the normal. To realize the task the general links between correlations of any input or output orders of the system have been established. The paper gives also general links connecting moments as well as quasimoments. (With correlations).