ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: Matematyka-Fizyka z. 29 Nr kol. 559

Janusz SZOPA
Instytut Mechaniki Teoretycznej -
Politechnika Śląska

WARIANCJA ROZWIĄZANIA STOCHASTYCZNEGO LINIOWEGO RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO W PRZYPADKU WYMUSZENIA BĘDĄCEGO SUMĄ ZMIENNYCH LOSOWYCH

Streszczenie. W pracy wyprowadzono wzory na wariancję stochastycznego liniowego równania różniczkowego, gdy wymuszeniem jest proces będący sumą zmiennych losowych. Wykorzystano stochastyczne równania całkowe Valterry II rodzaju. Rozpatrzono sumę skończoną i nieskończoną zmiennych losowych oraz oszacowano różnicę wariancji liczonych dla obu przypadków.

W pracach [2, 3, 4] zaproponowano stosowanie równań całkowych do badania charakterystyk probabilistycznych układów o zmiennej inercji w przeciwieństwie do metody impulsowej funkcji przejścia [1], nieefektywnej w tym przypadku.

Rozważać będziemy stochastyczne liniowe równanie różniczkowe postaci:

$$a_n(t)\,\frac{d^n y(t,\omega)}{dt^n} + \ldots + a_1(t)\,\frac{dy(t,\omega)}{dt} + a_0(t)y(t,\omega) = P(t,\omega) \tag{1}$$

gdzie: (i) $a_i(t)$ dla $i = 0,1,\ldots,n$ są rzeczywistymi, mierzalnymi funkcjami argumentu $t\in[0,T]$ i $T<\infty$,

(ii) $y(t,\omega)$ i $P(t,\omega)$ są rzeczywistymi, mierzalnymi procesami stochastycznymi $\omega\in\Omega$, $t\in[0,T]$ i $T<\infty$,

(iii) $P(t,\omega)$ jest ciągłym procesem rzędu drugiego.

Ciągłość, pochodne procesu i znak równości w (1) są rozumiane w sensie średnio kwadratowym [1].

Wykorzystując powyższe założenia odnośnie procesu $P(t,\omega)$ można przedstawić go w postaci szeregu (patrz [1]):

$$P(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(\omega)\cdot\varphi_k(t), \tag{2}$$

zbieżnego w sensie średnio kwadratowym przy każdym $t\in[0,T]$; przy czym Z_k są zmiennymi losowymi takimi, że

$$E\left[Z_k(\omega)\cdot Z_l(\omega)\right] = 0, \quad k \neq l$$
$$E\,Z_k^2 = \omega_k \tag{3}$$

gdzie ω_k i $\varphi_k(t)$ są odpowiednio wartościami własnymi i funkcjami własnymi równania całkowego

$$\omega \cdot \varphi(t) = \int_0^T K_P(t,u)\varphi(u)du \tag{4}$$

a $K_P(t,u)$ - funkcją korelacji procesu $P(t,\omega)$.

W dalszej części będziemy zakładać, że szereg (2) jest skończony. Może to być spowodowane aproksymacją $P(t,\omega)$, sumą skończoną lub założeniem o takiej postaci tego procesu bez wykorzystania zacytowanego twierdzenia, pozwalającego przedstawić wg (2) dowolny proces. Przyjmiemy:

$$P_N(t,\omega) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{N} Z_k(\omega) \cdot \varphi_k(t), \; N<\infty \tag{5}$$

przy założeniach (3).

Zakładając zdeterminowane warunki początkowe dla (1) można wyprowadzić wzór na wariancję $\sigma^2_{y_N}(t)$ przy wykorzystaniu stochastycznego równania całkowego Volterry II rodzaju [2, 3, 4].

Zakładając, że wartość średnia $E\,P_N(t,\omega) = 0$, funkcja korelacji dla (5) wynosi:

$$K_{P_N}(t_1,t_2) = \sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \varphi_k(t_1)\varphi_k(t_2), \tag{6}$$

dlatego też (wg [2, 3]):

$$\sigma^2_{y_N}(t) = \int_0^t \int_0^t \frac{(t-u_1)^{n-1}\cdot(t-u_2)^{n-1}}{[(n-1)!]^2\, a_n(u_1)a_n(u_2)} K_{x_N}(u_1,u_2)du_2du_1, \tag{7}$$

gdzie:

$$K_{x_N}(t_1,t_2) = \sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \varphi_k(t_1)\varphi_k(t_2) - \sum_{k=1}^{N} \omega_k\cdot\varphi_k(t_2) \cdot \int_0^{t_1} R(t_1,u_1)\cdot\varphi_k(u_1)du_1 -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \omega_k\cdot \varphi_k(t_1)\cdot \int_0^{t_2} R(t_2,u_2)\cdot\varphi_k(u_2)du_2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \omega_k \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R(t_1,u_1)R(t_2,u_2)\cdot\varphi_k(u_1)\varphi_k(u_2)du_2du_1, \tag{8}$$

natomiast

$$R(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{n+1}(t,u) \quad (u \leqslant t) \tag{9}$$

oraz

$$K_1(t,u) \stackrel{df}{=} \left[a_{n-1}(t)+\ldots+ a_{n-k}(t) \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!}+\ldots+ a_0(t) \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\frac{1}{a_n(u)} \tag{10}$$

$$K_{n+1}(t,u) \stackrel{df}{=} \int_u^t K_n(t,s)K_1(s,u)ds \tag{11}$$

$n = 1,2,\ldots$

Jeśli (5) jest aproksymacją (2) to można obliczyć błąd, z jakim otrzymuje się wariancję (7).

Niech C^2 oznacza zbiór wszystkich funkcji mierzalnych $x:[0,T]\times\Omega \to R$ takich, że $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|x(t,\omega)\|_2<\infty$, gdzie:

$$\|{-}{-}{-}{-}\|_2 \stackrel{df}{=} \left\{\int_{\Omega} |{-}{-}{-}{-}|^2 \, d\mu(\omega)\right\}^{1/2}.$$

C^2 jest przestrzenią Banacha (do której przynależy wyżej zdefiniowany proces $P(t,\omega)$ z normą:

$$\|x(t,\omega)\|_{C^2} \stackrel{df}{=} \sup_{t\in[0,T]}\left\{ \|x(t,\omega)\|_2\right\} \tag{12}$$

Zakładając, że:

$$\|P(t,\omega)- P_N(t,\omega)\|_{C^2} = \left\|\sum_{k=N+1}^{\infty} Z_k(\omega)\cdot\varphi_k(t)\right\|_{C^2}\leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \|Z_k(\omega)\cdot\varphi_k(t)\|_{C^2}\leqslant\varepsilon \tag{13}$$

jest

$$\bigwedge_{t_1,t_2\in[0,T]} |K_P(t_1,t_2)-K_{P_N}(t_1,t_2)|\leqslant\varepsilon^2 \tag{14}$$

a stąd wg (8)

$$\bigwedge_{t_1,t_2\in[0,T]} |K_x(t_1,t_2)-K_{x_N}(t_1,t_2)|\leqslant\varepsilon^2\cdot\Big[1-\int_0^{t_1} R(t_1,u_1)du_1-\int_0^{t_2} R(t_2,u_2)du_2 +$$

$$+\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R(t_1,u_1)R(t_2,u_2)du_2du_1\Big]. \tag{15}$$

Przyjmując $[....] \stackrel{df}{=} A(t_1,t_2)$ i korzystając z (7) jest:

$$\bigwedge_{t_1,t_2\in[0,T]} \left|\sigma_y^2(t) - \sigma_{y_N}^2(t)\right| \leqslant \varepsilon^2 \cdot \int_0^t \int_0^t \frac{(t-u_1)^{n-1}\cdot(t-u_2)^{n-1}}{[(n-1)!]^2 a_n(u_1)a_n(u_2)} A(u_1,u_2)du_2du_1 \qquad (16)$$

Przy założeniu, że $\bigwedge_{t,u\in[0,T]} |K_1(t,u)| \leqslant M<\infty$, otrzymuje się z (11) oszacowanie:

$$\bigwedge_{t,u\in[0,T]} |K_{n+1}(t,u)| \leqslant M^{n+1}\frac{(t-u)^n}{n!} \qquad (17)$$

a stąd wg (9):

$$\bigwedge_{t,u\in[0,T]} |R(t,u)| \leqslant M.e^{M.(t-u)}<\infty \qquad (18)$$

co gwarantuje skończoną wartość wyrażenia w nawiasie [....], występującego w (15) oraz całki podwójnej w (16), o ile:

$$\bigwedge_{t\in[0,T]} \int_0^t \int_0^t \frac{(t-u_1)^{n-1}\cdot(t-u_2)^{n-1}}{[(n-1)!]^2\ a_n(u_1)a_n(u_2)} du_2du_1<\infty$$

Można więc dobierając N w (13) otrzymać ε dowolnie małe, a więc i dowolnie bliskie będą wartości $\sigma_y^2(t)$ i $\sigma_{y_N}^2(t)$.

Wykorzystanie równań całkowych do badania układów o zmiennej inercji [2-4] można więc rozszerzyć na przypadek wymuszenia będącego sumą zmiennych losowych oraz oszacować błąd, z jakim otrzymujemy wariancję, gdy (5) jest aproksymacją (2).

LITERATURA

[1] Sobczyk K.: Metody dynamiki statystycznej, PWN, Warszawa 1973.

[2] Szopa J.: Charakterystyki stochastyczne układów opisanych stochastycznymi równaniami całkowymi Volterry II rodzaju i ich zastosowanie do stochastycznych równań różniczkowych, Zesz.Nauk.Polit.Śl. s. Matematyka-Fizyka z. 28, Gliwice, 1976.

[3] Szopa J.: O funkcji korelacyjnej dla równania Volterry II rodzaju, Zesz.Nauk.Pol.Śl. s. Automatyka z. 28, Gliwice 1974.

[4] Szopa J.: Application of Volterra stochastic integral equations of the II kind to the analysis of dynamic systems of variable inertia, Journal of Technical Physics, 17, 4, 423-433, 1976.

ДИСПЕРСИЯ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ВЫНУЖДЕНИЯ ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ СУММОЙ СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Р е з ю м е

В работе вводятся формулы на дисперсию стохастического линейного дифференциального уравнения, когда вынуждением является процесс будучий суммой случайных переменных. Используются стохастические интегральные уравнения Вольтеры II-го вида. Рассматривается конечная и бесконечная сумма случайных переменных, а также оценивается разница дисперсий считанных для обоих случаев.

VARIANCE OF STOCHASTIC BOUNDARY SOLUTION OF A DIFFERENTIAL EQUATION IN CASE OF AN EQUATION, IN CASE OF AN INPUT FUNCTION, BEING A SUM OF RANDOM VARIABLES

S u m m a r y

In the paper formulae have been derived for the variance of a stochastic linear differential equation in case when an input function is a process of a sum of random variables. Stochastic integral equations Volterra's of the sort have been utilized.

A finite sum and an infinite sum of random variables have been discussed and the difference of variances for both cases has been evaluated.