ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: Matematyka-Fizyka z. 29 Nr kol. 559

Lesław SOCHA

Instytut Mechaniki Teoretycznej -
Politechnika Śląska

STABILNOSC STOCHASTYCZNA UKŁADÓW WIELOWYMIAROWYCH

Streszczenie. W pracy podano kryteria stabilności stochastycznej z prawdopodobieństwem 1 dla pewnej klasy układów wielowymiarowych nieliniowych, na wejścia których działają białe szumy. Otrzymane wyniki zilustrowano przykładem.

Wstęp

Zagadnienie stabilności stochastycznej jest obecnie bardzo intensywnie rozwijane. W ostatnich latach zaczęto stosować do badania stabilności stochastycznej częstotliwościowe kryteria. Przy ich pomocy badano stabilność układów dynamicznych z jedną nieliniowością poddanach działaniu białego szumu [4-7]. Niniejsza praca jest próbą rozszeszenia tych wyników na układy z wieloma nieliniowościami.

Wykorzystuje się tutaj wyniki otrzymane przez Jakubowicza dla układów deterministycznych.

Postawienie problemu

Rozważmy nieliniowy układ dynamiczny opisany równaniem:

$$dx = [Ax + b\varphi]\,dt + D(x)\,dw(t), \quad \sigma = c^T x, \tag{1}$$

gdzie:

- A, b, c - stałe rzeczywiste macierze o wymiarach odpowiednio $n \times n$, $n \times \vartheta$, $n \times m$
- $D(x)$ - macierz szumów o wymiarach $n\ n$
- $w(t)$ - n-wymiarowy proces Wienera
- x - wektor stanu o wymiarach $n \times 1$
- $\sigma = [\sigma_j]$ - wektor wejść o wymiarach $m \times 1$
- $\varphi = [\varphi_j]$ - wektor wyjść o wymiarach $\vartheta \times 1$.

W dalszej części pracy będziemy korzystali z wyników uzyskanych przez Jakubowicza dla deterministycznej części układu, tzn.:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\varphi, \quad \sigma = c^T x. \tag{1'}$$

Macierzową funkcję przejścia liniowej części układu określamy jako macierz o wymiarach $m\,\vartheta$

$$K(s) = c^T (A - sI)^{-1}\, b = [K_{jh}(s)], \tag{2}$$

gdzie wejściami są σ_1, σ_m, a wyjściami φ_1, φ_ϑ I - jest macierzą jednostkową.

Układ (1') możemy zapisać w postaci:

$$\sigma = - K(s)\varphi, \quad (s = \frac{d}{dt}) \tag{3}$$

lub w postaci skalarnej

$$\sigma_j + \sum_{n=1}^{\vartheta} K_{jh}(s)\varphi_n = 0, \quad j = 1\ldots m. \tag{4}$$

Występujące we wzorach (3) i (4) wielkości σ i φ, w odróżnieniu od wielkości σ i φ występujących w układzie (1'), są transformatami Laplace'a wielkości $\sigma(t)$ i $\varphi[\sigma(t)]$.

Będziemy zakładać, że można zbudować jednorodne formy kwadratowe Q_j względem wejść σ_j i wyjść φ_j, które będą spełniać warunki:

$$Q_j = 0 \text{ dla } j = 1,\ldots,k_1, \quad Q_j \geq 0 \text{ dla } j = k_1 + 1,\ldots,k. \tag{5}$$

Przykład ilustrujący budowę takich form kwadratowych z wykorzystaniem do badania stabilności zamieszczono w dalszej części pracy. Inne liczne przykłady takich form można znaleźć w pracy Jakubowicza [1].

Każdej z form Q_j przyporządkujemy pewien parametr rzeczywisty τ_j, przy czym dla $j = 1,\ldots,k_1$ jest on dowolny, a dla $j = k_1+1,\ldots,k$ $\tau_j > 0$ i te τ_j będziemy nazywali dopuszczalnymi. Określimy nową formę kwadratową $Q(\varphi,\sigma) = \sum_{j=1}^{k} \tau_j Q_j$, którą można przedstawić w postaci:

$$Q(\varphi,\sigma) = \sum_{j,h=1}^{\vartheta} \alpha_{jn}\varphi_j\varphi_n + 2\sum_{j=1}^{\vartheta}\sum_{n=1}^{m} \beta_{jn}\varphi_j\sigma_n + \sum_{j,n=1}^{m} \gamma_{jn}\sigma_j\sigma_n \,. \tag{6}$$

Z warunków (5) wynika, że $Q(\varphi,\sigma) \geq 0$ przy wszystkich dopuszczalnych τ_j. Równość (6) jest określona dla $\varphi = [\varphi_j]$, $\sigma = [\sigma_h]$, gdy są one zmiennymi rzeczywistymi. Rozszerzymy ją teraz na przypadek, gdy są one zmiennymi zespolonymi, przy czym formą Q będzie hermitowska.

$$Q(\varphi,\sigma) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{j,h=1}^{\vartheta} \alpha_{jh}\varphi_j\varphi_h^{*} + 2 \sum_{j=1}^{\vartheta} \sum_{j=1}^{m} \beta_{jh}\varphi_j\sigma_h + \sum_{j,h=1}^{m} \gamma_{jh}\sigma_j\sigma_h^{*}\Big), \tag{7}$$

gdzie gwiazdką oznaczono zespolone sprzężenie.
Jednoznaczność takiego rozszerzenia została pokazana w [1].

Wprowadzimy jeszcze jedno oznaczenie:

$$Q(s,\varphi) = Q(\varphi, -K(s)\varphi). \tag{8}$$

Definicja 1

Rozwiązanie $x = 0$ jest stabilne z prawdopodobieństwem 1 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\rho>0} \bigvee_{\delta(\varepsilon,\rho)>0} \|x_0\| \ll \delta(\varepsilon,\rho) \Rightarrow P_{x_0}\Big\{\sup_{t\geq 0} \|x(t)\| \geq \varepsilon\Big\} \leq \rho \tag{9}$$

Definicja 2

Rozwiązanie $x = 0$ jest asymptotycznie stabilne z prawdopodobieństwem 1 wtedy i tylko wtedy, gdy jest stabilne z prawdopodobieństwem 1 i $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ z prawdopodobieństwem 1 dla wszystkich x_0 z pewnego obszaru zawierającego początek układu współrzędnych.

Podamy teraz dwa twierdzenia Jakubowicza, z których będziemy korzystać w dalszej części pracy.

Twierdzenie Jakubowicza I

Załóżmy, że w układzie (1') A jest macierzą, której wartości własne spełniają warunek: $\mathrm{Re}\,\lambda(A) < \alpha_0 \leq 0$ oraz spełniony jest warunek (5). Niech forma $Q(0,\sigma) \geq 0$ dla wszystkich σ i forma $Q' = Q'(-\alpha_0 + i\omega, \varphi) < 0$ dla wszystkich φ_j i $(-\infty \leq \omega \leq +\infty)$ i dla pewnych dopuszczalnych wartości τ_j. Wtedy:

$$|x(t)| \leq c\, e^{-(\varepsilon+\alpha_0)(t-t_0)} \cdot |x(t_0)|, \tag{10}$$

gdzie stałe c, ε nie zależą od nieliniowości φ_j.

Twierdzenie Jakubowicza II

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia poprzedniego, przy czym forma Q' spełnia zależność: $Q'(-\alpha_0 + i\omega, \varphi) \leq 0$ dla wszystkich φ_j i $(-\infty \leq \omega \leq +\infty)$ oraz rząd macierzy $\beta = [\beta_{jh}]$ we wzorze (7) wynosi m, rzędy macierzy

$\Phi = [b, Ab, \dots A^{n-1}b]$, $\Psi = [c, A^T c, \dots A^{T\,n-1} c]$ wynoszą n, wówczas rozwiązanie x(t) układu (1') spełnia oszacowanie (10).

W dowodach tych twierdzeń pokazuje się istnienie macierzy $H = H^T$ takiej, że dla dowolnego rozwiązania układu 1' spełniony jest warunek:

$$\dot{V} \leqslant -2\alpha_0 V \tag{11}$$

gdzie:

$$V = x^T H x \tag{12}$$

$\dot{V}$ - pochodna wzdłuż trajektorii rozwiązania układu (1').

Mamy bowiem:

$$\dot{V} + 2\alpha_0 V = \left[2x^T H(Ax + b\varphi) + 2\alpha_0 x^T Hx + Q(\varphi,\sigma)\right] - Q(\varphi,\sigma) =$$

$$= -\left[x^T Gx + 2x^T g\varphi + \varphi^T \alpha\varphi\right] - Q(\varphi,\sigma), \tag{13}$$

gdzie

$$-G = H(A' + \alpha_0 I) + (A + \alpha_0 I)^T H + c\gamma c^T \tag{14}$$

$$-g = Hb + c\beta^* . \tag{15}$$

Ponieważ $Q(\varphi,\sigma) \geqslant 0$, z pozostałych założeń wynika, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym (13) jest dodatnio określone dla wszystkich x i φ.

W dalszej części pracy będziemy zakładać, że:

$$\bigwedge_x \operatorname{tr}\left\{D(x)D^T(x)\,H\right\} \leqslant d^2 x^T Hx, \tag{16}$$

gdzie: tr - operacja śladu macierzy, d - stała rzeczywista dodatnia.

Związek ten zachodzi np. gdy $D(x) = xD^T$, (D - stała macierz), wówczas:

$$\operatorname{tr}\left\{D(x)D^T(x)\,H\right\} = x^T Hx \operatorname{tr}\left\{D\,D^T\right\}, \quad \text{czyli} \quad d^2 = \operatorname{tr}\left\{D\,D^T\right\}. \tag{17}$$

Z poczynionych założeń o układzie (1) na mocy [2] i [3] wynika, że układ (1) posiada rozwiązanie, które jest silnym procesem Markowa. Z założeń tych i dodatkowo z warunku $LV < 0$ wynika asymptotyczna stabilność z prawdopodobieństwem 1 układu (1), gdzie operator L jest określony wzorem:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + (Ax + b\varphi)^T \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{D(x)D^T(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial x}\right\}, \tag{18}$$

a V jest określone wzorem (12).

Twierdzenie

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia Jakubowicza oraz spełniona jest nierówność (16), wówczas warunkiem wystarczającym stabilności stochastycznej z prawdopodobieństwem 1 jest następująca nierówność:

$$\alpha_0 > \frac{1}{2} d^2. \tag{19}$$

Dowód jest prostym wnioskiem z przeprowadzonych rozważań.

Na mocy twierdzenia Jakubowicza $V < -2\alpha_0 V$ stąd

$$LV = \dot{V} + \mathrm{tr}\left\{D(x)D^T(x)H\right\} \leqslant -2\left(\alpha_0 - \frac{1}{2} d^2\right)V. \tag{20}$$

Zastosowanie powyższego twierdzenia przedstawimy na przykładzie układu z dwoma nieliniowymi blokami, dla którego stabilność wykładnicza części deterministycznej była badana w [1].

Przykład

Rozważmy układ opisany równaniem:

$$dx = Ax + b\varphi\, dt + xB^T\, dw(t), \quad \sigma = c^T x, \tag{21}$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} c_1, & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

a_i, b_i, c_i, B_i - stałe rzeczywiste i dodatnie

$$\varphi_1 = \psi\sigma_1, \quad \varphi_2 = \psi^2\sigma, \tag{23}$$

gdzie ψ - dowolna funkcja spełniająca nierówność:

$$0 \leqslant \psi \leqslant \varkappa$$

Na przykład funkcja ψ ma postać:

$$\begin{aligned} \psi &= \sigma_1^2, \quad \text{gdy } 0 \leqslant \sigma_1^2 \leqslant \varkappa \\ \psi &= \varkappa, \quad \text{gdy } \sigma_1^2 > \varkappa \end{aligned} \tag{24}$$

Podstawiając $\mu_1 = \frac{\varphi_1}{\sigma_1}$, $\mu_2 = \frac{\varphi_2}{\sigma_2}$ otrzymujemy, że punkt $\mu_1 = \psi(\sigma_1)$, $\mu_2 = [\psi(\sigma_1)]^2$ opisuje przy $(-\infty<\sigma_1<\infty)$ łuk paraboli $\mu_2 = \mu_1^2$ od punktu (0,0) do punktu (γ, γ^2), stąd warunek:

$$Q_1 = (\varphi_2 \sigma_1 - \varphi_1^2) = 0 \tag{25}$$

Warunek ten jednak zachodzi niezależnie od (24) i dlatego trzeba dorzucić drugi dodatkowy, uwzględniający np. nierówność $\mu_2 \leqslant \mu_1 \cdot \gamma_2$

$$Q_2 = (\gamma\varphi_1 - \varphi_2)\,\sigma_1 \geqslant 0. \tag{26}$$

Miejsca geometryczne punktów spełniających zależności (23) i (24) oraz (25) i (26) pokrywają się.

Z (22) wynika, że funkcja przejścia K(s) jest postaci:

$$K(s) = \Bigg[\underbrace{\frac{-b_1(a_1+s)}{s^2+a_1s+a_2}}_{K_1(s)}, \underbrace{\frac{-b_2s-(a_1b_2+b_3)}{s^2+a_1s+a_2}}_{K_2(s)}\Bigg]. \tag{27}$$

Niech $4\,a_2 > a_1^2$ i $\alpha_o < \frac{a_1}{2}$ (28)

Wówczas bieguny funkcji przejścia leżą w półpłaszczyźnie:

$$\operatorname{Re} s < -\alpha_o < 0. \tag{29}$$

Przyjmiemy

$$Q = \tau_1 Q_1 + \tau_2 Q_2 \tag{30}$$

Wówczas:

$$Q' = Q = \tau_1 \left[\operatorname{Re}(\varphi_2 \sigma^*) - |\varphi_1|^2\right] + \tau_2 \operatorname{Re}\left[(\gamma\varphi_1 - \varphi_2)\sigma^*\right] \tag{31}$$

gdzie $\sigma = -K_1(s)\,\varphi_1 - K_2(s)\,\varphi_2$ (dla zespolonego s). (32)

Warunek rzędu h sprowadza się do warunku:

$$|\tau_1| + |\tau_2| \neq 0, \tag{33}$$

rząd macierzy Φ i Ψ wynosi 2.

Natomiast warunek $Q(0,\sigma) \geqslant 0$ jest spełniony, bowiem $Q(0,\sigma) = 0$ (34)

Zbadamy warunek niedodatniości formy Q'.

Wykorzystując zależność (32) i podstawiając do (31) otrzymujemy:

$$- Q' = \tau_1 \left|\varphi_1\right|^2 + \mathrm{Re}\left\{\left[(\tau_1-\tau_2)K_1 K_2^{-1} - \tau_2\gamma\right]\varphi_1 \sigma^*\right\} + (\tau_1-\tau_2)\mathrm{Re}\left(\frac{1}{K_2}\right)|\sigma|^2. \tag{35}$$

Podstawiając $\tau = \frac{\tau_2}{\tau_1}$ otrzymujemy z (35) dla $K_i = K_i(s)$, $s = -\alpha_0 + i\omega$ $(-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty)$ następujące warunki:

$$\tau_1 > 0, \quad 4(\tau_1 - 1)\mathrm{Re}\, K_2 - \left|(1-\tau)K_1 - \tau\gamma K_2\right|^2 \geqslant 0. \tag{36}$$

Ta druga nierówność powinna być spełniona dla pewnego $\tau > 0$ i wszystkich $\omega \neq \pm\infty$.

Przekształcając (36) do postaci:

$$a(\omega)\tau^2 - 2\, b(\omega)\tau + c(\omega) \leqslant 0, \tag{37}$$

gdzie: $a(\omega) = \left|\gamma K_2 + K_1\right|^2$, $b(\omega) = -2\,\mathrm{Re}\, K_2 + \left|K_1\right|^2 + \gamma\,\mathrm{Re}\,(K_2 K_1^*)$

$c(\omega) = \left|K_1\right|^2 - 4\,\mathrm{Re}K_2$, $K_i = K_i(-\alpha_0 + i\omega)$.

Załóżmy, że $a(\omega) \neq 0$.
Nierówność (36) jest spełniona chociażby dla jednego $\tau > 0$, jeśli

$$b^2(\omega) \geqslant a(\omega)c(\omega), \quad \inf \tau_1(\omega) \quad \sup \tau_2(\omega) \geqslant 0, \tag{38}$$

gdzie:

$$\tau_{1,2}(\omega) = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Warunek (16) sprowadza się w naszym przykładzie do warunku (17), tzn.:

$$\mathrm{tr}\left\{x\, B^T B x^T\, H\right\} = \mathrm{tr}\left\{BB^T\right\} x^T H x = (B_1^2 + B_2^2)x^T H x, \tag{39}$$

tzn.:

$$d^2 = B_1^2 + B_2^2. \tag{40}$$

Wobec tego, jeśli spełnione są warunki (28), (38) oraz

$$\alpha_0 > \frac{1}{2}(B_1^2 + B_2^2), \quad \text{czyli} \quad a_1 > (B_1^2 + B_2^2),$$

to układ 21 jest asymptotycznie stabilny z prawdopodobieństwem 1.

Uwagi końcowe i wnioski

Zamieszczone w pracy twierdzenie jak i przykład pokazują, że dla pewnej klasy układów nieliniowych przy wyznaczaniu warunków stabilności stochastycznej nie jest konieczne znajdowanie funkcji Lapunowa postaci (12), można się bowiem posłużyć kryteriami częstotliwościowymi.

Warto zaznaczyć, że badaniem stabilności stochastycznej wielowymiarowych układów przedstawionych w pracy zajmowali się Tunik i Liczak [8], przy czym występujący proces stochastyczny w układzie działał w sposób multiplikatywny na macierz b.

LITERATURA

[1] Jakubowicz W.A.: Czastotnyje usłowia absolutnoj ustojcziwosti sistiem uprawlenia s nieskolkimi nieliniejnimi ili liniejnimi niestacjonarnymi blokami, Awtomatika i Telemiechanika T. XXVIII, No 6 1967.

[2] Chaśminskij R.Z.: Ustojcziwost sistiem diffierencjalnych urawnienij pri słuczajnych wozmuszczeniach ich parametrow, Nauka, Moskwa 1969.

[3] Kushner H.J.: Stochastic Stability and Control, New York, Academic Press 1967.

[4] Machalanabis A.K., Purksyastha S.: Frequency-Damain Criteria for Stabilita of a Class of Nonlinear Stochastic Systems, IEEE Transaction on Automatic Control vol. AC-18 No 3 1973.

[5] Lewit M.W.: Czastotnyj kriterij absolutnoj stochasticzeskoj ustojcziwosti nieliniejnych sistiem diffierencjalnych urawnienij Ito,Usp.Mat. Nauk T. 27, No 4, 1972.

[6] Shibata H., Hata S.: Weak Stochastic Stability for the Lur'e Type Nonlinear Systems, IEEE Transaction on Automatic Control vol AC-16 1971.

[7] Willems J.L.: Lyapunov functions and global frequency domain stability criteria for a class of stochastic feedback systems, presented at the IUTAM Symp, Univ, Warwick Coventry, Warwickshire, U.K.July 1972.

[8] Liczak M.N., Tunik A.A.: Czestotnyje usłowia stochastyczeskoj ustojcziwosti sistiem, Awtomatika, No 2, Kijów 1971.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В статье представлены критерии стохастической стабильности с вероятностю I для известного класса нелинейных многомерных систем, на входы которых действуют белые шумы. Полученные результаты проиллюстрированы примером.

STOCHASTIC STABILITY OF MULTIDIMENSIONAL SYSTEMS

S u m m a r y

The criterion of stochastic stability with probability one of nonlinear multidimensional Systems is presented. It is assuned that inputs are driven by white maises. An example is given to ilustrate the applications of the results of the paper.