ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1998
Seria: INFORMATYKA z. 34 Nr kol. 1381

Tadeusz CZACHÓRSKI
Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej, PAN
Ferhan PEKERGIN
LIPN, Université Paris-Nord, Villetaneuse, France

DYFUZYJNY MODEL PRZEŁĄCZNIKA SIECIOWEGO UWZGLĘDNIAJĄCY ZMIENNY W CZASIE I SKORELOWANY STRUMIEŃ PAKIETÓW

Streszczenie. Artykuł przedstawia model pracy bufora kolejkującego pakiety w przełączniku sieci ATM przy założeniu strumienia pakietów o zmiennym natężeniu opisywanym za pomocą strumienia *ON-OFF* lub za pomocą strumienia modulowanego łańcuchem Markowa o większej liczbie stanów. Model wykorzystuje metodę aproksymacji dyfuzyjnej. Rozpatrzono wpływ mechanizmu cieknącego wiadra na pracę przełącznika.

DIFFUSION MODEL OF A NETWORK SWITCH WITH VARIABLE AND CORRELATED TRAFFIC

Summary. The article presents the performance evaluation of an ATM switch queue with time-varying and correlated input. The input is modelled by a source *ON-OFF* or Markov modulated Poisson process having more states. The switch model is based on diffusion approximation method. The influence of the keaky-bucket control mechanizm on the switch performance is analysed.

1. Wstęp

W sieciach o zintegrowanych usługach obserwuje się dużą zmienność natężenia ruchu emitowanego przez użytkowników tych sieci, jak również autokorelację natężenia transmitowanego strumienia pakietów. Ilustracją tych własności strumienia są przebiegi przedstawione na rys. 1 i 2. Rys. 1, wykonany na podstawie pomiarów prezentowanych w pracach

[20], [19], pokazuje przykład zmiennego w czasie natężenia przesyłu ruchomych obrazów, zakodowanych w standardzie MPEG; na osi poziomej zaznaczony jest numer ramki, na osi pionowej rozmiar ramki w bitach. Rys. 2 przedstawia obliczoną autokorelację tego samego sygnału podaną w funkcji przesunięcia numerów ramek.

Zaobserwowany charakter strumieni danych ma duży wpływ na zachowanie się kolejek pakietów czekających na dalszą transmisję w węzłach sieci, a tym samym na jakość świadczonych przez sieć usług, wyrażaną prawdopodobieństwem straty pakietu i rozrzutem czasu przesyłu pakietów poprzez całą ścieżkę wirtualną łączącą dwa węzły. Stosowane kolejkowe modele sieci komputerowych nie uwzględniają zazwyczaj zmian natężenia transmisji, bazując jedynie na danych dotyczących wartości średnich strumienia i analizując pracę sieci w stanie ustalonym. Nie uwzględniają również autokorelacji strumieni, zakładając, że czasy pomiędzy kolejnymi zdarzeniami są niezależnymi zmiennymi losowymi. Jedną z nielicznych metod pozwalających wziąć pod uwagę stany nieustalone, a tym samym opisać zmienne w czasie natężenie przesyłu informacji, jest aproksymacja dyfuzyjna. Niniejszy artykuł stara się dostosować tę metodę także do opisu skorelowanego strumienia przesyłanej informacji i pokazać użyteczność takiego podejścia poprzez przykłady numeryczne dotyczące modelowania zmian zachodzących w kolejce komórek w buforze węzła ATM.

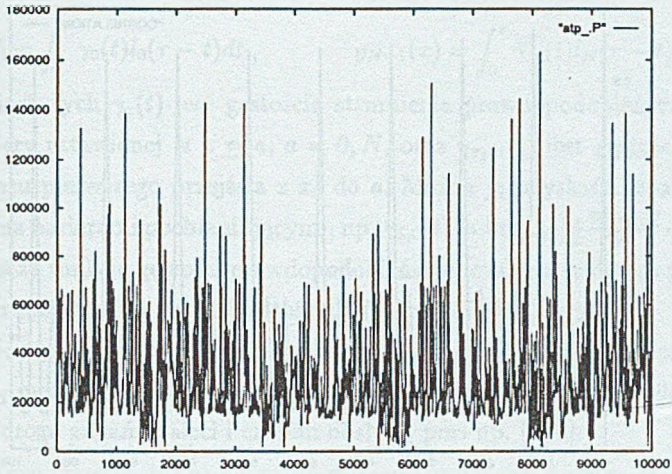
Natężenie nadchodzącego do węzła strumienia komórek może być kontrolowane m. in. za pomocą mechanizmu *cieknącego wiadra* (ang. *leaky-bucket*), którego dyfuzyjny model również załączono. Część przedstawionych tu wyników autorzy prezentowali wcześniej w pracy [8].

2. Podstawy aproksymacji dyfuzyjnej

Przypomnijmy krótko zasady wykorzystania równań dyfuzji w modelach zawierających sieci kolejek. Proces $N(t)$, który reprezentuje liczbę zadań w stanowisku, jest zastąpiony procesem dyfuzji $X(t)$, [17]. Funkcja gęstości $f(x,t;x_0)$, gdzie x_0 jest punktowym warunkiem początkowym, tego ostatniego procesu jest określona równaniem dyfuzji

$$\frac{\partial f(x,t;x_0)}{\partial t} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 f(x,t;x_0)}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial f(x,t;x_0)}{\partial x}, \tag{1}$$

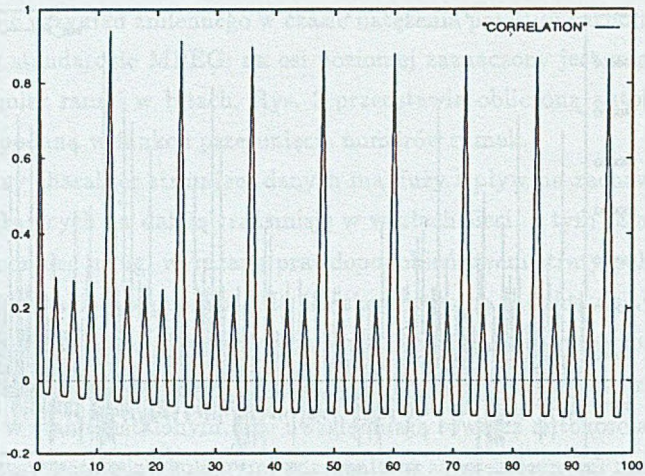
które należy rozwiązać przy odpowiednio dobranych współczynnikach α, β i warunkach brzegowych. Uzyskana funkcja $f(x,t;x_0)$ aproksymuje rozkład liczby zadań $p(n,t;n_0)$ w stanowisku: $p(n,t;n_0) \approx f(n,t;n_0)$.



Rys. 1. Przykładowa sekwencja zmierzonego zmiennego natężenia ruchu
Fig. 1. An example of measured variable traffic

Niech $A(x)$, $B(x)$ oznaczają odpowiednio rozkłady odstępów czasu między nadejściem kolejnych zadań i czasu ich obsługi. Zakładamy, że są to dowolne rozkłady o znanej wartości średniej i wariancji, oznaczonych: $E[A] = 1/\lambda$, $E[B] = 1/\mu$, $\mathrm{Var}[A] = \sigma_A^2$, $\mathrm{Var}[B] = \sigma_B^2$. Współczynniki zmienności tych rozkładów oznaczamy jako $C_A^2 = \sigma_A^2\lambda^2$, $C_B^2 = \sigma_B^2\mu^2$. W modelach stanowisk $G/G/1$ i $G/G/1/N$ parametry α, β są dobierane jako $\beta = \lambda - \mu$, $\alpha = \sigma_A^2\lambda^3 + \sigma_B^2\mu^3 = C_A^2\lambda + C_B^2\mu$, por. [17].

Warunki brzegowe w postaci barier, które pochłaniają proces, przetrzymują go przez czas, który jest wielkością losową, a następnie odrzucają proces we wskazane miejsce wewnątrz przedziału, na którym jest on zdefiniowany, zostały zaproponowane w pracy [9]. Opisują one dobrze zachowanie się kolejki w przypadku, gdy jest ona pusta lub przepełniona. W przypadku stanowiska $G/G/1$ proces dyfuzji jest ograniczony przez barierę w $x = 0$; w modelu stanowiska $G/G/1/N$ proces jest ograniczony barierami w $x = 0$ i $x = N$. Gdy proces dochodzi do bariery w $x = 0$, pozostaje w niej przez czas odpowiadający okresowi, w którym stanowisko jest puste, a następnie przeskakuje do $x = 1$; gdy proces dochodzi do $x = N$, pozostaje tu przez czas, przez który kolejka jest pełna (czas potrzebny na dokończenie aktualnie wykonywanego zadania), a następnie przeskakuje do $x = N - 1$. Taki model stanowiska z ograniczoną kolejką i opisanymi barierami był rozwiązany w [9] dla przypadku **stanów ustalonych**, gdy prawdopodobieństwa stanów nie zależą od czasu, $f(x, t; x_0) = f(x)$, i jest często stosowany.



Rys. 2. Obliczona autokorelacja sygnału przedstawionego na poprzednim rysunku
Fig. 2. Autocorrelation of the traffic presented in previous figure

Dla uzyskania rozwiązania równania dyfuzji w stanie nieustalonym zaproponowaliśmy [3, 4], by wyrazić gęstość $f(x,t;x_0)$ jako superpozycję

$$f(x,t;\psi) = \phi(x,t;\psi) + \int_0^t g_1(\tau)\phi(x,t-\tau;1)d\tau + \int_0^t g_{N-1}(\tau)\phi(x,t-\tau;N-1)d\tau \quad (2)$$

gęstości $\phi(x,t;x_0)$ procesu dyfuzji ograniczonego barierami innego typu – barierami pochłaniającymi – umieszczonymi w $x=0$ i $x=N$; proces kończy się, gdy osiągnie jedną z nich. Gęstości $\phi(x,t;x_0)$ takiego procesu są znane, por. [2]:

$$\phi(x,t;x_0) = \begin{cases} \delta(x-x_0) & \text{dla} \quad t=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\Pi\alpha t}} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[\frac{\beta x_n'}{\alpha} - \frac{(x-x_0-x_n'-\beta t)^2}{2\alpha t}\right] \right. & \\ \qquad \left. - \exp\left[\frac{\beta x_n''}{\alpha} - \frac{(x-x_0-x_n''-\beta t)^2}{2\alpha t}\right] \right\} & \text{dla} \quad t>0, \end{cases} \quad (3)$$

gdzie $x_n' = 2nN$, $x_n'' = -2x_0 - x_n'$. Funkcja ψ oznacza warunek początkowy procesu, $\phi(x,t;\psi) = \int_0^N \phi(x,t;\xi)\psi(\xi)d\xi$.

Funkcje $g_1(t)$ i $g_{N-1}(t)$ w równ. (2) są gęstościami rozpoczęcia od nowa procesu dyfuzji po przeskoku z bariery w $x=0$ do $x=1$ lub z bariery w $x=N$ do $x=N-1$; można je wyznaczyć z równań (4), (5) bilansujących strumienie prawdopodobieństw:

$$\gamma_0(t) = p_0(0)\delta(t) + \gamma_{\psi,0}(t) + \int_0^t g_1(\tau)\gamma_{1,0}(t-\tau)d\tau + \int_0^t g_{N-1}(\tau)\gamma_{N-1,0}(t-\tau)d\tau,$$

$$\gamma_N(t) = p_0(N)\delta(t) + \gamma_{\psi,N}(t) + \int_0^t g_{N-1}(\tau)\gamma_{N-1,N}(t-\tau)d\tau + \int_0^t g_1(\tau)\gamma_{1,N}(t-\tau)d\tau, \quad (4)$$

$$g_1(\tau) = \int_0^\tau \gamma_0(t) l_0(\tau - t) dt\,, \qquad g_{N-1}(\tau) = \int_0^\tau \gamma_N(t) l_N(\tau - t) dt\,. \tag{5}$$

W równaniach tych $\gamma_a(t)$ jest gęstością strumienia prawdopodobieństwa, że proces wpada do bariery ustawionej w $x = a$, $a = 0, N$, oraz $\gamma_{x_0,a}(t)$ jest gęstością prawdopodobieństwa czasu pierwszego przejścia z x_0 do a. Można ją uzyskać rozpatrując proces dyfuzji z dwiema barierami pochłaniającymi, np. $\gamma_{1,0}(t) = \lim_{x\to 0}[\frac{\alpha}{2}\frac{\partial\phi(x,t;1)}{\partial x} - \beta\phi(x,t;1)]$.

$\gamma_{\psi,a}(t)$ oznacza funkcję gęstości prawdopodobieństwa czasu pierwszego przejścia do a z punktów ξ rozłożonych na osi x z gęstością $\psi(\xi)$: $\gamma_{\psi,a}(t) = \int_0^N \gamma_{\xi,a}(t) d\xi$.

Powyższe postępowanie, przedstawione tu w zarysach dla jednego stanowiska i jednej klasy klientów, można uogólnić na dowolną sieć stanowisk obsługi i wiele klas zadań, różniących się drogą zadań w sieci i czasem obsługi, por. np. [4, 6].

3. Wpływ korelacji i zmiennych w czasie parametrów strumienia na współczynniki modelu dyfuzyjnego

Własności strumienia pakietów generowanego przez użytkowników sieci opisuje się najczęściej za pomocą modulowanego procesu Poissona (MMPP – Markov Modulated Poisson Process). Zmienne w czasie własności statystyczne strumienia są w tym modelu funkcją stanów nieustalonych łańcucha Markowa. Załóżmy, że modulujący łańcuch Markowa ma M stanów. Gdy łańcuch jest w stanie i, parametr procesu Poissona ma wartość λ_i, czyli pakiety nadchodzą w odstępach czasu opisanych rozkładem wykładniczym o średniej λ_i^{-1}. W szczególnym przypadku, gdy $M = 2$, mówimy o źródle typu *ON-OFF*. Markowowskie modele przy tak scharakteryzowanym źródle były niejednokrotnie wykorzystywane do analizy stanów ustalonych i nieustalonych związanych z ruchem pakietów, np. [1, 13, 14, 15]. Rozmiar przestrzeni stanów modelu i problemy numeryczne ograniczają zakres modeli markowowskich do jednego stanowiska obsługi.

Wykorzystując aproksymację dyfuzyjną, możemy ogólniej powiedzieć, że łańcuch Markowa określa fazy, w których strumień wejściowy, niekoniecznie Poissonowski, jest scharakteryzowany przez pierwsze dwa momenty rozkładu odstępów czasu między pakietami, $E[A_i] = \lambda_i^{-1}$ oraz $E[A^2]$.

Tak więc, jeżeli $\pi_i(t)$ jest prawdopodobieństwem, że w chwili t proces Markowa modulujący strumień pakietów jest w stanie i, rozkład czasów miedzy zgłoszeniami ma dwa

pierwsze momenty

$$E[A(t)] = \frac{\sum_{i=1}^{M} \pi_i(t)\lambda_i E[A_i]}{\sum_{i=1}^{M} \pi_i(t)\lambda_i} = \frac{\sum_{i=1}^{M} \pi_i(t)}{\sum_{i=1}^{M} \pi_i(t)\lambda_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{M} \pi_i(t)\lambda_i} = \frac{1}{\lambda(t)} \tag{6}$$

$$E[A(t)^2] = \frac{\sum_{i=1}^{M} \pi_i(t)\lambda_i E[A_i^2]}{\sum_{i=1}^{M} \pi_i(t)\lambda_i}. \tag{7}$$

Jeżeli $\lambda_i = 0$, tj. będące w fazie i źródło milczy, wyrażenie $E[A_i^2]$ w równaniu (7) jest zastąpione przez drugi moment rozkładu czasu trwania fazy i, a $\lambda_i = 0$ jest zastąpione przez odwrotność wartości średniej czasu trwania tej fazy.

Rozwiązanie układu równań

$$\frac{d\pi_i(t)}{dt} = \sum_k \pi_k(t) q_{ki},$$

gdzie q_{ki} są współczynnikami przejść ze stanu k do stanu i, daje prawdopodobieństwa stanów nieustalonych łańcucha Markowa. Wykorzystujemy $\pi_i(t)$ do określenia zależnych od czasu współczynników dyfuzji: $\beta(t) = \lambda(t) - \mu$, $\alpha(t) = \lambda(t)C_A^2(t) + \mu C_B^2$, gdzie

$$\lambda(t) = \frac{1}{E[A(t)]}, \qquad C_A^2(t) = \frac{E[A(t)^2]}{E[A(t)]^2} - 1. \tag{8}$$

W przypadku dwustanowego łańcucha Markowa (źródło *ON-OFF*), jeżeli r_j jest intensywnością wyjścia ze stanu j, $j = 1, 2$, to prawdopodobieństwa stanu $j = 1$ w funkcji czasu mają postać

$$\begin{aligned} \pi_1(t|\pi_1(0) = 1) &= \frac{r_1}{r_1 + r_2} \exp[-(r_1 + r_2)t] + \frac{r_2}{r_1 + r_2}, \\ \pi_1(t|\pi_1(0) = 0) &= \frac{r_2}{r_1 + r_2}[1 - \exp[-(r_1 + r_2)t]], \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie $\pi_i(t|\pi_i(0) = 1)$ jest prawdopodobieństwem stanu i w chwili t, jeżeli w chwili początkowej $t = 0$ łańcuch był w stanie tym samym stanie; podobnie obliczamy $\pi_2(t|\pi_2(0) = 1) = 1 - \pi_1(t|\pi_1(0) = 0)$, $\pi_2(t|\pi_2(0) = 0) = 1 - \pi_1(t|\pi_1(0) = 1)$.

Skala czasu, w której korelacja ma istotne znaczenie, wyznaczona jest przebiegiem funkcji autokorelacji $R(t, \tau) = E[A(t)A(t + \tau)] - E[A(t)^2]$:

$$R(t, \tau) = \sum_{i=1}^{M} \pi_i(t) \left[\pi_i(\tau|\pi_i(0) = 1)\lambda_i^2 + \sum_{i=1, i \neq j}^{M} \pi_j(\tau|\pi_i(0) = 1)\lambda_i\lambda_j \right]. \tag{10}$$

Możemy też rozważyć superpozycję K niezależnych źródeł typu *ON-OFF* lub źródeł modulowanych przez różne łańcuchy Markowa.

Oznaczmy przez $\lambda^{(k)}(t)$, $C_A^{(k)^2}(t)$ parametry k-tego źródła *ON-OFF*. Wynikowy strumień wejściowy $\lambda(t)$ jest oczywiście sumą wszystkich $\lambda^{(k)}(t)$. Ponieważ liczba klientów

przychodzących ze źródła k, nadeszłych w okresie czasu o długości t, ma rozkład normalny o wariancji $\lambda^{(k)}(t)C_A^{(k)^2}(t)$, a suma niezależnych zmiennych losowych, z których każda ma rokład normalny, jest opisana również rozkładem normalnym, którego wariancja jest sumą wariancji poszczególnych rozkładów, więc

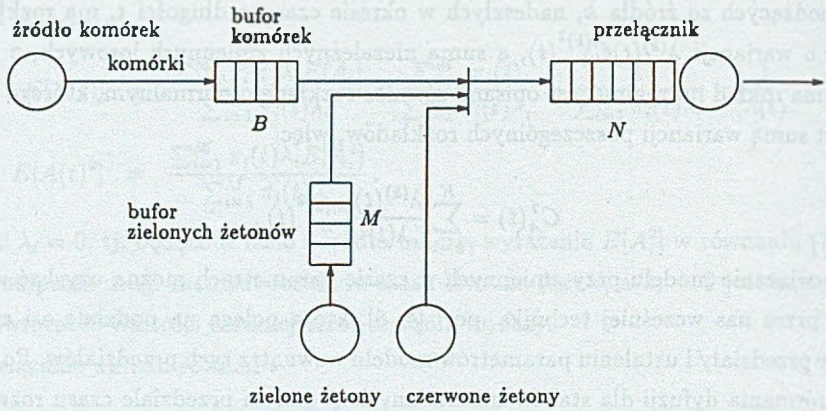
$$C_A^2(t) = \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda^{(k)}(t)}{\lambda(t)} C_A^{(k)^2}(t) . \tag{11}$$

Rozwiązanie modelu przy zmiennych w czasie parametrach można uzyskać wprowadzoną przez nas wcześniej techniką, por. [4, 6], która polega na podziale osi czasu na krótkie przedziały i ustaleniu parametrów modelu wewnątrz tych przedziałów. Po rozwiązaniu równania dyfuzji dla stanów nieustalonych w danym przedziale czasu rozwiązanie na końcu tego przedziału służy jako warunek początkowy (funkcja ψ) dla następnego przedziału, w którym obowiązują już inne parametry modelu.

4. Model dyfuzyjny mechanizmu cieknącego wiadra dla dwu typu żetonów

Rozważmy model złożony ze zmiennego w czasie źródła o zdefiniowanym poprzednio charakterze, z mechanizmu cieknącego wiadra kontrolującego przepływ pakietów (komórek w przypadku sieci ATM) oraz przełącznika modelowanego tutaj jako stacja obsługi z kolejka progową, rys. 3. Mechanizm cieknącego wiadra zapobiega zbyt dużym odchyleniom bieżącej charakterystyki źródła od przyjętych w kontrakcie pomiędzy użytkownikiem a siecią założeń. Pakiety (komórki) wysyłane przez użytkownika mogą wejść do sieci, jeżeli uzyskają żeton. Żetony są generowane przez sieć regularnie (w stałych odstępach czasu). Liczba generowanych w jednostce czasu żetonów odpowiada przyznanemu użytkownikowi pasmu przepustowości. Pewne nieregularności w strumieniu pakietów są dopuszczalne: przewidziany jest bufor pakietów, wypełniający się, gdy pakiety przychodzą zbyt często, oraz bufor rezerwowych żetonów wypełniany, gdy pakiety przychodzą rzadziej, niż było to ustalone. Oba bufory mają skończoną pojemność, która określa dopuszczalne odchylania strumienia od normy. Celem modelu jest zbadanie wpływu cech źródła na kolejkę przełącznika i zbadanie skutków wprowadzenia mechanizmu cieknącego wiadra pomiędzy źródło a kolejkę przełącznika sieciowego.

Model dyfuzyjny tego mechanizmu przedstawiliśmy poprzednio w pracy [5]; poniżej zaproponowano jego rozszerzoną wersję, która uwzględnia dwa typy żetonów: zielone i czerwone. Zielone żetony są generowane strumieniem odpowiadającym przepustowości



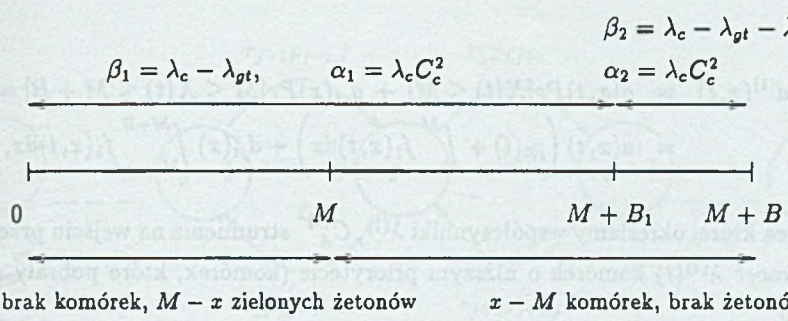
Rys. 3. Mechanizm cieknącego wiadra dla dwu typu żetonów
Fig. 3. Leaky bucket mechanism with two kinds of tokens

przyznanej użytkownikowi; czerwone żetony umożliwiają wpuszczenie pewnej dodatkowej liczby komórek z jednoczesnym obniżeniem ich priorytetu.

Generacja czerwonych żetonów rozpoczyna się, gdy liczba komórek czekających na żetony przekroczy określony poziom B_1, i kończy się, gdy liczba czekających komórek opadnie poniżej tego poziomu. Oznaczamy parametry: λ_c, ${C_{Ac}}^2$ dla strumienia komórek, λ_{gt}, C^2_{Agt} dla strumienia zielonych żetonów oraz λ_{rt}, C^2_{Art} dla strumienia czerwonych żetonów.

Proces dyfuzji jest określony na przedziale $x \in [0, M+B]$, gdzie B jest pojemnością bufora komórek, M jest pojemnością bufora zielonych żetonów. Chwilową wartość procesu określamy jako $x = b - m + M$, gdzie b i m przedstawiają odpowiednio bieżącą zawartość bufora komórek i bufora żetonów. Jeżeli $x < M$, to jest $M - x$ zielonych żetonów czekających na komórki; $x > M$ oznacza, że $x - M$ komórek czeka na żetony, rys. 4. Jeżeli $x > M + B_1$, to prócz zielonych są również przyznawane czerwone żetony. Inne więc są parametry procesu dyfuzji. Model ma dwa podprzedziały charakteryzujące się różnymi parametrami dyfuzji; dla $0 < x \leq M + B_1$ zachodzi $\beta_1 = \lambda_c - \lambda_{gt}$, $\alpha_1 = \lambda_c {C_{Ac}}^2 + \lambda_{gt} C^2_{Agt}$, a dla $M + B_1 \leq x < M + B$ mamy: $\beta_2 = \lambda_c - \lambda_{gt} - \lambda_{rt}$, $\alpha_2 = \lambda_c {C_{Ac}}^2 + \lambda_{gt} C^2_{Agt} + \lambda_{rt} C^2_{Art}$. Zakładamy, że żetony są generowane w stałych odstępach czasu, więc $C^2_{Agt} = C^2_{Art} = 0$.

Rozwiązaniem problemu są dwa procesy dyfuzji $X_1(t)$, $X_2(t)$, określone odpowiednio w $x \in (0, M+B_1)$ i $x \in (M+B_1, M+B)$ i komunikujące się poprzez barierę umieszczoną w $x = M+B_1$. W punktach $x = 0$ i $x = M+B$ umieszczone są występujące w klasycznym modelu dyfuzyjnym bariery przetrzymujące proces i odrzucające go następnie do $x = 1$



Rys. 4. Mechanizm cieknącego wiadra – wybór parametrów w modelu dyfuzyjnym
Fig. 4. Leaky bucket – the choice of parameters for the diffusion model

i do $x = M+B-1$. Proces $X_1(t)$ pochłonięty przez barierę w $x = M+B_1$ jest natychmiast inicjowany w punkcie $x = M+B_1+\varepsilon$ jako proces $X_2(t)$, a proces $X_2(t)$ pochłonięty przez tę barierę jest zapoczątkowywany w tej samej chwili w $x = M+B_1-\varepsilon$ jako proces $X_1(t)$.

Funkcje gęstości $f_1(x,t;\psi_1)$, $f_2(x,t;\psi_2)$ obu procesów wyrażają się poprzez funkcje gęstości $\phi_1(x,t;x_0)$, $\phi_2(x,t;x_0)$ procesów z dwiema pochłaniającymi barierami umieszczonymi w $x = 0$, $x = M + B_1$ dla pierwszego procesu i w $x = M + B_1$, $x = M + B$ dla drugiego procesu:

$$\begin{aligned} f_1(x,t;\psi_1) &= \phi_1(x,t;\psi_1) + \int_0^t g_1(\tau)\phi_1(x,t-\tau;1)d\tau + \\ &+ \int_0^t g_{M+B_1-\varepsilon}(\tau)\phi_1(x,t-\tau;M+B_1-\varepsilon)d\tau\,, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} f_2(x,t;\psi_2) &= \phi_2(x,t;\psi_2) + \int_0^t g_{M+B-1}(\tau)\phi_2(x,t-\tau;M+B-1)d\tau + \\ &+ \int_0^t g_{M+B_1+\varepsilon}(\tau)\phi_2(x,t-\tau;M+B_1+\varepsilon)d\tau\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Funkcje ϕ_1, ϕ_2 są znane, por. równ. (3), a natężenia prawdopodobieństwa reinicjalizacji procesów $g_1(t)$, $g_{M+B_1-\varepsilon}(t)$, $g_{M+B_1+\varepsilon}(t)$, $g_{M+B-1}(t)$ są obliczane z równań (4),(5) rozszerzonych o bilans strumieni pomiędzy oboma procesami. Dla ułatwienia praktycznego wykorzystania modelu równania te są poddane transformacie Laplace'a, a natępnie oryginały funkcji $f_1(x,t;\psi_1)$, $f_2(x,t;\psi_2)$ w dziedzinie czasowej oblicza się numerycznie na podstawie ich transformat. Prawdopodobieństwo strat komórek jest szacowane jako $p_{M+B}(t)$.

Strumień wyjściowy komórek o wyższym priorytecie, a więc tych, które pobrały zielony żeton, ma gęstość

$$\begin{aligned} d^{(1)}(x,t) &= a(x,t)Pr[X(t) \le M] + d_{gt}(x)Pr[M \le X(t) \le M+B] = \\ &= a(x,t)\left(p_0(t) + \int_0^M f_1(x,t)dx\right) + d_{gt}(x)\int_M^{M+B} f_1(x,t)dx, \end{aligned} \tag{14}$$

za pomocą której określamy współczynniki $\lambda^{(1)}$, $C_A^{(1)^2}$ strumienia na wejściu przełącznika; intensywność $\lambda^{(2)}(t)$ komórek o niższym priorytecie (komórek, które pobrały czerwony żeton) to

$$\lambda^{(2)}(t) = \lambda_{rt}\, P[X(t) \ge M + B_1] = \lambda_{rt}\left(p_{M+B}(t) + \int_{M+B_1}^{M+B} f_2(x,t)dx\right).$$

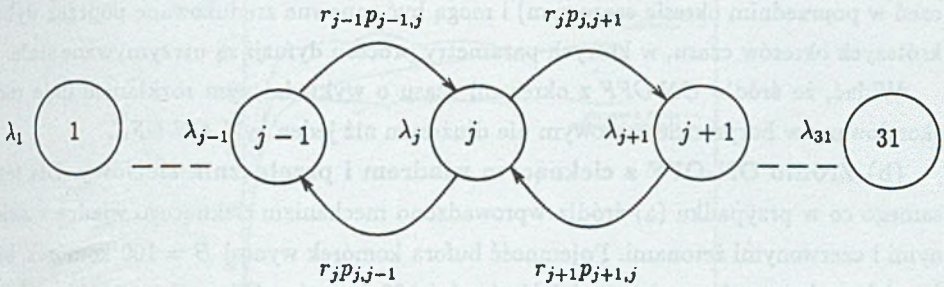
Strumień wyjściowy komórek niższego priorytetu opuszczających mechanizm cieknącego wiadra ma podobny charakter co strumień generowany przez źródło *ON-OFF*: w okresie, gdy proces $X(t)$ ma nieprzerwanie wartości większe niż $x = M + B_1$, komórki o obniżonym priorytecie opuszczają cieknące wiadro, co odpowiada okresowi *ON* źródła; okres *OFF* zaczyna się, gdy $X(t) < M + B_1$ – dystrybucja czerwonych żetonów jest przerwana i priorytet komórek nie jest obniżany. Aby ocenić rozkład czasu trwania tych okresów, wykorzystamy gęstość $\gamma_{x_0,a}$ czasu pierwszego przejścia pomiędzy punktem początkowym x_0 i pochłaniającą barierą w $x = a$. Tak więc gęstość rozkładu czasu trwania okresu *ON* można zapisać jako

$$\begin{aligned} f_{ON}(x) &= P_1\gamma_{M+B_1+1,\,M+B_1}(x) + \\ &\quad (1-P_1)P_2\,\gamma_{M+B_1+1,\,M+B}(x) * \delta(x-1) * \gamma_{M+B-1,\,M+B_1}(x) + \\ &\quad (1-P_1)(1-P_2)P_2\,\gamma_{M+B_1+1,\,M+B}(x) * \\ &\quad *\delta(x-1) * \gamma_{M+B-1,\,M+B} * \delta(x-1) * \gamma_{M+B-1,\,M+B_1}(x) + \cdots \end{aligned}$$

gdzie P_1 jest prawdopodobieństwem, że proces rozpoczęty w $x = M + B_1 + 1$ zakończy się w $x = M + B_1$; $P_1 = \int_0^\infty \gamma_{M+B_1+1,\,M+B_1}(x)dx$, a P_2 jest prawdopodobieństwem, że proces rozpoczęty w $x = M + B - 1$ zakończy się w $x = M + B_1$: $P_2 = \int_0^\infty \gamma_{M+B-1,\,M+B_1}(x)dx$; $\delta(x-1)$ jest funkcją gęstości rozkładu czasu pobytu w barierze w $x = M + B$. Stosując transformatę Laplace'a, otrzymujemy

$$\bar{f}_{ON}(s) = P_1\bar{\gamma}_{M+B_1+1,\,M+B_1}(s) + \frac{(1-P_1)P_2\,\bar{\gamma}_{M+B_1+1,\,M+B}(s)\bar{\gamma}_{M+B-1,\,M+B_1}(s)e^{-s}}{(1-P_2)\bar{\gamma}_{M+B-1,\,M+B_1}(s)e^{-s}}.$$

W podobny sposób wyznaczamy gęstość $f_{OFF}(x)$ rozkładu czasu trwania okresu *OFF* dla czerwonych żetonów, co umożliwia nam określenie wartości $E[A_i^2]$ w równaniu (7).



Rys. 5. Łańcuch Markowa wykorzystywany do modelowania skorelowanego strumienia komórek w przykładach (c) i (d)

Fig. 5. Markov chain used in Examples (c) and (d) to represent correlated input

5. Przykłady numeryczne

Wybierzmy jako jednostkę czas potrzebny do przesłania jednej komórki, np. dla kanału o przepustowości 155 Mbps jednostka ta będzie miala wartość $2.7 \cdot 10^{-6}$ s. W modelu nie zawierającym mechanizmu cieknącego wiadra wszystkie komórki mają ten sam priorytet i przełącznik jest przedstawiony jako zwykła kolejka z regulaminem naturalnym (FIFO) o ograniczonej pojemności 100 komórek. Po wprowadzeniu cieknącego wiadra połowa bufora przełącznika jest dostępna dla komórek o obniżonym priorytecie: $N = 100$, $N_1 = 50$. Czas obsługi jest stały. Rezultaty analityczne tego artykułu dotyczą opisanych poniżej przypadków (a) i (c), tj. bez mechanizmu cieknącego wiadra. Dla wszystkich przypadków podano rezultaty symulacji, w której działanie układu o tej samej strukturze i tych samych rozkładach zmiennych losowych jest opisane za pomocą symulacji zdarzeń dyskretnych, a przebiegi zmiennych w funkcji czasu dlugości kolejek powtórzono 10 000 razy i uśredniono dla tych samych ustalonych wartości czasu.

(a) **Źródło ON-OFF i przełącznik sieciowy.** Źródło ma dwie naprzemienne fazy dużej i małej aktywności. Fazy mają rozkład wykładniczy, średni czas trwania każdej z nich jest równy 100 jednostek czasu: $r_1 = r_2 = 0.01$, por. równ. (9). Strumień generowanych komórek ma charakter poissonowski, którego intensywność wynosi $\lambda_1 = 1.6$ komórek na jednostkę czasu, gdy źródło jest w fazie pierwszej, oraz $\lambda_2 = 0.4$ komórek na jednostkę czasu (przypadek 1) lub $\lambda_2 = 0$ (przypadek 2), gdy źródło jest w fazie drugiej. W chwili początkowej $t = 0$ źródło jest w fazie pierwszej. Rys. 6 przedstawia średnią długość kolejki przełącznika podaną przez model dyfuzyjny i porównaną z wynikami modelu symulacyjnego. Zaobserwowane różnice są najprawdopodobniej spowodowane akumulacją błędów

numerycznych (obliczenia w określonym przedziale czasowym zależą od wyników obliczeń w poprzednim okresie czasowym) i mogą być zapewne zredukowane poprzez wybór krótszych okresów czasu, w których parametry procesu dyfuzji są utrzymywane stałe.

Widać, że źródło *ON-OFF* z okresami czasu o wykładniczym rozkładzie daje ruch skorelowany w horyzoncie czasowym nie dłuższym niż jeden cykl *ON-OFF*.

(b) Źródło ON-OFF z cieknącym wiadrem i przełącznik sieciowy. Dla tego samego co w przypadku (a) źródła wprowadzono mechanizm cieknącego wiadra z zielonymi i czerwonymi żetonami. Pojemność bufora komórek wynosi $B = 100$ komórek, bufor zielonych żetonów może pomieścić również 100 żetonów. Gdy zajęta zostaje połowa bufora komórek, sieć zaczyna generować także czerwone żetony: $B_1 = 50$ z taką samą intensywnością co zielone żetony. Warunki początkowe eksperymentu: $M(0) = B(0) = 0$. Rys. 7 przedstawia średnią długość kolejki przełącznika – jej wzrost jest zdecydowanie wolniejszy niż w przypadku (a), gdy źródło nie było kontrolowane cieknącym wiadrem.

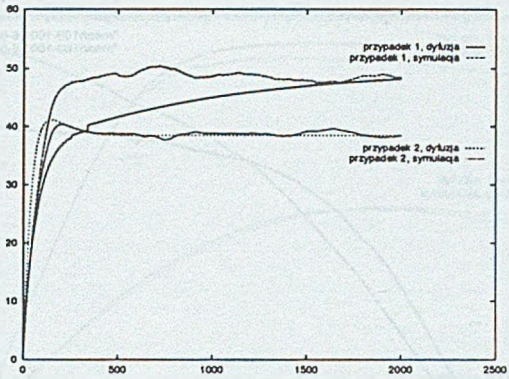
(c) Źródło o wielu fazach i przełącznik sieciowy. Rozważmy popularny model ruchu komórek transportujących ruchome obrazy, przedstawiony w [16] i wykorzystywany następnie, np. [15, 1], do reprezentacji źródeł typu wideo przełączanych statystycznie.

Zagregowany proces jest przedstawiony za pomocą łańcucha Markowa z ciągłym czasem, posiadającego 31 stanów, rys. 5; intensywność, z jaką proces opuszcza stan j, jest określona jako $r_j = 1.03077(31 - j) + 2.5923j$, a prawdopodobieństwa przejścia między stanami są następujące:

$$p_{j,j+1} = \frac{1.03077(31-j)}{1.03077(31-j) + 2.5923j}, \qquad p_{j,j-1} = 1 - p_{j,j+1}, \qquad 2 \le j \le 30; \qquad p_{1,2} = p_{31,30} = 1.$$

Gdy łańcuch Markowa jest w stanie j, intensywność ruchu generowanego przez źródło wynosi $\lambda_j = 2.391(j-1)$. W powyższych wzorach, zaczerpniętych z [15], jednostką czasu jest milisekunda. W naszych przykładach wartości współczynników zostały dopasowane do wybranej wcześniej jednostki czasu. Rysunki 8, 9 ilustrują zmiany kolejki w przełączniku w funkcji czasu oraz stanu początkowego j_0 łańcucha Markowa. Rezultaty dla stałego czasu obsługi porównano z rezultatami dla czasu obsługi o rozkładzie wykładniczym – porównanie to potwierdza wnioski pracy [15], że zmiany wprowadzone przez rozkład czasu obsługi są znikome w porównaniu z wpływem zmiennego i skorelowanego źródła zgłoszeń.

(d) Źródło o wielu fazach, cieknące wiadro i przełącznik sieciowy. Wprowadzamy cieknące wiadro o tych samych co w przypadku (b) parametrach. Rys. 10 pokazuje rezultaty: kolejka przełącznika znacząco zmalała. Poprzednio kolejki związane ze stanami



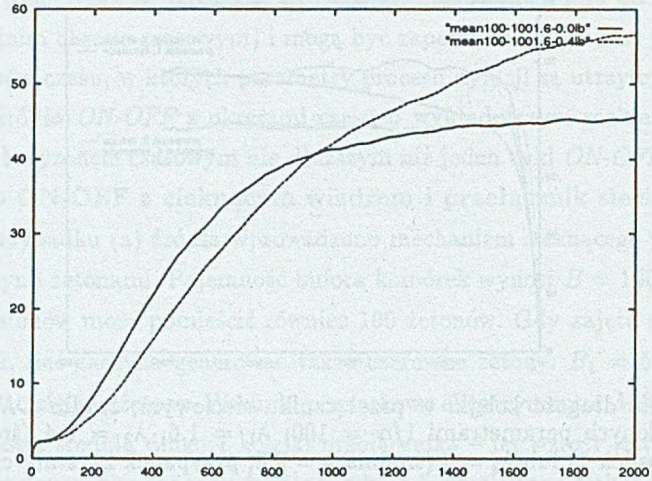
Rys. 6. Średnia długość kolejki w przełączniku sieciowym; źródło *ON-OFF* o fazach określonych parametrami $1/\alpha = 100$; $\lambda_1 = 1.6$, $\lambda_2 = 0.4$ (średnia $\lambda = 1.0$, przypadek 1) lub $\lambda_2 = 0$ (średnia $\lambda = 0.8$, przypadek 2); stały czas obsługi

Fig. 6. Mean queue length at the multiplexer; the source has two exponentially distributed phases of the same mean $1/\alpha = 100$; $\lambda_1 = 1.6$, $\lambda_2 = 0.4$ (average $\lambda = 1.0$, case 1) or $\lambda_2 = 0$ (average $\lambda = 0.8$, case 2); constant service time

początkowymi łańcucha $j_0 = 23, 24, 25$ były znacznie większe niż dla przypadku $j_0 = 21$, teraz przeciwnie, są mniejsze: cieknące wiadro wpływa na charakter strumienia, którego regularność wzrasta. Dla $j_0 = 28$ komórki dochodzą do przełącznika praktycznie z rytmem nadanym im przez żetony, a więc regularnie – i liczba komórek w przełączniku zostaje zredukowana do jednej.

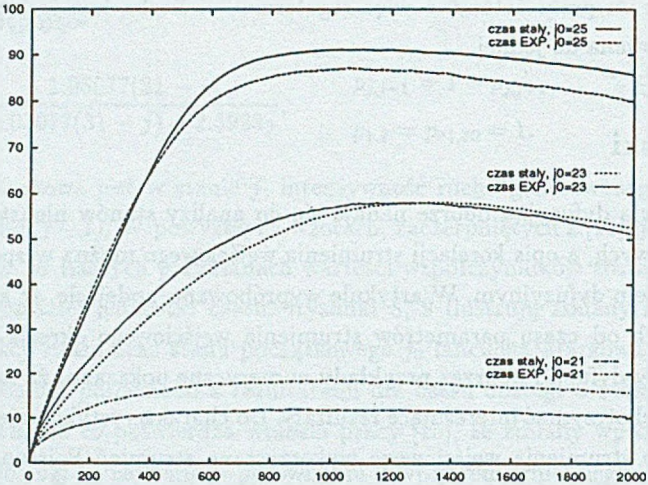
6. Wnioski

Aproksymacja dyfuzyjna dobrze nadaje się do analizy stanów nieustalonych w systemach kolejkowych, a opis korelacji strumienia wejściowego można w sposób naturalny zawrzeć w modelu dyfuzyjnym. W artykule wypróbowano podejście, w którym na podstawie zależnych od czasu parametrów strumienia wejściowego określa się zależne od czasu parametry dyfuzji i poprzez przykłady numeryczne pokazano, że można wykorzystując ten model otrzymać interesujące rezultaty. Do charakterystyki zmiennego w czasie i skorelowanego strumienia wejściowego wykorzystano strumień Poissona modulowany łańcuchem Markowa, ponieważ jest to najczęściej stosowany sposób opisu takiego ruchu, ale może to być dowolny opis podający zależność parametrów strumienia, a więc również parametrów modelu dyfuzyjnego, od czasu.



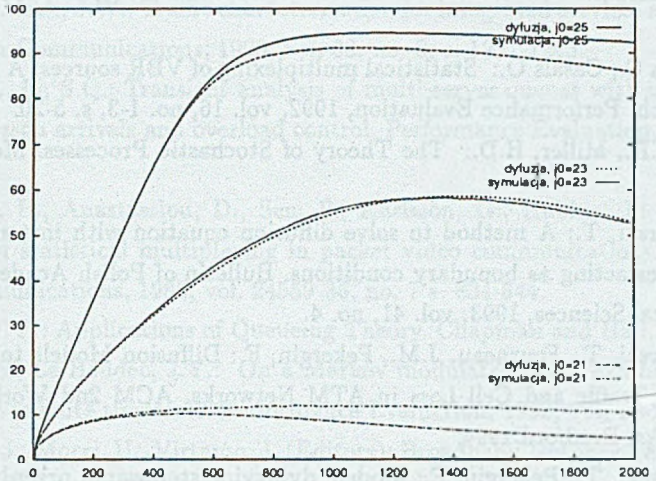
Rys. 7. Średnia długość kolejki w przełączniku sieciowym; źródło *ON-OFF* o fazach określonych parametrami $1/\alpha = 100$; $\lambda_1 = 1.6$, $\lambda_2 = 0.4$ (przypadek 1) lub $\lambda_2 = 0$ (przypadek 2) kontrolowane przez mechanizm cieknącego wiadra; stały czas obsługi; rezultaty symulacji

Fig. 7. Mean queue length at the multiplexer; the source has two exponentially distributed phases of the same mean $1/\alpha = 100$; $\lambda_1 = 1.6$, $\lambda_2 = 0.4$ (case 1) or $\lambda_2 = 0$ (case 2) and is controlled by a leaky bucket; constant service time; simulation results



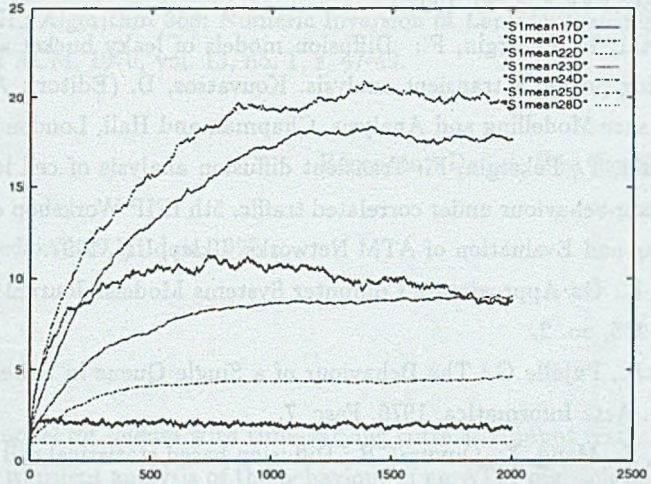
Rys. 8. Średnia długość kolejki w przełączniku; źródło jest sterowane łańcuchem o 31 fazach, faza początkowa $j_0 = 21, 23, 25$; wykładniczy i stały czas obsługi; wyniki symulacji

Fig. 8. Mean queue length at the multiplexer; the source has 31 phases, initial phase $j_0 = 21, 23, 25$. Exponential and constant service times; simulation results



Rys. 9. Średnia długość kolejki w przełączniku; źródło jest sterowane łańcuchem o 31 fazach, faza początkowa $j_0 = 21, 23, 25$; stały czas obsługi; rezultaty aproksymacji dyfuzyjnej i symulacji

Fig. 9. Mean queue length at the multiplexer; the source has 31 phases, initial phase $j_0 = 21, 23, 25$; constant service time; diffusion and simulation results



Rys. 10. Średnia długość kolejki w przełączniku; źródło jest sterowane łańcuchem o 31 fazach i jest kontrolowane mechanizmem cieknącego wiadra z zielonymi i czerwonymi żetonami, faza początkowa $j_0 = 17, 21 - 25, 28$; stały czas obsługi; rezultaty symulacji

Fig. 10. Mean queue length at the multiplexer; the source has 31 phases and is controlled by a leaky bucket with green and red tokens, initial phase $j_0 = 17, 21 - 25, 28$; constant service time; simulation results

LITERATURA

[1] Blondia C., Casals O.: Statistical multiplexing of VBR sources: A matrix-analytic approach. Performance Evaluation, 1992, vol. 16, no. 1-3, s. 5-20.

[2] Cox, D.R., Miller, H.D.: The Theory of Stochastic Processes. Methuen, London 1965.

[3] Czachórski, T.: A method to solve diffusion equation with instantaneous return processes acting as boundary conditions. Bulletin of Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, 1993, vol. 41, no. 4.

[4] Czachórski, T., Fourneau, J.M., Pekergin, F.: Diffusion Models to Study Nonstationary Traffic and Cell Loss in ATM Networks. ACM 2nd Workshop on ATM Networks, Bradford 1994.

[5] Czachórski, T., Pekergin, F.: Modele dyfuzyjne sterowania przepływem pakietów na wejściu do sieci. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, INFORMATYKA, z. 32, 1997.

[6] Czachórski, T., Atmaca, T.: Fourneau, J.M, Pekergin, F.: Dynamika przepływów w sieci, próby sterowania, modele dyfuzyjne. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, INFORMATYKA, z. 32, 1997.

[7] Czachórski, T., Pekergin, F.: Diffusion models of leaky bucket and partial buffer sharing policy: a transient analysis. Kouvatsos, D. (Editor): ATM Networks, Performance Modelling and Analysis, Chapman and Hall, London 1997.

[8] Czachórski, T., Pekergin, F.: Transient diffusion analysis of cell losses and ATM multiplexer behaviour under correlated traffic. 5th IFIP Workshop on Performance Modelling and Evaluation of ATM Networks, Ilkley, UK, 1997.

[9] Gelenbe E.: On Approximate Computer Systems Models. Journal of ACM, 1975, vol. 22 1975, no. 2.

[10] Gelenbe E., Pujolle G.: The Behaviour of a Single Queue in a General Queueing Network. Acta Informatica, 1976, Fasc. 7.

[11] Gelenbe, E., Mang, X., Önvural, R.: Diffusion based statistical call admission control in ATM. Performance Evaluation, 1996, vol. 27-28, s. 411-436.

[12] Guillemin, F., Boyer, J., Dupuis, A.: Burstiness in broadband integrated networks. Performance Evaluation, 1992, vol. 15, no. 3, s. 163-176.

[13] Kulkarni, L.A.: Transient behaviour of queueing systems with correlated traffic. Performance Evaluation, 1996, vol. 27-28, s. 117-146.

[14] Li, S.Q., Mark, J.W.: Traffic characterization for integrated services network. IEEE Trans. on Communications, 1990, vol. 38, no. 8, s. 1231-1243.

[15] Lee, D.S., Li, S.Q.: Transient analysis of multi-server queues with Markov-modulated Poisson arrivals and overload control. Performance Evaluation, 1992, vol. 16, s. 49-66.

[16] Maglaris, B., Anastassiou, D., Sen, P., Karlsson, G., Rubins, J.: Performance models of statistical multiplexing in packet video communications. IEEE Trans. on Communications, 1988, vol. 24559 36, no. 7 s. 834-844.

[17] Newell G. F.: Applications of Queueing Theory. Chapman and Hall, London 1971.

[18] Robert, S., Le Boudec, J.Y.: On a Markov modulated chain exhibiting self-similarities over finite timescale. Performance Evaluation, 1996, vol. 27-28, s. 159-174.

[19] Roberts, J., Mocci, U., Virtamo, J. (Editors): Broadband Network Teletraffic. Final Report of Action COST 242, Springer, Berlin 1996.

[20] Rose, O.: Statistical properties of MPEG video traffic and their impact on traffic modeling in ATM systems. Research report no.101, University of Wřtzburg, Institute of Computer Science, 1995 oraz dane pomiarowe dostępne pod adresem `http://www-info3.informatik.uni-wuerzburg.de/~rose`.

[21] Stehfest H.: Algorithm 368: Numeric Inversion of Laplace Transform. Communicarions of ACM, 1970, vol. 13, no. 1, s. 47-49.

Recenzent: Dr inż. Ewa Starzewska-Karwan

Wpłynęło do Redakcji 29 grudnia 1997 r.

Abstract

A diffusion model for queues with time-varying correlated input traffic is developped and used in the transient analysis of the behaviour of an ATM multiplexer controlled by a leaky bucket with two kinds of tokens.

We assume that the input traffic parameters are characterized by transient states of its underlying Markov chain and we obtain time-dependent coefficients of the diffusion equation which we solve using semi analytical and semi numerical approach. The usual advantages of diffusion approximation: relative ease to solve transient states and to compose complex models including several stations are shown.

We validate this approach by analysing the effects of a leaky bucket control mechanism on the features of a correlated stream entering the network and on the losses at a queueing station with space priority which represents an ATM multiplexer. We develop a diffusion transient model of a leaky bucket with two types of tokens and we investigate its influence on the characteristic of an ATM node using the diffusion model of a queueing station with threshold which we proposed earlier.