

Joanna TOMASIK

Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej, PAN

## ŹRÓDŁA ON/OFF MODELOWANE ZA POMOCĄ SIECI AUTOMATÓW STOCHASTYCZNYCH

**Streszczenie.** Tematem artykułu jest obliczanie parametrów wydajnościowych przełącznika sieciowego, którego jeden z kanałów jest modelowany jako stanowisko obsługi z ograniczoną kolejką i wykładniczym czasem obsługi z parametrem  $\mu$ , na które napływają klienci generowani przez źródła pracujące w okresach czynnych ON, a pozostają bezczynne w okresach biernych OFF. Obliczenia dokonywane są dla odpowiedniego łańcucha Markowa, którego macierz jest wyznaczana na podstawie opisu w formie sieci automatów stochastycznych.

## ON/OFF SOURCES MODELLED WITH A STOCHASTIC AUTOMATA NETWORK

**Summary.** The paper considers computing performance parameters for a network switch modelled as a service station with a limited queue and an exponentially distributed service time with the parameter  $\mu$ . Customers arriving at the station have been generated by a group of ON/OFF sources. Such a source emits customers during its active period ON and remains silent during its idle period OFF. A generator matrix of the corresponding Markov chain for numerical calculations is set as a stochastic automata network descriptor.

### 1. Wstęp

Metodą służącą do ułatwienia analitycznego rozwiązywania sieci kolejek zawierających elementy niestandardowe (synchronizacja, zależności funkcyjne) za pomocą układu równań określających prawdopodobieństwa stanów łańcucha Markowa jest metoda sieci automatów stochastycznych, w skrócie SAN (ang. *Stochastic Automata Network*), której przykłady można znaleźć np. w pracach [1, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. W swoich założeniach

jest ona metodą modułową, tj. sieć kolejek zostaje poddana dekompozycji na elementy, dla których buduje się opis ich działania w postaci grafu z etykietowanymi krawędziami, a następnie otrzymane dla tych grafów macierze połączeń z elementami będącymi wartościami etykiet krawędzi konsoliduje się za pomocą rachunku tensorowego macierzy, w celu uzyskania pełnego opisu całej sieci, tj. macierzy deskryptora. Ze względu na swoją specyfikę SAN jest przeznaczona do opisu systemów, które mogą być traktowane jako zbiór składowych, komunikujących się ze sobą wyłącznie przy synchronizacji czy przy zmianie swojego stanu w zależności od pozostałych elementów systemu, co może sugerować zastosowanie do modelowania systemów równoległych i rozproszonych.

Modułowa struktura sieci automatów stochastycznych oraz dopuszczenie przez nią tranzycji funkcyjnych, to znaczy takich przejść, których intensywność zależy od stanów pewnego podzbioru automatów stochastycznych, są szczególnie atrakcyjne dla użycia tej metody do analizy węzłów sieciowych, do których klienci napływają niejednostajnie, czyli źródła klientów pracują w fazie ON, a pozostają bezczynne w fazie OFF.

Problem odpowiedniego doboru rozmiarów buforów przechowujących w węzłach sieci pakiety przesyłane w różnych kierunkach ma decydujące znaczenie dla uzyskania przewidzianych i gwarantowanych użytkownikowi przez operatora sieci jakości usług wyrażonej w maksymalnym dopuszczalnym poziomie strat pakietów. W artykule analizowane jest zachowanie kolejek pakietów w węzłach sieci, w obecności charakterystycznych dla sieci z integracją usług i stochastyczną multipleksacją strumieni pakietów, które są wypadkową wielu źródeł o zmiennym natężeniu emisji pakietów.

## 2. Zarys operacji tensorowych dla macierzy

Idea macierzowych operacji tensorowych została szczegółowo omówiona w [16]. Niech macierz  $C \in M(d)$ , gdzie  $M(d)$  oznacza zbiór wszystkich macierzy wymiaru  $d \times d$ ,

$$\bigwedge_{1 \leq i, j \leq d} c_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Niech  $d$  nie jest liczbą pierwszą i  $d = d^{(1)}d^{(2)}$ ,  $d^{(i)} \neq 1$ ,  $i = 1, 2$ . Wówczas macierz  $C$  może być potraktowana jako macierz  $d^{(1)} \times d^{(1)}$  bloków będących macierzami  $d^{(2)} \times d^{(2)}$ . Przy takim podejściu do elementu macierzy  $C$  można się odwoływać, podając najpierw współrzędne bloku z przedziału  $1 \dots d^{(1)}$ , a następnie — współrzędne wewnątrz bloku z przedziału  $1 \dots d^{(2)}$ . Zatem:

$$C = (c_{ij})_{i, j \in L(d^{(1)}d^{(2)})},$$

gdzie  $L(d^{(1)}d^{(2)}) = \{\hat{k} : \hat{k} = (k^{(1)}, k^{(2)}) \wedge (1 \leq k^{(1)} \leq d^{(1)}) \wedge (1 \leq k^{(2)} \leq d^{(2)})\}$ , przy założeniu że zbiór ten jest uporządkowany leksykograficznie.

Blokowy zapis macierzy można uogólnić, gdy  $d = d^{(1)}d^{(2)} \dots d^{(N)}$ . Prowadzi to do zapisu:

$$C = (c_{\hat{i}\hat{j}})_{\hat{i}, \hat{j} \in L(d^{(1)}d^{(2)} \dots d^{(N)})}, \tag{1}$$

gdzie  $L(d^{(1)}d^{(2)} \dots d^{(N)}) = \{\hat{k} : \hat{k} = (k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(N)}) \wedge \bigwedge_{1 \leq l \leq N} 1 \leq k^{(l)} \leq d^{(l)}\}$ , przy założeniu że zbiór ten jest uporządkowany leksykograficznie.

**Definicja 2.1** *Iloczynem tensorowym macierzy  $A \in M(d^{(1)})$  i macierzy  $B \in M(d^{(2)})$  jest macierz  $C \in M(d^{(1)}d^{(2)})$ ,  $C = A \otimes B$  taka, że  $c_{\hat{i}\hat{j}} = a_{\hat{i}^{(1)}j^{(1)}} b_{i^{(2)}j^{(2)}}$ , gdzie  $\hat{i} = (i^{(1)}, i^{(2)})$ ,  $\hat{j} = (j^{(1)}, j^{(2)})$ .*

Jeżeli  $A = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,d^{(1)}}$ ,  $B = [b_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,d^{(2)}}$ , to

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1,d^{(1)}}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2,d^{(1)}}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d^{(1)},1}B & a_{d^{(1)},2}B & \dots & a_{d^{(1)},d^{(1)}}B \end{bmatrix}$$

**Definicja 2.2** *Sumą tensorową macierzy  $A \in M(d^{(1)})$  i macierzy  $B \in M(d^{(2)})$  jest macierz  $D \in M(d^{(1)}d^{(2)})$ ,  $D = A \oplus B$ ,  $D = A \otimes Id_{d^{(2)}} + Id_{d^{(1)}} \otimes B$ , gdzie  $Id_{d^{(k)}}$  oznacza macierz jednostkową o wymiarze  $d^{(k)} \times d^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ .*

Jeżeli  $A = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,d^{(1)}}$ ,  $B = [b_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,d^{(2)}}$ , to

$$D = A \oplus B = \begin{bmatrix} \text{diag}_{d^{(2)}}(a_{11}) + B & \text{diag}_{d^{(2)}}(a_{12}) & \dots & \text{diag}_{d^{(2)}}(a_{1,d^{(1)}}) \\ \text{diag}_{d^{(2)}}(a_{21}) & \text{diag}_{d^{(2)}}(a_{22}) + B & \dots & \text{diag}_{d^{(2)}}(a_{2,d^{(1)}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{diag}_{d^{(2)}}(a_{d^{(1)},1}) & \text{diag}_{d^{(2)}}(a_{d^{(1)},2}) & \dots & \text{diag}_{d^{(2)}}(a_{d^{(1)},d^{(1)}}) + B \end{bmatrix}$$

Iloczyn i suma tensorowa macierzy znane są też w literaturze jako iloczyn i suma Kroneckera ([4, 15]).

**Twierdzenie 2.1** *Podstawowe własności iloczynu i sumy tensorowej macierzy dla macierzy o składowych statych:*

1. łączność iloczynu tensorowego macierzy:  $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ ,
2. łączność sumy tensorowej macierzy:  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ ,

3. rozdzielnosc iloczynu tensorowego macierzy wzgledem dodawania macierzy:

$$(A + B) \otimes (C + D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D,$$

4. rozdzielnosc iloczynu tensorowego macierzy wzgledem mnozenia macierzy:

$$(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D),$$

$$5. (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T,$$

$$6. (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Dowód powyższego twierdzenia jest trywialny ([2]). ■

Niech  $d = d^{(1)}d^{(2)}$  i niech  $F(d^{(1)}d^{(2)})$  oznacza zbiór funkcji określonych na zbiorze par  $L(d^{(1)}d^{(2)})$  o wartościach w zbiorze  $\mathbb{R}$ . Dalej, niech  $M(d^{(1)}, F(d^{(1)}d^{(2)}))$  oznacza zbiór macierzy wymiaru  $d^{(1)} \times d^{(1)}$ , których współczynniki należą do  $F(d^{(1)}d^{(2)})$ , a zatem — gdy przyjąć, że  $Q \in M(d^{(1)}, F(d^{(1)}d^{(2)}))$  — są postaci  $q_{i,j}(\hat{i})$ ,  $\hat{i} \in L(d^{(1)}d^{(2)})$ . Jako współczynniki  $(i, j)$  macierzy  $Q$  należy więc rozumieć wartość funkcji  $q_{i,j}$ ,  $q_{i,j} : L(d^{(1)}d^{(2)}) \rightarrow \mathbb{R}$ , dla argumentu  $\hat{i}$ .

**Definicja 2.3** Niech rozważane będą macierze  $A \in M(d^{(1)}, F(d^{(1)}d^{(2)}))$  i  $B \in M(d^{(2)}, F(d^{(1)}d^{(2)}))$ . Wówczas uogólniony iloczyn tensorowy macierzy  $A \otimes B$  jest zdefiniowany jako  $C \in M(d^{(1)}d^{(2)})$ , gdzie:  $c_{\hat{i}, \hat{j}} = a_{i(1), j(1)}(\hat{i})b_{i(2), j(2)}(\hat{i})$ ,  $\hat{i}, \hat{j} \in L(d^{(1)}d^{(2)})$ ,  $\hat{i} = (i^{(1)}, i^{(2)})$ ,  $\hat{j} = (j^{(1)}, j^{(2)})$ .

Dla przykładu, niech  $A^{(1)}$  i  $A^{(2)}$  są dwiema macierzami o elementach funkcyjnych odpowiednio o przestrzeniach stanów  $\{1, 2, \dots, d^{(1)}\}$  i  $\{1, 2, \dots, d^{(2)}\}$ .

|             |           |  |  |          |  |
|-------------|-----------|--|--|----------|--|
|             |           | 1  | 2  | ...      | $d^{(1)}$                                      |
| $A^{(1)} =$ | 1         | $a_{11}^{(1)}(1, j^{(2)})$               | $a_{12}^{(1)}(1, j^{(2)})$               | ...      | $a_{1, d^{(1)}}^{(1)}(1, j^{(2)})$             |
|             | 2         | $a_{21}^{(1)}(2, j^{(2)})$               | $a_{22}^{(1)}(2, j^{(2)})$               | ...      | $a_{2, d^{(1)}}^{(1)}(2, j^{(2)})$             |
|             | $\vdots$  | $\vdots$                                 | $\vdots$                                 | $\vdots$ | $\vdots$                                       |
|             | $d^{(1)}$ | $a_{d^{(1)}, 1}^{(1)}(d^{(1)}, j^{(2)})$ | $a_{d^{(1)}, 2}^{(1)}(d^{(1)}, j^{(2)})$ | ...      | $a_{d^{(1)}, d^{(1)}}^{(1)}(d^{(1)}, j^{(2)})$ |

Patrząc na macierz  $A^{(1)}$  jako na macierz intensywności przejść, można zauważyć, że element  $a_{ik}^{(1)}(i, j^{(2)})$  reprezentuje intensywność przejścia pomiędzy stanami  $i$  a  $k$ , przy czym intensywność jest między innymi funkcją stanu wyjściowego  $i$  dla tego automatu.

Po przemnożeniu tensorowym macierzy  $A^{(1)}$  i  $A^{(2)}$  otrzymuje się macierz  $C$ , jak podano poniżej, z elementami będącymi funkcjami dwuargumentowymi (argumenty tych

funkcji należą do iloczynu kartezjańskiego  $\{1, 2, \dots, d^{(1)}\} \times \{1, 2, \dots, d^{(2)}\}$ .

|                    | (11)                                    | ...      | $(1d^{(2)})$                                  | ...      | $(d^{(1)}d^{(2)})$                                  |
|--------------------|---|----------|---|----------|---|
| (11)               | $c_{11,11}(11)$                         | ...      | $c_{11,1d^{(2)}}(11)$                         | ...      | $c_{11,d^{(1)}d^{(2)}}(11)$                         |
| (12)               | $c_{12,11}(12)$                         | ...      | $c_{12,1d^{(2)}}(12)$                         | ...      | $c_{12,d^{(1)}d^{(2)}}(12)$                         |
| $\vdots$           | $\vdots$                                | $\vdots$ | $\vdots$                                      | $\vdots$ | $\vdots$  |
| $(1d^{(2)})$       | $c_{1d^{(2)},11}(1d^{(2)})$             | ...      | $c_{1d^{(2)},1d^{(2)}}(1d^{(2)})$             | ...      | $c_{1d^{(2)},d^{(1)}d^{(2)}}(1d^{(2)})$             |
| $\vdots$           | $\vdots$                                | $\vdots$ | $\vdots$                                      | $\vdots$ | $\vdots$  |
| $(d^{(1)}d^{(2)})$ | $c_{d^{(1)}d^{(2)},11}(d^{(1)}d^{(2)})$ | ...      | $c_{d^{(1)}d^{(2)},1d^{(2)}}(d^{(1)}d^{(2)})$ | ...      | $c_{d^{(1)}d^{(2)},d^{(1)}d^{(2)}}(d^{(1)}d^{(2)})$ |

Intensywność przejścia między stanami  $(i, j)$  i  $(k, l)$  jest teraz opisana przez współczynnik funkcyjny  $c_{i,k,jl}(i, j)$  zależny od stanu wyjściowego  $(i, j)$ .

Dla uogólnionego iloczynu tensorowego zachodzą tylko odpowiedniki punktów 1 i 3 twierdzenia 2.1. Rozdzielność mnożenia tensorowego macierzy względem mnożenia macierzy zachodzi dla pewnego szczególnego przypadku ([13]), co znajduje swoje zastosowanie w konstrukcji zmodyfikowanego deskryptora (wzór (7)).

### 3. Budowa generatora łańcucha Markowa w czasie ciągłym

Wielowymiarowy łańcuch Markowa odpowiadający modelowi całej sieci kolejek jest przedstawiony w postaci uporządkowanego zbioru jednowymiarowych procesów stochastycznych, zwanych automatami stochastycznymi, przy czym te składowe procesy nie muszą być łańcuchami Markowa. Aby zapewnić spełnienie warunku Markowa dla całej sieci, zakłada się, że istniejące zdarzenia synchronizujące mogą być zależne tylko od bieżącego stanu całego systemu i zachodzą w odstępach czasu zgodnych z rozkładem wykładniczym (dla czasu ciągłego) albo geometrycznym (dla czasu dyskretnego) oraz są one zdarzeniami niezależnymi.

Modele pokazane w niniejszym artykule przedstawione są w czasie ciągłym, więc prezentowany poniżej formalizm odnosić się będzie tylko do tego przypadku. Z uwagi na szczupłość miejsca opis jest bardzo skrótowy; szczegółową reprezentację można znaleźć w [1, 6, 12, 16].

Rozważana jest sieć kolejek zdekomponowana na zbiór  $N$  automatów stochastycznych, w której nie zachodzą żadne zdarzenia synchronizujące, innymi słowy w etykietach nie występują uporządkowane trójki. Niech  $F^{(i)} : S^{(i)} \times S^{(i)} \rightarrow \mathcal{L}$  jest funkcją etykietującą dla  $i$ -tego automatu, a  $\mathcal{L}$  jest zbiorem etykiet [16]. Zatem za przejścia między stanami odpowiedzialne są tylko funkcje  $\tau$  i znajdują się one w macierzach lokalnych generato-

rów  $Q^{(i)}$ , a mianowicie jeżeli  $\tau \in F^{(i)}(s_1^{(i)}, s_2^{(i)})$  to  $q_{s_1^{(i)}, s_2^{(i)}}^{(i)} = \tau$ , a jeżeli nie, to  $q_{s_1^{(i)}, s_2^{(i)}}^{(i)} = 0$ , a elementy diagonalne macierzy  $Q^{(i)}$  są równe sumie pozostałych elementów wiersza ze znakiem minus.

Globalny generator  $Q$  tego systemu można obliczyć na podstawie wzoru:

$$Q = \bigoplus_{i=1}^N Q^{(i)} \quad (2)$$

(por. [8]).

Niech założone będzie teraz, że w analizowanej sieci zachodzi  $K$  zdarzeń synchronizujących. Niech dla  $i$ -tego automatu zachodzi zdarzenie synchronizujące  $j$ .

Aby uwzględnić jego wpływ, dla tego automatu określana jest macierz dla zdarzenia synchronizującego  $S_j^{(i)}$ . Jeżeli  $(e_j, \tau_j, p) \in F^{(i)}(s_1^{(i)}, s_2^{(i)})$ , to element  $(S_j^{(i)})_{s_1^{(i)}, s_2^{(i)}} = p\tau_j$ , a  $S_j^{(i)}(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}) = 0$  w przeciwnym przypadku.

Z macierzą tą jest stowarzyszona macierz diagonalna  $R_j^{(i)}$ , taka że  $(S_j^{(i)} - R_j^{(i)})$  jest macierzą, w której suma elementów w każdym wierszu wynosi 0, co pozwala traktować  $(S_j^{(i)} - R_j^{(i)})$  jako macierz generatora. Znając dla  $i$ -tego automatu odpowiadające mu macierze, można zbudować jego generator  $M^{(i)}$  uwzględniający zarówno tranzycje lokalne, jak i synchronizujące. I tak dla określenia jak w [1]

$$M^{(i)} = Q^{(i)} + \sum_{j=1}^K (S_j^{(i)} - R_j^{(i)}), \quad (3)$$

a jak w [12] dla funkcji o stałych wartościach, z wyprowadzeniem tych wartości przed nawias:

$$M^{(i)} = Q^{(i)} + \sum_{j=1}^K \tau_j (\bar{S}_j^{(i)} - \bar{R}_j^{(i)}). \quad (4)$$

Przyjęte jest przy tym, że jeżeli na  $i$ -ty automat zdarzenie  $j$  nie ma wpływu, to  $R_j^{(i)} = S_j^{(i)} = Id_{d^{(i)}}$  oraz jeżeli w  $i$ -tym automacie zachodzą tylko zdarzenia synchronizujące, to  $Q^{(i)} = O$ .

Przy takich założeniach globalny generator (deskryptor)  $Q$  rozważanego systemu ma postać:

1) w sensie definicji ogólnej [1]

$$Q = \bigoplus_{i=1}^N Q^{(i)} + \sum_{j=1}^K (\bigotimes_{i=1}^N S_j^{(i)} - \bigotimes_{i=1}^N R_j^{(i)}) \quad (5)$$

2) w sensie definicji szczególnej [12] z odpowiednim wydzieleniem elementów macierzy  $S_j^{(i)}$  i  $R_j^{(i)}$

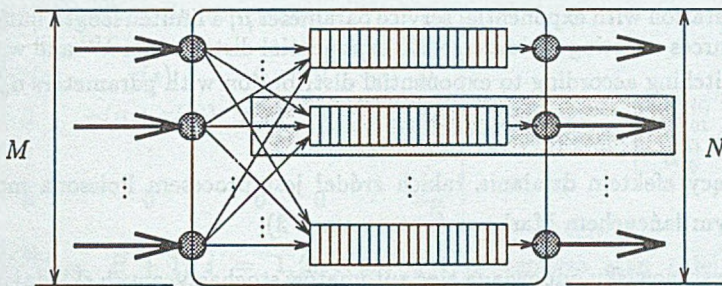
$$Q = \bigoplus_{i=1}^N Q^{(i)} + \sum_{j=1}^K \tau_j (\bigotimes_{i=1}^N \bar{S}_j^{(i)} - \bigotimes_{i=1}^N \bar{R}_j^{(i)}) \quad (6)$$

3) w sensie definicji ogólnej, zmodyfikowanej [16]

$$Q = \bigoplus_{i=1}^N Q^{(i)} + \sum_{j=1}^K \text{diag}_d(\tau_j(s)) \left( \bigotimes_{i=1}^N (S_j^{(i)})_p - \bigotimes_{i=1}^N (R_j^{(i)})_p \right), \quad (7)$$

i macierz  $Q$  nazywana jest deskryptorem sieci automatów stochastycznych z czasem ciągłym.

Sposób komputerowych obliczeń deskryptorów „na bieżąco” w trakcie trwania procesu iteracyjnego przedstawiony jest w [16, 17]. Jako metoda iteracyjna została użyta blokowa metoda Gaußa-Seidela, przystosowana do pobierania elementów niezerowych z „wirtualnego” generatora [14].



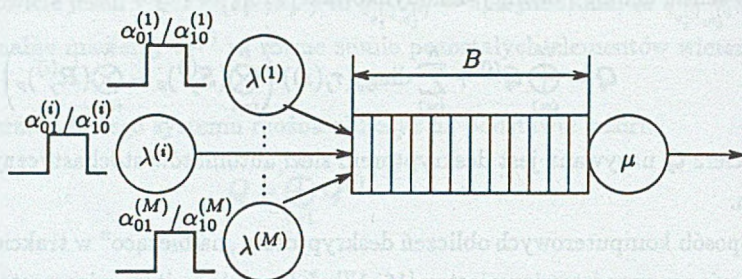
Rys. 1. Przełącznik sieciowy  $M \times N$

Fig. 1. Network switch  $M \times N$

#### 4. Stanowiska ON/OFF i wyniki obliczeń

Rozważmy przełącznik sieciowy o  $M$  wejściach i  $N$  wyjściach (rysunek 1). Jak zostało zauważone w [5], analizę prowadzi się tylko dla pojedynczego kanału, który można zamodelować pojedynczym stanowiskiem obsługi, na który wprowadzani są klienci z nieregularnie pracujących kilku źródeł.

Analizowano stanowisko o wykładniczym czasie obsługi  $\mu = 1$ . Na stanowisko to klienci wprowadzani byli z  $M$  źródeł (rysunek 2) pracujących dwufazowo: w fazie ON  $i$ -te źródło emituje klientów z intensywnością  $\lambda^{(i)}$ , a w fazie OFF — milczy. Przełączanie między fazami  $i$ -tego źródła odbywa się zgodnie z rozkładem wykładniczym, z intensywnością  $\alpha_{01}^{(i)}$  (z fazy OFF do fazy ON) oraz z intensywnością  $\alpha_{10}^{(i)}$  (z fazy ON do fazy OFF).

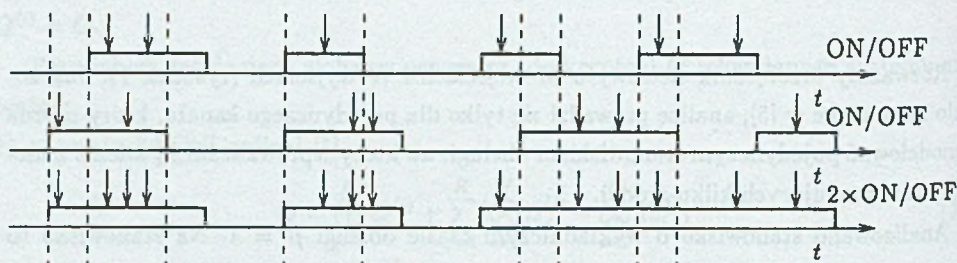


Rys. 2. Stanowisko z wykładniczym czasem obsługi z parametrem  $\mu$ , buforem o skończonej pojemności  $B$  i  $M$  źródłami emitującymi klientów z rozkładem wykładniczym z parametrem  $\lambda^{(i)}$  i pracującymi z przełączaniem ON/OFF odbywającym się zgodnie z rozkładem wykładniczym z parametrami  $\alpha_{01}^{(i)}/\alpha_{10}^{(i)}$

Fig. 2. A station with exponential service parameter  $\mu$ , a limited length buffer  $B$  with  $M$  sources emitting customers with exponential distribution  $\lambda^{(i)}$  and with ON/OFF switching according to exponential distribution with parameters  $\alpha_{01}^{(i)}/\alpha_{10}^{(i)}$

Proces będący efektem działania takich źródeł jest procesem Poissona modulowanym dwustanowym łańcuchem Markowa (por. rysunek 3).

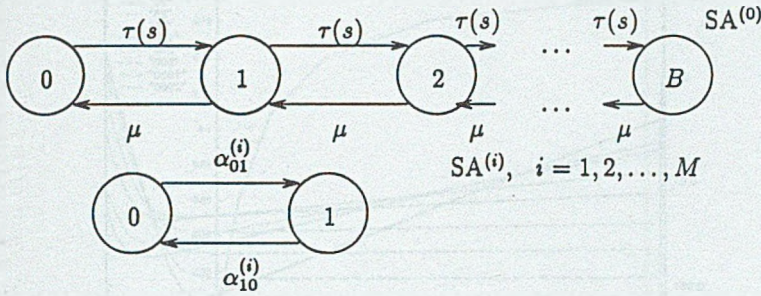
Takiemu stanowisku odpowiada sieć automatów stochastycznych składająca się z  $M+1$  automatów stochastycznych (rysunek 4). Niech automat o numerze porządkowym 0 wymiaru  $B+1$  odpowiada liczbie klientów w buforze, a automaty od 1 do  $M+1$ , każdy wymiaru 2 odpowiadają fazom ON i OFF poszczególnych źródeł. Intensywność przejść w automacie 0 zależy od stanów pozostałych automatów. Ponieważ źródła emitują klientów niezależnie, w sieci nie zachodzą zdarzenia synchronizujące. Lokalne generatory dla



Rys. 3. Przykładowy proces Poissona modulowany łańcuchem Markowa: dwa źródła ON/OFF

Fig. 3. An example of Markov modulated Poisson process — two ON/OFF sources





Rys. 4. Sieć automatów stochastycznych dla  $M$  źródeł ON/OFF  
 Fig. 4. Stochastic automata network for  $M$  ON/OFF sources

automatów przedstawiają się następująco:

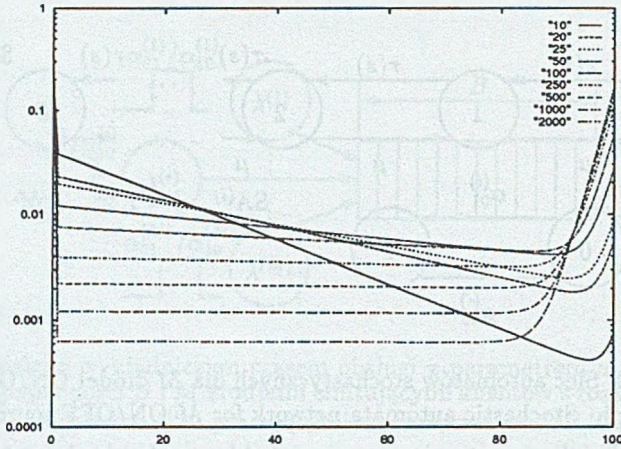
$$Q^{(0)} = \begin{bmatrix} -\tau(s) & \tau(s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu & -(\mu + \tau(s)) & \tau(s) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\mu \end{bmatrix}, \quad Q^{(i)} = \begin{bmatrix} -\alpha_{01}^{(i)} & \alpha_{01}^{(i)} \\ \alpha_{10}^{(i)} & -\alpha_{10}^{(i)} \end{bmatrix},$$

gdzie  $\dim(Q^{(0)}) = B + 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, M + 1$ ,  $s$  oznacza stan całej sieci  $s = (s^{(0)}, s^{(1)}, \dots, s^{(M+1)})$ , a wartość intensywności  $\tau(s)$  wynosi  $s^{(1)}\lambda^{(1)} + s^{(2)}\lambda^{(2)} + \dots + s^{(M+1)}\lambda^{(M+1)}$ . Intensywność pracy źródeł może być też zależna od aktualnego zapelnienia bufora, na przykład przez wprowadzenie wartości progowych. Wtedy wartość intensywności  $\tau(s)$  zależy również od stanu zerowego automatu, na przykład  $\tau(s) = \chi(s^{(0)} \leq t_1)s^{(1)}\lambda_1^{(1)} + \chi(s^{(0)} > t_1)s^{(1)}\lambda_2^{(1)} + \chi(s^{(0)} \leq t_2)s^{(2)}\lambda_1^{(2)} + \chi(s^{(0)} > t_2)s^{(2)}\lambda_2^{(2)} + \dots + \chi(s^{(0)} \leq t_{M+1})s^{(M+1)}\lambda_1^{(M+1)} + \chi(s^{(0)} > t_{M+1})s^{(M+1)}\lambda_2^{(M+1)}$ , gdzie  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M + 1$ , oznaczają różne wartości progów dla różnych źródeł, a funkcja  $\chi$  przybiera wartość 1, jeżeli jej argument jest prawdziwy i wartość 0 w przeciwnym przypadku.

Wykonano następującą sekwencję eksperymentów, w których zawsze  $\mu = 1$ , a czasy pobytu w fazie ON i fazie OFF są sobie równe, szukając rozkładu prawdopodobieństwa klientów w buforze i strat klientów:

1) Dla pojedynczego źródła ON/OFF pracującego w fazie aktywnej z intensywnością  $\lambda^{(1)} = 1.6$  przeliczono serię różniącą się od siebie długością trwania fazy aktywnej i biernej (długość trwania obu tych faz była równa). Rozkład prawdopodobieństw stanów dla tej serii jest zamieszczony na rysunku 5, a prawdopodobieństwo strat na rysunku 6.

**Wnioski:** Im dłuższy jest czas trwania fazy aktywnej, tym większe są straty klientów, gdyż podczas trwania fazy ON źródło produkuje tak wielu klientów, że stanowisko nie jest



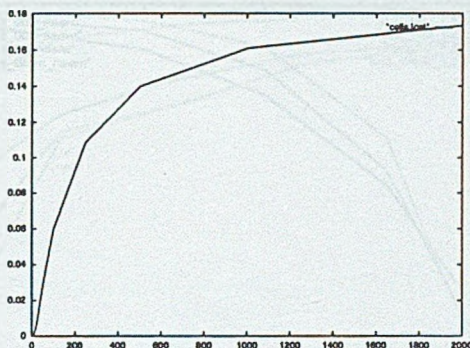
Rys. 5. Rozkład prawdopodobieństw długości kolejki dla stanowiska z jednym źródłem ON/OFF dla bufora o długości  $B = 100$  i średniej długości trwania fazy  $\frac{1}{\alpha_s} = 10, 20, 25, 50, 100, 250, 500, 1000, 2000, x = 01, 10$

Fig. 5. Probability distribution of queue length for ON/OFF model with buffer length  $B$  equal to 100 and mean transition time  $\frac{1}{\alpha_s} = 10, 20, 25, 50, 100, 250, 500, 1000, 2000, x = 01, 10$

w stanie ich wszystkich obsłużyć — przy wzroście długości faz prawdopodobieństwo tego, że bufor jest pusty, jest coraz mniejsze. Przy wydłużaniu fazy aktywnej źródło ON/OFF zaczyna się zachowywać podobnie jak stanowisko M/M/1/B, które dla  $\lambda^{(1)} = 1.6$  i  $\mu = 1$  jest przeciążone.

2) Liczba źródeł była zmienna i wynosiła kolejno 1, 2, 3, 4 i 6. Źródła dla danego modelu miały takie same czasy trwania fazy czynnej i biernej (odpowiednio 50, 100, 500), a intensywność pracy w stanie aktywnym była dla każdego ze źródeł taka jak poprzednio, tj.  $\lambda^{(i)} = 1.6$ . Średnia długość kolejki zobrazowana jest na rysunku 7, prawdopodobieństwo strat — na rysunku 8, a rozkłady prawdopodobieństwa liczby klientów w buforze dla czterech źródeł — na rysunku 9. Na rysunkach 7 i 8 naniesiono także wykresy dla kilku źródeł pracujących w sposób ciągły, każde z intensywnością  $\lambda^{(i)}$ , które stanowią przypadek skrajny (M/M/1/B).

*Wnioski:* Niezależnie od liczby źródeł straty dla dłuższych faz ON/OFF są większe — tak jak to pokazano wyżej dla jednego źródła (rysunek 8). Tymczasem począwszy od dwóch źródeł, średnia liczba klientów w kolejce jest mniejsza dla faz dłuższych (rysunek 7). Dlaczego tak się dzieje, ilustruje rysunek 9. Wykres rozkładu prawdopodobieństwa liczby klientów w buforze dla długiego średniego czasu trwania fazy ON jest ponad wykresem tego rozkładu dla krótszej fazy dla mniejszej liczby klientów, natomiast powyżej —



Rys. 6. Prawdopodobieństwo strat dla stanowiska z jednym źródłem ON/OFF dla bufora o długości  $B = 100$  i średniej długości trwania fazy  $\frac{1}{\alpha_n} = 10, 20, 25, 50, 100, 250, 500, 1000, 2000, x = 01, 10$

Fig. 6. Probability of cell loss for ON/OFF model with buffer length  $B$  equal to 100 and mean transition time  $\frac{1}{\alpha_n} = 10, 20, 25, 50, 100, 250, 500, 1000, 2000, x = 01, 10$

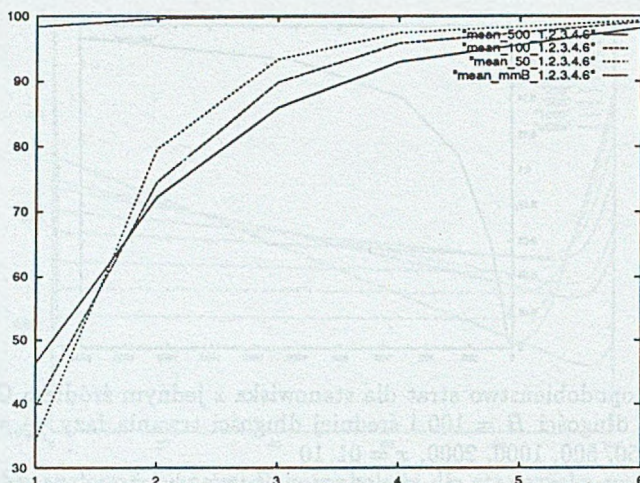
dla dużej zajętości bufora. I tak średnie wypełnienie bufora dla średniego czasu trwania faz 50, 100, 500 wynosi odpowiednio: 97.3007, 95.7009, 92.8577.

3) Przy różnej liczbie źródeł zachowana była średnia intensywność generacji klientów, czyli strumień wejściowy miał stałą średnią  $\lambda^* = 1.6$  przy rosnącej wraz z liczbą źródeł wariancji. Wszystkie źródła wprowadzały jednakowy strumień do sieci i były przełączane identycznie, z fazami ON i OFF trwającymi średnio po 100. Oznacza to, że dla jednego źródła  $\lambda^{(i)} = 3.2$ , dla dwóch źródeł —  $\lambda^{(i)} = 1.6$ , dla trzech źródeł —  $\lambda^{(i)} = 1.06(6)$ , dla czterech źródeł —  $\lambda^{(i)} = 0.8$ , dla sześciu źródeł —  $\lambda^{(i)} = 0.53(3)$ . Rozkłady liczby klientów w buforze w zależności od liczby źródeł przedstawione są na rysunku 10.

*Wnioski:* Zwiększająca się wraz z liczbą źródeł wariancja strumienia klientów wprowadzanego do bufora powoduje, że prawdopodobieństwa poszczególnych wartości zajętości bufora stają się coraz bardziej nierównomierne, chociaż nie ma ona znacznego wpływu na wzrost prawdopodobieństwa strat.

4) Dla ustalonej liczby źródeł (4) i ich ustalonej średniej intensywności generacji klientów zmieniano intensywności strumienia klientów dla poszczególnych źródeł, przy czym czasy przełączania między fazami były dla wszystkich źródeł i wynosiły — jak powyżej — 100. Parametry strumieni źródeł były następujące:

| $\lambda^{(1)}$ | $\lambda^{(2)}$ | $\lambda^{(3)}$ | $\lambda^{(4)}$ | $\lambda^{(1)}$ | $\lambda^{(2)}$ | $\lambda^{(3)}$ | $\lambda^{(4)}$ | $\lambda^{(1)}$ | $\lambda^{(2)}$ | $\lambda^{(3)}$ | $\lambda^{(4)}$ |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0.8             | 0.8             | 0.8             | 0.8             | 0.3             | 0.5             | 0.8             | 1.6             | 0.1             | 0.1             | 1.5             | 1.5             |
| 0.1             | 0.1             | 0.1             | 2.9             | 0.5             | 1.0             | 0.6             | 1.1             | 0.6             | 0.7             | 0.8             | 1.1             |



Rys. 7. Średnia długość kolejki w buforze długości 100 w zależności od liczby źródeł; źródła mają jednakową charakterystykę i różnią się czasem przełączania 50, 100, 500

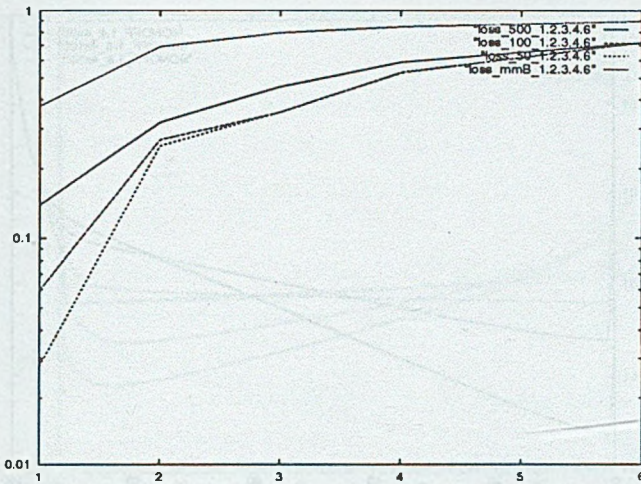
Fig. 7. Mean queue length for  $B = 100$  related to number of sources; for each case all sources are identical one to another with mean interphase switching time 50, 100, 500

i odzwierciedlały różny wpływ źródeł na strumień wyjściowy (od jednego „dominującego” źródła do czterech źródeł w jednakowym stopniu odpowiedzialnych za generowany ruch). Rozkład prawdopodobieństwa liczby klientów w buforze znajduje się na rysunku 11.

*Wnioski:* Największą wariancję strumienia klientów wnoszą źródła o jednakowej intensywności generacji; źródło generujące relatywnie mały ruch ma znikomy wpływ na rozrzut prawdopodobieństw zajętości bufora, np. źródła, z których trzy pracują z małą intensywnością  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = 0.1$ , a tylko jedno wnosi znaczący wkład do strumienia wypadkowego z intensywnością  $\lambda^{(4)} = 2.9$ , zachowują się w przybliżeniu jak jedno źródło ON/OFF.

##### 5) Zmniejszenie intensywności emisji po osiągnięciu określonego progu:

| DWA ŹRÓDŁA |                 | Przedziały $s^{(0)}$ |           | DWA ŹRÓDŁA |                 | Przedziały $s^{(0)}$ |           |
|------------|-----------------|----------------------|-----------|------------|-----------------|----------------------|-----------|
| Eksp. 1    | Intens.         | [0; 50]              | (50; 100] | Eksp. 2    | Intens.         | [0; 50]              | (50; 100] |
|            | $\lambda^{(1)}$ | 1.6                  | 0.8       |            | $\lambda^{(1)}$ | 1.6                  | 1.6       |
|            | $\lambda^{(2)}$ | 1.6                  | 0.8       |            | $\lambda^{(2)}$ | 1.6                  | 0.8       |



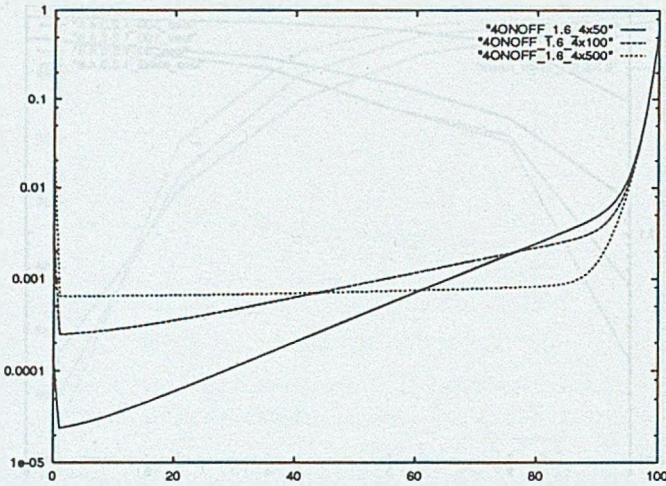
Rys. 8. Prawdopodobieństwo strat w buforze długości  $B = 100$  w zależności od liczby źródeł; źródła mają jednakową charakterystykę i różnią się średnim czasem fazy  $\frac{1}{\alpha_s} = 50, 100, 500, x = 01, 10$

Fig. 8. Probability of cell loss for buffer with  $B = 100$  related to number of sources; for each case all sources are identical with mean phase duration  $\frac{1}{\alpha_s} = 50, 100, 500, x = 01, 10$

| TRZY ŹRÓDŁA |                 | Przedziały $s^{(0)}$ |          |          |           |
|-------------|-----------------|----------------------|----------|----------|-----------|
| Eksp. 3     | Intens.         | [0; 25]              | (25; 50] | (50; 75] | (75; 100] |
|             | $\lambda^{(1)}$ | 1.6                  | 1.6      | 1.6      | 0.8       |
|             | $\lambda^{(2)}$ | 1.6                  | 1.6      | 0.8      | 0.8       |
|             | $\lambda^{(3)}$ | 1.6                  | 0.8      | 0.8      | 0.8       |

| CZTERY ŹRÓDŁA |                 | Przedziały $s^{(0)}$ |          |          |          |           |
|---------------|-----------------|----------------------|----------|----------|----------|-----------|
| Eksp. 4       | Intensywność    | [0; 60]              | (60; 70] | (70; 80] | (80; 90] | (90; 100] |
| Eksp. 5       | Intensywność    | [0; 10]              | (10; 20] | (20; 30] | (30; 40] | (40; 100] |
|               | $\lambda^{(1)}$ | 1.6                  | 1.6      | 1.6      | 1.6      | 0.8       |
|               | $\lambda^{(2)}$ | 1.6                  | 1.6      | 1.6      | 0.8      | 0.8       |
|               | $\lambda^{(3)}$ | 1.6                  | 1.6      | 0.8      | 0.8      | 0.8       |
|               | $\lambda^{(4)}$ | 1.6                  | 0.8      | 0.8      | 0.8      | 0.8       |

| SZEŚĆ ŹRÓDŁA |                 | Przedziały $s^{(0)}$ |          |          |          |          |          |           |
|--------------|-----------------|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| Eksp. 6      | Intensywność    | [0; 40]              | (40; 50] | (50; 60] | (60; 70] | (70; 80] | (80; 90] | (90; 100] |
|              | $\lambda^{(1)}$ | 1.6                  | 1.6      | 1.6      | 1.6      | 1.6      | 1.6      | 0.8       |
|              | $\lambda^{(2)}$ | 1.6                  | 1.6      | 1.6      | 1.6      | 1.6      | 0.8      | 0.8       |



Rys. 9. Rozkład prawdopodobieństw liczby klientów w buforze długości 100 dla czterech źródeł z  $\lambda^{(i)} = 1.6$  dla  $\frac{1}{\alpha_n} = 50, 100, 500$ ,  $x = 01, 10$

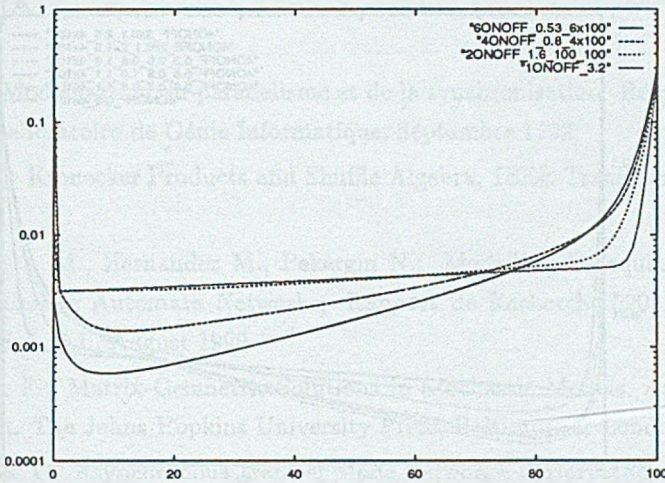
Fig. 9. Probability distribution of queued customers for buffer with  $B = 100$  for four sources with  $\lambda^{(i)} = 1.6$  and  $\frac{1}{\alpha_n} = 50, 100, 500$ ,  $x = 01, 10$

| SZEŚĆ ŹRÓDEŁ |                 | Przedziały $s^{(0)}$ |          |          |          |          |          |           |
|--------------|-----------------|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| Eksp. 6      | Intensywność    | [0; 40]              | (40; 50] | (50; 60] | (60; 70] | (70; 80] | (80; 90] | (90; 100] |
|              | $\lambda^{(3)}$ | 1.6                  | 1.6      | 1.6      | 1.6      | 0.8      | 0.8      | 0.8       |
|              | $\lambda^{(4)}$ | 1.6                  | 1.6      | 1.6      | 0.8      | 0.8      | 0.8      | 0.8       |
|              | $\lambda^{(5)}$ | 1.6                  | 1.6      | 0.8      | 0.8      | 0.8      | 0.8      | 0.8       |
|              | $\lambda^{(6)}$ | 1.6                  | 0.8      | 0.8      | 0.8      | 0.8      | 0.8      | 0.8       |

*Wnioski:* Zależność intensywności emisji od stanu zapelnienia bufora można uważać za występowanie w układzie sprzężenia zwrotnego. Dla wartości progowych funkcje prawdopodobieństwa liczby klientów osiągały swoje maksima lokalne (por. rysunek 12). Ponieważ osłabienie emitowanego strumienia dla eksperymentu piątego następowało wcześniej niż dla eksperymentu czwartego, to straty dla niego były względnie mniejsze.

## 5. Komentarz do uzyskanych rezultatów

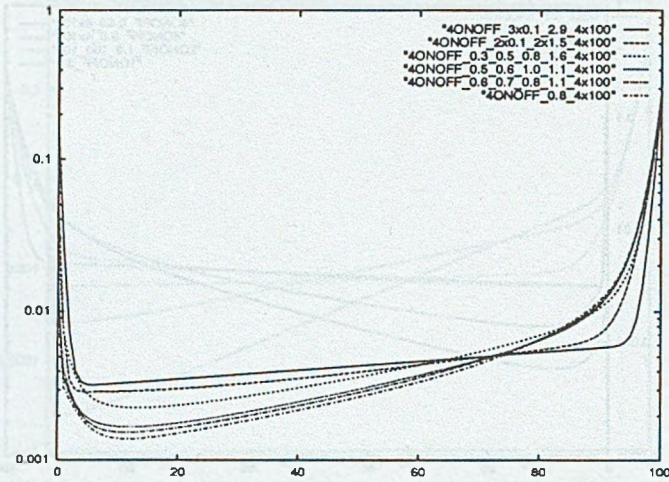
Metoda automatów stochastycznych pozwala na modułową konstrukcję wszystkich modeli, które były tu prezentowane. Zmiany wymiaru globalnego łańcucha Markowa za-



Rys. 10. Rozkład prawdopodobieństw liczby klientów w buforze długości  $B = 100$  w zależności od liczby źródeł; źródła sumarycznie generują klientów z tą samą średnią intensywnością  $\lambda^* = 1.6$ , a każde źródło wnosi tę samą intensywność

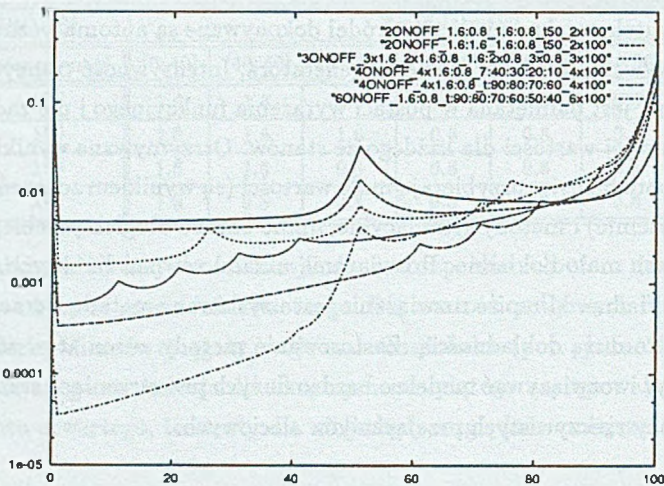
Fig. 10. Probability distribution of the number of customers in the buffer with  $B = 100$  related to the number of sources; for each case all sources combined generate customers with the same transition rate  $\lambda^* = 1.6$  and each source generates customers with the same transition rate

chodzące na skutek zwiększenia liczby źródeł dokonywane są automatycznie, bez konieczności przechowywania *explicite* macierzy generatora. Intensywność tranzycji, zmienna ze stanem systemu, jest pamiętana w postaci wyrażenia funkcyjnego i nie zachodzi konieczność zachowania jej wartości dla każdego ze stanów. Otrzymywane wyniki w formie rozkładu prawdopodobieństw przybierają małe wartości (są wynikiem zdarzeń rzadko występujących w systemie) i metody symulacyjne, mimo bardzo długich przebiegów, pozostają w tych miejscach mało dokładne. Rozwiązanie układu równań liniowych Markowa daje rozwiązanie dokładne. Mimo że rozwiązanie jest uzyskiwane metodą iteracyjną, można je uzyskać z bardzo dużą dokładnością. Zastosowanie metody automatów stochastycznych pozwala tworzyć i rozwiązywać modele o bardzo dużych przestrzeniach stanów, niezbędne dla analizy pracy rzeczywistych przełączników sieciowych.



Rys. 11. Rozkład prawdopodobieństw liczby klientów w buforze długości  $B = 100$  dla czterech źródeł; źródła sumarycznie generują z tą samą średnią intensywnością  $\lambda^* = 1.6$ , ale intensywności pochodzące od różnych źródeł są różne

Fig. 11. Probability distribution of the number of customers in the buffer with  $B = 100$  for four sources; for each case all sources combined generate with the same transition rate  $\lambda^* = 1.6$  but transition rates are different for the sources



Rys. 12. Rozkład prawdopodobieństw liczby klientów w buforze długości  $B = 100$  dla różnej liczby źródeł; po przekroczeniu pewnego progu kolejne źródło ogranicza swoją emisję

Fig. 12. Probability distribution of the number of customers in the buffer with  $B = 100$  for a different number of sources; when a certain threshold is exceeded, the corresponding source cuts down its transition rate



## LITERATURA

- [1] Atif K.: Modélisation du parallélisme et de la synchronisation, Rozprawa doktorska, Le Laboratoire de Génie Informatique, Septembre 1992.
- [2] Davio M.: Kronecker Products and Shuffle Algebra, IEEE Trans. on Comp., (30), 1981.
- [3] Fourneau J. M., Hernandez M., Pekergin N.: Modelling Resequencing Systems with Stochastic Automata Networks, Rapport de Recherche 590, Université de Paris-Sud, L.R.I., August 1990.
- [4] Neuts M. F.: Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models. An Algorithmic Approach, The Johns Hopkins University Press, Baltimore & London, 1981.
- [5] Onvural R. O.: Asynchronous Transfer Mode Networks; Performance Issues, Artech House, Boston London 1994.
- [6] Plateau B.: De l'évaluation du parallélisme et de sa synchronisation, Rozprawa doktorska, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Novembre 1984.
- [7] Plateau B.: On the Stochastic Structure of Parallelism and Synchronization Models for Distributed Algorithms. Proc. ACM Sigmetrics, 13(2):147-154, 1985.
- [8] Plateau B., Atif K.: A Method for Handling Complex Markov Models of Parallel Systems. Technical Report RR 826-I, I.M.A.G., Laboratoire de Génie Informatique, Grenoble. 1991.
- [9] Brigitte Plateau, Karim Atif. Stochastic Automata Network for Modelling Parallel Systems, Technical Report RR 854-I, I.M.A.G., Laboratoire de Génie Informatique, Grenoble 1991.
- [10] Plateau B, Fourneau J. M.: Methodology for Solving Markov Models of Parallel Systems. Journal of Parallel and Distributed Computing, (12):370-387, 1991.
- [11] Plateau B., Tripathi S.: Performance Analysis of Synchronization for Two Communicating Processes, Repport de Recherche 023, I.S.E.M., Université de Paris-Sud, Février 1985.
- [12] Quessette F.: De nouvelles méthodes de résolution pour l'analyse quantitative des systèmes parallèles et des protocoles, Rozprawa doktorska, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Novembre 1994.
- [13] Quessette F., Tomasik J.: Another approach to the stochastic automata network formalism. June 1997. PAPM97, Fifth International Workshop on Process Algebra and Performance Modelling.

- [14] Quesette F., Tomasik J.: Iterative block methods for solving stochastic automata network models of a computer network switch. June 1997. PAPM97, Fifth International Workshop on Process Algebra and Performance Modelling.
- [15] Radhakrishna Rao C.: Modele liniowe statystyki matematycznej. PWN, Warszawa 1982.
- [16] Tomasik J.: Metody numeryczne w modelowaniu wybranej klasy systemów komputerowych. Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice. Praca w przygotowaniu.
- [17] Tomasik J.: The Stochastic Automata Network Method for Solving Queueing Networks. Archiwum Informatyki Teoretycznej i Stosowanej, (Vol. 1-2), 1996.

Recenzent: Dr inż. Ewa Starzewska-Karwan

Wpłynęło do Redakcji 8 grudnia 1997 r.

### Abstract

The paper considers computing performance parameters for a network switch modeled as a service station with a limited queue and exponentially distributed service time with the parameter  $\mu$ . Customers arriving at the station have been generated by a group of ON/OFF sources. Such a source emits customers during its active period ON and remains silent during its idle period OFF. A generator matrix of the corresponding Markov chain for numerical calculations is set as a stochastic automata network descriptor. In the performed experiments, there have been analysed a single ON/OFF source with different interphase switching time, groups of identical ON/OFF sources, groups of ON/OFF sources preserving the same transition rate, groups of ON/OFF sources with transition rates changed according to the queued customer number (feedback). The results are presented as diagrams depicting probability distribution of mean customer number in the buffer and probability of losses. As the numerical method for solving the related system of linear equations, the block Gauß-Seidel method has been chosen. It has been modified for taking advantage of the specific form of the generator.