ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: Matematyka-Fizyka z. 29 Nr kol. 559

Bogdan SKALMIERSKI

Instytut Mechaniki Teoretycznej -
Politechnika Śląska

PROBLEMY PRZEWYŻSZEŃ W DYNAMICE UKŁADÓW NIELINIOWYCH

Streszczenie. W pracy przedyskutowano problemy "przenoszenia się" przez układy nieliniowe o wielu stopniach swobody, łącznej gęstości prawdopodobieństwa położeń i prędkości. Poruszono aspekt równań dyfuzyjnych, jak również zaproponowano nową metodę, nazwaną tu bezpośrednią, wyznaczania gęstości. Dyskutowane problemy są istotne z punktu widzenia badania problemu przewyższeń sygnałów wyjściowych w wielowymiarowych układach nieliniowych.

Niniejsza praca jest dalszą kontynuacją pracy [5], w której podano ogólną koncepcję rozwiązania wielowymiarowego problemu przewyższenia. Okazało się wówczas, że w problemie podstawowym tkwi zagadnienie wyznaczania gęstości $g_{\xi_1,\ldots,\xi_N}, \dot{\xi}_1,\ldots,\dot{\xi}_N(x^1,\ldots,\dot{x}^N/t)$. Temu właśnie zadaniu poświęcona była poprzednia moja praca [6], w której omówiłem problem przewyższeń sygnałów wyjściowych w przypadku liniowych układów dynamicznych.

Obecnie przedyskutujemy ten sam problem w przypadku układów nieliniowych.

1. Równania uogólnione Fokkera-Plancka-Kołmogorowa dla równań dynamiki

Nieliniowy układ opisany jest równaniami różniczkowymi o budowie:

$$\dot{q}^i = \psi^i(q^1,\ldots,q^N\xi^1(t,\omega),\ldots,\xi^N(t,\omega),\ t) \quad (i = 1,\ldots,2N) \tag{1.1}$$

Równania (1.1) zapiszemy krócej:

$$\dot{q}^i = \tilde{\psi}^i(q,t,\omega) \tag{1.1a}$$

gdzie prawe strony są procesami stochastycznymi zależnymi od wielowymiarowego procesu wejściowego $\xi^i(t,\omega)$.

Dokonujemy na (1.1a) formalnego przekształcenia polegającego na podzieleniu i pomnożeniu prawych stron przez liczbę ε, którą będziemy uważali za małą

$$\dot{q}^i = \varepsilon F^i(q,t), \tag{1.2}$$

gdzie:

$$F^i(q,t,\omega) = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\psi}^i(q,t,\omega).$$

Całkując (1.2) otrzymamy:

$$\Delta q^i = q^i - q^i(0) = \varepsilon \int_0^t F^i(q,t_1,\omega)dt_1. \tag{1.3}$$

Załóżmy, że funkcja $F^i(q,t_1,\omega)$ jest rozwijalna w szereg potęgowy tzn. że można ją przedstawić w postaci:

$$F^i(q,t_1,\omega) = F^i(q(0),\ t_1,\omega) +$$

$$+ \frac{\partial F^i(q(o),t_1,\omega)}{\partial q^m}\Delta q^m + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^i(q(o),t_1,\omega)}{\partial q^m\ \partial q^n}\Delta q^m \Delta q^n + \dots \tag{1.4}$$

Podstawiając (1.4) do (1.3) będzie:

$$\Delta q^i = \varepsilon \int_0^t F^i(q(0),\ t_1,\omega)dt_1 + \varepsilon \int_0^t \frac{\partial F^i(q(0),t_1\omega)}{\partial q^m}\Delta q^m\ dt_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon \int_0^t \frac{\partial^2 F^i(q(0),t_1,\omega)}{\partial q^m\ \partial q^n}\Delta q^m \Delta q^n\ dt_1 + \dots \tag{1.5}$$

Podstawiając w (1.5) pierwsze przybliżenie $\Delta q^m \cong \varepsilon \int_0^{t_1} F^m(q(0),t_2,\omega)dt_2$ otrzymamy drugie przybliżenie Δq^i

$$\Delta q^i = \varepsilon \int_0^t F^i(q(0),\ t_1,\omega)dt_1 + \varepsilon^2 \int_0^t \int_0^{t_1} \frac{\partial F^i(q(0),t_1,\omega)}{\partial q^m} F^m(q(0),t_2\omega)dt_1 dt_2. \tag{1.6}$$

Jeżeli teraz (1.6) znowu podstawimy do (1.5) i ograniczymy się do wyrazów przy ε^3, to:

$$\Delta q^i = \varepsilon a_1^i + \varepsilon^2 a_2^i + \varepsilon^3 a_3^i + \dots \tag{1.7}$$

gdzie:

$$a_1^i = \int_0^t F^i(q(0),t_1,\omega)dt_1; \tag{1.7a}$$

$$a_2^i = \int_0^t \frac{\partial F^i(q(0),t_1,\omega)}{\partial q^m}\left[\int_0^{t_1} F^m(q(0),\ t_2,\omega)dt_2\right]dt_1; \tag{1.7b}$$

$$a_3^i = \int_0^t \frac{\partial F^i(q(0),\ t_1,\omega)}{\partial q^m}\left\{\int_0^{t_1} \frac{\partial F^m(q(0),t_2,\omega)}{\partial q^m}\left[\int_0^{t_2} F^n(q(0),t_3\omega)dt_3\right]dt_2\right\}dt_1 +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F^i(q(0),t_1,\omega)}{\partial q^m\ \partial q^n}\left[\int_0^{t_1} F^m(q(0),t_2,\omega)dt_2\right]\left[\int_0^{t_1} F^n(q(0),t_3\omega)dt_3\right]dt_1. \tag{1.7c}$$

Jeżeli przyjąć zerowe warunki początkowe ($\bigwedge_i q^i(0) = 0$) to $\Delta q^i = q^i$. Przyjmiemy, że ruch układu zaczyna się w początku układu, co w niczym nie zmniejsza ogólności rozwiązania; można bowiem zawsze tak przyjąć układ współrzędnych, ażeby zrealizować to założenie.

Funkcja charakterystyczna procesu $q^i(t,\omega)$(wyjściowa) jest następująca:

$$\Theta_q(u_1,\dots,u_{2N},t) =$$
$$= \exp\left\{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{2N} k_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t)u_{j_1}\dots u_{j_s}\right\}, \tag{1.8}$$

gdzie:

$k_q^{j_1,\dots,j_s}(t)$ jest korelacją s-tego rzędu procesu $q^i(t,\omega)$ [6]

$$k_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t) = m_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t) +$$
$$+\sum_{n=2}^{s} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\nu_1=1}^{s} \dots \sum_{\nu_{n-1}=1}^{s} \frac{s!\ H(c_n-\frac{1}{2})D_{(n)}^{(j_1,\dots,j_s)}(t,\nu_1,\dots,\nu_{n-1})}{c_n!\,\nu_1!\dots\nu_{n-1}!}$$

gdzie: $c_n = s - \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i$, H( ) funkcja Heaviside'a, zaś

$D_{(n)}^{(j_1,\dots j_s)}(t,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})$ jest częścią symetryczną wyrażenia

$$D_n^{j_1,\dots,j_s}(t,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1}) = m_q^{j_1,\dots,j_s-b_1^{(n)}}(t)\dots m_q^{j_s-b_{n-1}^{(n)}+1,\dots,j_s}(t)$$

$b_k^{(n)} = \sum_{i=k}^{n-1} \vartheta_i$ przez $m_q^{j_1,\dots,j_s}(t)$ oznaczono moment s-teo rzędu sygnału $q^i(t,\omega)$,

$$m_q^{j_1,\dots,j_s}(t) = \left\langle \prod_{k=1}^{s} q^{j_k}(t,\omega) \right\rangle, \tag{1.10}$$

gdzie nawiasy $\langle\cdot\rangle$ oznaczają wartość średnią.

Gęstość rozkładu określimy jako odwrotną wielokrotną transformację Fouriera funkcji charakterystycznej:

$$g_{q^1,\dots,q^{2N}}(x^1,\dots,x^{2N}/t) = \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[-i\sum_{\alpha=1}^{2N} x^\alpha u_\alpha\Big] \times$$

$$\times \exp\Big[\sum_{s=1}^{\infty}\frac{i^s}{s!}\sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{2N} k_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t)\, u_{j_1}\dots u_{j_s}\Big]\, du_1\dots du_{2N}. \tag{1.11}$$

Jeżeli funkcję charakterystyczną, będącą funkcją wykładniczą zastąpimy szeregiem potęgowym

$$\exp\Big[\sum_{s=1}^{\infty}\frac{i^s}{s!}\sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{2N} k_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t) u_{j_1}\dots u_{j_s}\Big] =$$

$$= 1 + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{i^s}{s!}\sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{2N} k_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t) u_{j_1}\dots u_{j_s} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\sum_{c,n=1}^{\infty}\frac{i^{c+n}}{c!n!}\sum_{j_1,\dots,j_c=1}^{2N}\ \sum_{r_1,\dots,r_n=1}^{2N} k_{(q)}^{j_1,\dots,j_c}(t)\, k_{(q)}^{r_1,\dots,r_n}(t)$$

$$u_{j_1}\dots u_{j_c}\, u_{r_1},\dots,u_{r_n} + \dots$$

to całka (1.11) przedstawi się wzorem:

$$g_{q^1,\dots,q^{2N}}(x^1,\dots,x^{2N}|t) = (1 + R)\prod_{k=1}^{2N} \delta(x^k), \qquad (1.12)$$

gdzie R jest operatorem o budowie:

$$R = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{2N} \prod_{k=1}^{s} \left(-\frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right) k_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{c,n=1}^{\infty} \frac{1}{c!n!} \sum_{j_1,\dots,j_c=1}^{2N} \sum_{r_1,\dots,r_n=1}^{2N} \prod_{k=1}^{c} \left(-\frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right) \prod_{p=1}^{n} \left(-\frac{\partial}{\partial x^{r_p}}\right) \times$$

$$\times\, k_{(q)}^{j_1,\dots,j_c}(t)\, k_{(q)}^{r_1,\dots,r_n}(t) +$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{c,n,l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{c+n+l}}{c!n!l!} \sum_{j_1,\dots,j_c=1}^{2N} \sum_{r_1,\dots,r_2=1}^{2N} \sum_{m_1,\dots,m_l=1}^{2N} \prod_{k=1}^{c} \left(-\frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right)$$

$$\prod_{p=1}^{n} \left(-\frac{\partial}{\partial x^{r_p}}\right) \prod_{e=1}^{l} \left(-\frac{\partial}{\partial x^{m_e}}\right) \times$$

$$\times\, k_{(q)}^{j_1,\dots,j_c}(t) k_{(q)}^{r_1,\dots,r_n}(t) k_{(q)}^{m_1,\dots,m_e}(t) + \dots \qquad (1.13)$$

$\delta(x^k)$ jest dystrybucją Diraca.

Przy wyznaczeniu operatora R wykorzystuje się twierdzenie o dystrybucjach δ, gdyż wielokrotnie korzysta się z zależności typu:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x)\delta(x)) = f(0)\frac{\partial}{\partial x}(\delta(x)).$$

W związku z tym w (1.13) funkcje korelacji zależą od współrzędnych x^i, które weszły formalnie na miejsce $q^i(0)$, które założyliśmy równe zeru (zerowe warunki początkowe). Innymi słowy na miejsce funkcji $F^i(q(0),t,\omega) = F^i(0,t,\omega)$ należy dla obliczenia funkcji korelacji $k_{(q)}^{j_1,\dots,j_s}(t)$ przyjąć funkcję $F^i(x,t,\omega)$, przy czym x jest tu parametrem (a nie funkcją czasu!).

Dla skrócenia zapisu gęstości (1.12) oznaczymy literą g, zatem:

$$g = (1 + R)\prod_{k=1}^{2N} \delta(x^k) \qquad (1.14)$$

Różniczkowanie po czasie t daje:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t} \prod_{k=1}^{2N} \delta(x^k). \tag{1.15}$$

Z (1.14) wyznaczmy $\prod_{k=1}^{2N} \delta(x^k)$

$$\prod_{k=1}^{2N} \delta(x^k) = (1 + R)^{-1} g. \tag{1.16}$$

Podstawiając (1.16) do (1.14) otrzymujemy równanie:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t} (1 + R)^{-1} g. \tag{1.17}$$

Operator

$$(1 + R)^{-1} = 1 - R + R^2 - \dots$$

czyli

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t}(1 - R + R^2 - \dots)g. \tag{1.17a}$$

Widać, że prawa strona (1.17a) posiada nieskończoną ilość wyrazów. W związku z tym należy ograniczyć ich liczbę, a tym samym zdecydować się na przybliżenie rozkładu prawdopodobieństwa g.
Rozpisując operator R i ograniczając się do wyrazów zawierających pochodne trzeciego rzędu otrzymamy:

$$R(\cdot) = -\frac{\partial}{\partial x^l}\left[k^l_{(q)}(x,t)(\cdot)\right] + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m}\left[k^{lm}_{(q)}(x,t)(\cdot)\right] -$$

$$-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^l \partial x^m \partial x^n}\left[k^{lmn}_{(q)}(x,t)(\cdot)\right] + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m}\left[k^l_{(q)}(x,t)k^m_{(q)}(x,t)(\cdot)\right] -$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial^3}{\partial x^l \partial x^m \partial x^n}\left[k^{lm}_{(q)}(x,t)k^n_q(x,t)(\cdot)\right] -$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial^3}{\partial x^l \partial x^m \partial x^n}\left[k^l_{(q)}(x,t)k^{mn}_{(q)}(x,t)(\cdot)\right] -$$

$$-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^l \partial x^m \partial x^n}\left[k^l_{(q)}(x,t)k^m_{(q)}(x,t)k^n_{(q)}(x,t)(\cdot)\right] + \dots =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^l}\left[k_q^l(x,t)(\cdot)\right] + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m}\left[k_{(q)}^{lm}(x,t) + k_{(q)}^l(x,t)k_{(q)}^m(x,t))(\cdot)\right] -$$

$$- \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^l \partial x^m \partial x^n}\left\{\left[k_{(q)}^{lmn}(x,t) + 3k_{(q)}^{lm}(x,t)k_{(q)}^n(x,t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + k_{(q)}^l(x,t)k_{(q)}^m(x,t)k_{(q)}^n(x,t)\right](\cdot)\right\} \ldots \tag{1.18}$$

W wyrażeniu (1.18) obowiązuje konwencja sumacyjna (sumowanie po powtarzających się wskaźnikach od 1 do 2N). $k_{(q)}^{j_1,\ldots,j_s}(x,t)$ należy rozumieć jako $k_{(q)}^{j_1,\ldots,j_s}(x^1,\ldots,x^{2N},t)$. Związek pomiędzy momentem s-tego rzędu, a korelacjami [6] jest następujący

$$m_{(q)}^{j_1,\ldots,j_s}(x,t) = k_{(q)}^{j_1,\ldots,j_s}(x,t) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{s} \frac{1}{n!} \sum_{\vartheta_1=1}^{s} \sum_{\vartheta_{n-1}=1}^{s} \frac{s!\, H(c_n - \frac{1}{2})B_{(n)}^{(j_1,\ldots,j_s)}(x,t,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1})}{c_n!\ \vartheta_1!\ldots\vartheta_{n-1}!} \tag{1.19}$$

gdzie: $c_n = s - \sum_{i=1}^{n-1} \vartheta_i$, $H(\cdot)$ - jest funkcją Heaviside'a,

$B_{(n)}^{(j_1,\ldots,j_s)}(x,t,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-1})$ - jest częścią symetryczną wyrażenia

$$B^{(j_1,\ldots,j_s)}(x,t,\vartheta_1,\ldots\vartheta_{n-1}) =$$

$$= k_{(q)}^{j_1,\ldots,j_{s-b_1^{(n)}}}(x,t) \cdot \ldots \cdot k_{(q)}^{j_{s-b_{n-1}^{(n)}+1},\ldots,j_s}(x,t) \quad b_k^{(n)} = \sum_{i=k}^{n-1} \vartheta_i.$$

Ze związku (1.19) wynika, że:

$$m_{(q)}^l(x,t) = k_q^l(x,t) \tag{1.20}$$

$$m_{(q)}^{lm}(x,t) = k_{(q)}^{lm}(x,t) + k_q^l(x,t)k^m(x,t) \tag{1.21}$$

$$m^{lmn}_{(q)}(x,t) = k^{lmn}_{(q)}(x,t) + 3\, B^{(lmn)}_{(q)}(x,t,1) + k^{l}_{(q)}(x,t)k^{m}_{(q)}(x,t)k^{n}_{(q)}(x,t), \tag{1.22}$$

gdzie: $B^{(lmn)}_{(q)}(x,t,1)$ - jest częścią symetryczną wyrażenia

$$k^{lm}_{(q)}(x,t)k^{n}_{(q)}(x,t).$$

Widać zatem, że:

$$R(\cdot) = -\frac{\partial}{\partial x^l}\left[m^{l}_{(q)}(x,t)(\cdot)\right] + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^l\,\partial x^m}\left[m^{lm}_{(q)}(x,t)(\cdot)\right] -$$

$$-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^l \partial x^m \partial x^n}\left[m^{lmn}_{(q)}(x,t)(\cdot)\right] + \ldots \tag{1.23}$$

gdyż $\dfrac{\partial^3}{\partial x^l \partial x^m \partial x^n}\left[3\, k^{lm}_{(q)}(x,t)\; k^{n}_{(q)}(x,t)(\cdot)\right] =$

$$= \frac{\partial^3}{\partial x^l \partial x^m \partial x^n}\left[3\, B^{(lmn)}_{(q)}(x,t,1)(\cdot)\right].$$

Momenty s-tego rzędu obliczamy wg wzoru:

$$m_q^{j_1,\ldots,j_s}(x,t) = \left\langle \prod_{k=1}^{s} q^{j_k}(x,t,\omega)\right\rangle \tag{1.24}$$

$\langle\cdot\rangle$ - znak wartości średniej.

Zatem

$$R(\cdot) = -\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\langle q^l(x,t,\omega)\rangle(\cdot)\right] + \left[\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m}\langle q^l(x,t,\omega)q^m(x,t,\omega)\rangle(\cdot)\right] -$$

$$-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^l \partial x^m \partial x^n}\left[\langle q^l(x,t,\omega)q^m(x,t,\omega)q^n(x,t,\omega)\rangle(\cdot)\right] + \ldots \tag{1.25}$$

$q^l(x,t,\omega)$ tworzymy podstawiając w miejsce $q(0)$ parametr x, tzn.

$$q^l(t,\omega) = q^l(q(0),\, t,\omega))$$

przechodzi w $q^l(x,t,\omega)$.

Na podstawie (1.7)

$$q^l(x,t,\omega) = \varepsilon a_1^l(x,t,\omega) + \varepsilon^2 a_2^l(x,t,\omega) + \varepsilon^3 a_3^l(x,t,\omega) + \dots \tag{1.26}$$

oraz

$$\frac{\partial q^l(x,t,\omega)}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial a_1^l(x,t,\omega)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial a_2^l(x,t,\omega)}{\partial t} + \varepsilon^3 \frac{\partial a_3^l(x,t,\omega)}{\partial t} + \dots \tag{1.27}$$

Ograniczając się do wyrazów zawierających ε^3 napiszemy:

$$R(\cdot) = \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \varepsilon^3 b_3 + \dots \tag{1.28}$$

oraz

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial b_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial b_2}{\partial t} + \varepsilon^3 \frac{\partial b_3}{\partial t} + \dots = \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \varepsilon^3 c_3 + \dots \tag{1.29}$$

gdzie:

$$b_1 = -\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\langle a_1^l(x,t,\omega)\rangle \ (\cdot)\right] \tag{1.30}$$

$$b_2 = -\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\langle a_2^l(x,t,\omega)\rangle \ (\cdot)\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m}\left[\langle a_1^l(x,t,\omega) a_1^m(x,t,\omega)\rangle \ (\cdot)\right] \tag{1.31}$$

$$b_3 = -\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\langle a_3^l\rangle(\cdot)\right] + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m}\left\{\left[\langle a_1^l \ a_2^m\rangle + \langle a_2^l \ a_1^m\rangle\right] \ (\cdot)\right\} -$$

$$- \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^l \partial x^m \partial x^n}\left[\langle a_1^l \ a_1^m \ a_1^n\rangle (\cdot)\right]$$

$$c_1 = -\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\left\langle \frac{\partial a_1^l(x,t,\omega)}{\partial t}\right\rangle (\cdot)\right], \tag{1.32}$$

$$c_2 = -\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\left\langle \frac{\partial a_2^l(x,t,\omega)}{\partial t}\right\rangle (\cdot)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m}\left[\left\langle \frac{\partial a_1^l(x,t,\omega)}{\partial t} \ a_1^m(x,t,\omega)\right\rangle (\cdot)\right] \tag{1.33}$$

$$c_3 = -\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\left\langle \frac{\partial a_3^l(x,t,\omega)}{\partial t}\right\rangle (\cdot)\right] +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m}\left\{\left[\left\langle \frac{\partial a_1^l(x,t,\omega)}{\partial t} \ a_2^m(x,t,\omega)\right\rangle + \left\langle \frac{\partial a_2^l(x,t,\omega)}{\partial t} \ a_1^m(x,t,\omega)\right\rangle\right] (\cdot)\right\} -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^l \partial x^m \partial x^n} \left[\left\langle \frac{\partial a_1^l(x,t,\omega)}{\partial t} a_1^m(x,t,\omega)\, a_1^n(x,t,\omega) \right\rangle (\cdot) \right] . \tag{1.34}$$

Mając określone operatory c_1, c_2, c_3, b_1 oraz b_2 możemy przy ograniczeniu się do wyrazów rzędu ε^3 zapisać równanie (1.17a) w postaci:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \varepsilon c_1(g) + \varepsilon^2 \left[(c_2 - c_1 b_1)(g) \right] +$$

$$+ \varepsilon^3 \left\{ \left[c_3 - c_1 b_2 - (c_2 - c_1 b_1) b_1 \right] (g) \right\} \tag{1.35}$$

Zaniedbując w równaniu (1.35) ostatni człon prawej strony, zawierający ε^3, otrzymamy znane [7] równanie Fokkera-Plancka-Kołmogorowa dla równań dynamiki (1.1).

Przekształćmy operator $c_2 - c_1 b_1$

$$c_2 - c_1 b_1 = - \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \left[\int_0^t \left\langle \frac{F^l(x,t,\omega)}{\partial x^m} F^m(x,t_1,\omega) \right\rangle dt_1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial}{\partial x^m} \int_0^t \left\langle F^l(x,t,\omega)\, F^m(x,t_1,\omega) \right\rangle dt_1 \right] (\cdot) \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x^l} \left[\left\langle F^l(x,t,\omega) \right\rangle \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\int_0^t \left\langle F^m(x,t_1,\omega) \right\rangle dt_1 \right) (\cdot) \right] =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \left[\int_0^t \left\langle \frac{\partial F^l(x,t,\omega)}{\partial x^m} F^m(x,t_1,\omega) \right\rangle dt_1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\left\langle \frac{\partial F^l(x,t,\omega)}{\partial x^m} \right\rangle \int_0^t \left\langle F^m(x,t_1,\omega) \right\rangle dt_1 \right) \right] (\cdot) \right\} +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} \left\{ \left[\int_0^t \left\langle F^l(x,t,\omega)\, F^m(x,t_1,\omega) \right\rangle dt_1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left\langle F^l(x,t,\omega) \right\rangle \int_0^t \left\langle F^m(x,t_1,\omega)\, dt_1 \right] (\cdot) \right\} =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \left[\int_0^t K \left[\frac{\partial F^l(x,t,\omega)}{\partial x^m}, F^m(x,t_1,\omega) \right] dt_1 \right] (\cdot) \right\} +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^l} \left\{ \left[\int_0^t K \left[F^l(x,t,\omega), F^m(x,t_1,\omega) \right] dt_1 \right] (\cdot) \right\} , \tag{1.36}$$

gdzie symbol $K[\ ,\ ]$ oznacza korelację, tzn. $K[a,b] = \langle ab\rangle - \langle a\rangle\langle b\rangle$. We wzorze (1.36) obowiązuje umowa o sumowaniu.

Podstawiając (1.36) do (1.35) oraz opuszczając składnik przy ε^3 otrzymujemy:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\varepsilon \sum_{l=1}^{2N} \frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\left[\langle F^l(x,t,\omega)\rangle g\right] + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \sum_{m=1}^{2N} \left[\int_0^t K\left[\frac{\partial F^l(x,t,\omega)}{\partial x^m}, F^m(x,t_1,\omega)\right] dt_1\right] g\right\} +$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{m,l=1}^{2N} \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^l}\left\{\left[\int_0^t K\left[F^m(x,t,\omega), F^l(x,t_1,\omega)\right] dt_1\right] g\right\}. \tag{1.37}$$

Ponieważ

$$F^i(x,t,\omega) = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\psi}^i(x,t,\omega),$$

co wynika ze wzoru (1.2), przeto równania (1.37) można przepisać w postaci:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\sum_{l=1}^{2N} \frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\left[\langle \tilde{\psi}^l(x,t,\omega)\rangle g\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{2N}\left[\int_0^t K\left[\frac{\partial \psi^l(x,t,\omega)}{\partial x^m}, \tilde{\psi}^m(x,t_1,\omega)\right] dt_1\right] g\right\} +$$

$$+ \sum_{m,l=1}^{2N} \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^l}\left\{\left[\int_0^t K\left[\tilde{\psi}^m(x,t,\omega), \tilde{\psi}^l(x,t_1,\omega)\right] dt_1\right] g\right\}. \tag{1.38}$$

W przypadku, gdy prawe strony układu (1.1) są procesami stacjonarnymi w szerszym sensie, mamy:

$$K\left[\tilde{\psi}^m(x,t,\omega), \tilde{\psi}^l(x,t_1,\omega)\right] = \varphi_1^{ml}(x,t-t_1)$$

oraz

$$\sum_{m=1}^{2N} K\left[\frac{\partial \tilde{\psi}^l(x,t,\omega)}{\partial x^m} \cdot \tilde{\psi}^m(x,t_1,\omega)\right] = \varphi_2^{l}(x,t-t_1).$$

Podstawiając $t-t_1=\tau$ otrzymamy:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\sum_{l=1}^{2N}\frac{\partial}{\partial x^l}\left\{<\tilde{\psi}^l(x,t,\omega)>g + \left[\int_0^t \varphi_2^l(x,\tau)d\tau\right]g\right\} +$$

$$+\sum_{m,l=1}^{2N}\frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^l}\left\{\left[\int_0^t \varphi_1^{ml}(x,\tau)d\tau\right]g\right\}. \tag{1.39}$$

Musimy zdawać sobie sprawę z faktu obciążającego funkcję g wyznaczoną w wyniku całkowania równań (1.38) lub (1.39). Funkcja $g(x^1,\ldots,x^{2N}|t)$ obowiązuje dla przyrostów $q^i=\Delta q^i$. Im przyrost Δq^i jest mniejszy, tym dokładniej $g(x^1,\ldots,x^{2N}|t)$ przybliża rozkład właściwy.

Duże przyrosty procesów można scharakteryzować przyrostami mniejszymi. Ich suma stanowi przyrosty duże. W tym przypadku należy założyć, że proces wielowymiarowy jest jednorodnym procesem Markowa. Jeżeli małe przyrosty są statystycznie niezależne to zachodzi (równanie Smoluchowskiego):

$$g(x_2^1,\ldots,x_2^{2N}|\,t_2,t_1) =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} q(x_1^1,\ldots,x_1^{2N}|t_1)g(x_2^1,\ldots,x_2^{2N}|\,x_1^1,\ldots,x_1^{2N},\,t_2,\,t_1)\,\times$$

$$\times\, dx_1^1\cdots dx_1^{2N}, \tag{1.40}$$

przy czym:

$$g(x_2^1,\ldots,x_2^{2N}|\,x_1^1,\ldots,x_1^{2N},t_2,t_1) = g(x_2^1-x_1^1,\ldots,x_1^{2N}|t_2-t_1).$$

Widać zatem, że czyni się tu założenie co do jednorodności. Wystarczy więc określić $g(x^1,\ldots,x^{2N}|t) = g_{\xi^1,\ldots,\xi^{2N}}(x^1,\ldots,x^{2N}|t)$ przy dowolnych warunkach początkowych.

Wzór (1.40) uwzględnia podział przyrostu q^i na dwie części. Umożliwia on również podziały na dowolną ilość przyrostów. W celu określenia gęstości g należy całkować równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych w postaci (1.35) względnie (1.38). Zadanie to nie jest proste. Nieco prostsze zadanie stanowi rozwiązanie problemu stacjonarnego, tzn. przypadek gdy $\frac{\partial g}{\partial t}=0$. Przykłady rozwiązania problemu stacjonarnego można znaleźć np. w pracach [1, 3, 7].

Natomiast nie stanowi poważniejszej trudności wyprowadzenie tych (1.35) lub (1.38) równań, odpowiadających konkretnemu problemowi dynamiki układów.

Przykład

Niech będzie dany układ dynamiczny o skończonej liczbie stopni swobody z więzami holonomicznymi skleronomicznymi, opisany następującym układem równań:

$$\ddot{q}^i + \Gamma^i_{mn}\, \dot{q}^m \dot{q}^n = Q^i \qquad (i=1,\dots,N), \tag{a}$$

gdzie: Γ^i_{mn} są symbolami Christoffela II rodzaju, Q^i - kontrawariantnymi składowymi sił.

Załóżmy, że siły Q^i są procesami stochastycznymi. Natomiast parametry strukturalne układu uznamy za zdeterminowane.

Wprowadzając oznaczenia:

$$\dot{q}^i = q^{i+N}$$

otrzymamy równania o budowie:

$$\dot{q}^i = \tilde{\varphi}^i\,(q^1,\dots,q^{2N},t,\omega) \qquad (i=1,\dots,2N), \tag{b}$$

gdzie:

$$\tilde{\varphi}^i(q^1,\dots,q^{2N},t,\ ) = q^{i+N} \quad \text{dla } i = 1,\dots,N \text{ oraz}$$
$$\tilde{\varphi}^i(q^1,\dots,q^{2N},t,\ ) = -\Gamma^{i-N}_{mn}\, q^{m+N} q^{n+N} + Q^{i-N}(t,\ ) \text{ dla } i = N+1,\dots,2N. \tag{c}$$

Zanim wprowadzimy tak przyjętą konstrukcję równań różniczkowych ruchu do równań Fokkera-Plancka-Kołmogorowa przyjmiemy oznaczenie:

$$x^{i+N} = y^i \qquad (i=1,\dots,N) \tag{d}$$

Po wprowadzeniu tych oznaczeń napiszemy równanie (1.38) w postaci:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\sum_{l=1}^{N} y^l \frac{\partial g}{\partial q^l} + \sum_{l,r,s=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y^l}\left(\Gamma^l_{rs}\, y^r y^s\, g\right) +$$
$$+ \sum_{l,m=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial y^l \partial y^m}\left\{\left(\int_0^t K\left[Q^l(t,\omega),\ Q^m(t_1,\omega)\right] dt_1\right) g\right\}. \tag{e}$$

2. Propozycje metody bezpośredniej wyznaczenia gęstości

Szczegółowa dyskusja metody równań Fokkera-Plancka-Kołmogorowa sugeruje obranie odmiennej drogi - bezpośredniej - prowadzącej do określenia gęstości. Wyznaczenie gęstości wiąże się z wyznaczeniem funkcji charakterystycznej (1.8).

Korelacje występujące po prawej stronie zależności (1.8)posiadają własność:

$$K[\xi^{j_1},\ldots,\xi^{j_k}+\eta^{j_k},\ldots,\xi^{j_s}] = \,)$$

$$= K[\xi^{j_1},\ldots,\xi^{j_k},\ldots,\xi^{j_s}] + K[\xi^{j_1},\ldots,\eta^{j_k},\ldots,\xi^{j_s}] \tag{2.1}$$

dla dowolnego k, co bezpośrednio wynika ze wzoru (1.9).

Własność (2.1) jest istotna w przypadku, gdy procesy wyrażane są za pośrednictwem sum (patrz wzór (1.7)).

Korelacje posiadają jeszcze jedną własność, zachodzi bowiem:

$$K[\xi^{j_1},\ldots,\alpha\xi^{j_k},\ldots,\xi^{j_s}] = \alpha K[\xi^{j_1},\ldots,\xi^{j_k},\ldots,\xi^{j_s}], \tag{2.2}$$

gdzie $\alpha \in R$.

Jeżeli zatem $\Delta q^{j_k} = q^{j_k} = \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l a_l^{j_k}$, to na podstawie (2.1) oraz (2.2) wnioskujemy, że:

$$K\left[q^{j_k},\ldots,q^{j_s}\right] = \sum_{l_1,\ldots,l_s=1}^{\infty} \varepsilon^{l_1+\ldots+l_s} K\left[a_{l_1}^{j_1},\ldots,a_{l_s}^{j_s}\right]. \tag{2.3}$$

Spostrzeżenie (2.3) odegra ważną rolę przy wyznaczaniu gęstości,bowiem na podstawie tej zależności można określić funkcję charakterystyczną:

$$\Theta_{(q)}(u_1,\ldots,u_{2N}|t) =$$

$$= \exp \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{2N} \sum_{l_1,\ldots,l_s=1}^{\infty} \varepsilon^{l_1+\ldots+l_s} K\left[a_{l_1}^{j_1},\ldots,a_{l_s}^{j_s}\right]\left[u_{j_1}\ldots u_{j_s}\right]$$

) Wprowadzono tu oznaczenie

$$k^{j_1,\ldots,j_s} = K[\xi^{j_1},\ldots,\xi^{j_s}]$$

Wyznaczenie poszukiwanej gęstości $q_{q^1,\dots,q^{2N}}(x^1,\dots,x^{2N}\ t)$ polega na wykonaniu odwrotnej transformacji Fouriera. Przy wykonywaniu tej operacji posłużymy się metodą zademonstrowaną w poprzednim moim artykule [6], gdzie wprowadzono quasimomenty określone wzorem:

$$b^{j_1,\dots,j_s}(t) = k^{j_1,\dots,j_s}(+) + \\ + \sum_{n=2}^{s} \frac{1}{n!} \sum_{\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1}=1}^{s} \frac{s!\, H(c_n - \frac{1}{2}) B_{(n)}^{(j_1,\dots,j_s)}(t,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})}{c_n!\,\vartheta_1!\dots\vartheta_{n-1}!} \tag{2.5}$$

gdzie: $c_n = s - \sum_{i=1}^{n-1} \vartheta_i$, $H(\,.\,)$ jest funkcją Heaviside'a oraz

$$B_{(n)}^{(j_1,\dots,j_s)}(t,\ \vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})$$

jest częścią symetryczną wyrażenia

$$B_{(n)}^{j_1,\dots,j_s}(t,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1}) = k^{j_1,\dots,j_{s-b_{1\dots}}^{(n)}}\ k^{j_s-b_{n-1}^{(n)}+1,\dots,j_s}$$

gdzie $b_k^n = \sum_{i=k}^{n-1} \vartheta_i$.

Wprowadzając quasimomenty można [6] przekształcić wzór (2.4) do postaci:

$$\Theta_{(q)}(u_1,\dots,u_{2N}|t) = \exp\left[i \sum_{j_1=1}^{2N} k_{(q)}^{j_1}(t)u_{j_1} - \frac{1}{2} \sum_{j_1,j_2=1}^{2N} k_q^{j_1 j_2}(t)u_{j_1}u_{j_2} \right]$$

$$\times \left[1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{j_1,\dots,j_s=1}^{2N} b_q^{j_1,\dots,j_s}(t)u_{j_1}\dots u_{j_s} \right], \tag{2.6}$$

w naszym przypadku:

$$k_{(q)}^{j_1}(t) = \sum_{l_1=1}^{\infty} \varepsilon^{l_1} K\left[a_{l_1}^{j_1}\right] = \sum_{l_1=1}^{\infty} \varepsilon^{l_1} \langle a_{l_1}^{j_1} \rangle \tag{2.7}$$

$$k_{(q)}^{j_1 j_2}(t) = \sum_{l_1,l_2=1}^{\infty} \varepsilon^{l_1+l_2} K\left[a_{l_1}^{j_1},\ a_{l_2}^{j_2}\right], \tag{2.8}$$

$$b_{(q)}^{j_1 j_2 j_3}(t) = \sum_{l_1, l_2, l_3 = 1}^{\infty} \varepsilon^{l_1+l_2+l_3} K\left[a_{l_1}^{j_1}, a_{l_2}^{j_2}, a_{l_3}^{j_3}\right] \tag{2.9}$$

$$b_{(q)}^{j_1 j_2 j_3 j_4}(t) = \sum_{l_1, \ldots, l_4 = 1}^{\infty} \varepsilon^{l_1+\ldots+l_4} K\left[a_{l_1}^{j_1}, \ldots, a_{l_4}^{j_4}\right]. \tag{2.10}$$

$$b_{(q)}^{j_1, \ldots, j_5}(t) = \sum_{l_1, \ldots, l_5 = 1}^{\infty} \varepsilon^{l_1+\ldots l_5} K\left[a_{l_1}^{j_1}, \ldots, a_{l_5}^{j_5}\right]. \tag{2.11}$$

$$b_{(q)}^{j_1, \ldots, j_6}(t) = \sum_{l_1, \ldots, l_6 = 1}^{\infty} \varepsilon^{l_1+\ldots+l_6} \left\{ K\left[a_{l_1}^{j_1}, \ldots, a_{l_6}^{j_6}\right] + \right.$$

$$\left. + 10\, B_{(2)}^{(j_1, \ldots, j_6)}(t,3) \right\}, \tag{2.12}$$

gdzie: $B_{(2)}^{j_1, \ldots, j_6}(t,3) = K\left[a_{l_1}^{j_1}, \ldots, a_{l_3}^{j_3}\right] K\left[a_{l_4}^{j_4}, \ldots, a_{l_6}^{j_6}\right]$.

Dalsze quasimomenty ustala się podobnie na podstawie wzoru (2.5). Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa określimy przez wykonanie na (2.6) odwrotnej transformacji Fouriera

$$g_{q^1, \ldots, q^{2N}}(x^1, \ldots, x^{2N} | t) =$$

$$= \left\{ 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{j_1, \ldots, j_s = 1}^{2N} b_q^{j_1, \ldots, j_s}(t) \prod_{k=1}^{s} \left(- \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right) \right\} \times$$

$$\times\, \tilde{g}_{q^1, \ldots, q^{2N}}(x^1, \ldots, x^{2N} t) \tag{2.13}$$

gdzie:

$$\tilde{g}_{q^1, \ldots, q^{2N}}(x^1, \ldots, x^{2N} | t) = \frac{1}{(2\pi)^N \sqrt{\det k_{(q)}^{j_1 j_2}(t)}}$$

$$\exp\left[- \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2 = 1}^{2N} k_{(q) j_1 j_2}(t) (x^{j_1} - k_{(q)}^{j_1}(t))(x^{j_2} - k_{(q)}^{j_2}(t)) \right] \tag{2.14}$$

$$\left[k_{(q)j_1j_2}(t)\right] = \left[k^{j_1j_2}_{(q)}(t)\right]^{-1}$$

Widzimy zatem, jak można określić gęstość rozkładu przyrostów Δq^i. W zależności od konkretnego przypadku (stopnia dokładności przybliżenia (1.7)) rozkład określony wzorem (2.13) możemy uważać za dobry w większym lub mniejszym otoczeniu punktu startu (warunki początkowe). Rozszerzenie ważności rozkładu jest możliwe przez założenie, że proces jest typu Markowa o przyrostach niezależnych oraz przez wykorzystanie równania Smoluchowskiego (1.40).

Na zakończenie należy podać dość istotny wniosek. Wynik naszych rozważań dobitnie wskazuje na celowość poszukiwania gęstości metodą "bezpośrednią" a nie przez całkowanie równań Fokkera-Plancka-Kołmogorowa. Co więcej, można postawić tezę, że rozwiązania równań cząstkowych typu Fokkera-Plancka-Kołmogorowa można poszukiwać w klasie funkcji określonych równaniem (2.13).

Przedstawione ujęcie zagadnień nieliniowych bazuje na przyjętej metodzie poszukiwania rozwiązania. Każda inna metoda od tej, jaką tu wykorzystano, może być podstawą do analogicznego wyznaczenia funkcji charakterystycznej, a następnie gęstości.

LITERATURA

[1] Crandall S.H. (Editor): Ranfom vibration, vol. 2 Massachusetts Institute of Technology Cambridge. Massachusetts 1963.

[2] Gichman I.I., Skorochod A.W.: Wstęp do teorii procesów stochastycznych, PWN, Warszawa 1968.

[3] Skalmierski B., Tylikowski A.: Procesy stochastyczne w dynamice, PWN, Warszawa 1972.

[4] Skalmierski B.: Mechanika z wytrzymałością materiałów dla automatyków PWN, Warszawa 1973.

[5] Skalmierski S.: Wielowymiarowe zagadnienia przewyższania. Zeszyty Naukowe Pol.Sl., s. Mat.-Fiz. z. 28 Gliwice 1977.

[6] Skalmierski B.: Problemy przewyższenia w układach dynamicznych. Zeszyty Naukowe Pol.Sl., s. Mat.-Fiz. z. 29, Gliwice, 1978.

[7] Stratonowicz R.L.: Izbrannyje woprosy teorii fluktuacji w radiotechnikie. Izdatielstwo "Sowietskoje Radio", Moskwa 1961.

ПРОБЛЕМЫ ПРЕВЫШЕНИЙ В ДИНАМИКЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В работе обсуждаются проблемы "переноса" через нелинейные системы со многими степенями свободы, совместной плотности вероятности положений и скоростей.

Затрагивается аспект диффузионных уравнений, а также предлагается новый метод, называемый здесь непосредственным, определения плотности.Обсуждаемые проблемы являются существенными с точки зрения исследования проблемы превышений входных сигналов в многомерных нелинейных системах.

SURPASSING PROBLEMS IN THE DYNAMICS OF NONLINEAR SYSTEMS

S u m m a r y

In the paper some problems of transmision through the nonlinear systems of all probability density of positions rates has been discussed.

The diffusion equations aspects have been touched on and a new method, called in the paper a direct method to determine density has been proposed. These problems are essential from the point of view of investigations of input signals surpassing in multidimensional nonlinear systems.