ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 30 Nr kol. 560

Mieczysław KUCHARZEWSKI

UWAGI DO POJĘCIA ORIENTACJI GEOMETRII KLEINA

Streszczenie. Geometrią Kleina nazywamy trójkę (M,G,f), gdzie M jest dowolnym zbiorem, G - dowolną grupą, a f - efektywnym działaniem G na M, (por. [1]). Pierwszą definicję orientacji takiej geometrii podał autor w pracy [2]. Definicja ta została poprawiona przez Z. Mosznera w [4]. Praca zawiera definicję orientacji geometrii Kleina równoważną z definicją Z. Mosznera. Jednocześnie podane są pewne własności tzw. s-reperów w geometrii Kleina.

Jednym z najważniejszych, a jednocześnie najtrudniejszych pojęć geometrycznych jest pojęcie orientacji. W pracy [2] została podana pewna definicja orientacji geometrii Kleina oparta na podstawowych pojęciach tej geometrii sprecyzowanych w pracy [1]. Definicja ta była referowana na Konferencji Geometrycznej w Węgierskiej Górce w roku 1975, a następnie opublikowane z licznymi uzupełnieniami w [3]. Mimo tych uzupełnień definicja ta ma pewne wady, na które zwrócił uwagę Z. Moszner w pracy [4]. W tej samej pracy podał Z. Moszner poprawioną wersję tej definicji. Tutaj podaję definicję orientacji równoważną z definicją Z. Mosznera. Chociaż różnice są niewielkie, to jednak podana definicja wskazuje dalsze własności pojęcia orientacji i jest wyrażona w wygodniejszych terminach geometrycznych. Aby rozważania uczynić bardziej zrozumiałe, przypomnimy na początek potrzebne pojęcia, a w szczególności ważne z wielu względów pojęcie reperu i jego podstawowe własności.

1. REPER I JEGO WŁASNOŚCI

Ponieważ pojęcie reperu związane jest z pojęciem podgrupy nieefektywności zbioru, przypomnimy najpierw definicję tej podgrupy.

Niech będzie dana geometria Kleina

$$(M, G, f), \tag{1.1}$$

gdzie:

M jest dowolnym zbiorem, G - grupą, a f - efektywnym działaniem G na M, (por. [1]).

Dla dowolnego podzbioru $P \subset M$ przez $H(P)$ będziemy oznaczali grupę złożoną z tych wszystkich elementów G, którym odpowiadające przekształcenia f nie zmieniają punktów zbioru P, tzn. $H(P) = \left\{g \in G : \bigwedge_{x \subset P} f(x,g) = x\right\}$ $H(P)$ nazywamy podgrupą nieefektywności zbioru P.

Definicja 1

Podzbiór $P \subset M$ nazywamy reperem, jeżeli jego grupa nieefektywności jest trywialna, tzn. składa się tylko z elementu neutralnego $e \in G$. Repery istnieją. Ze względu na to, że f jest działaniem efektywnym, cały zbiór M jest reperem. Specjalnie ważne w geometrii są repery, które zawierają możliwie mało punktów. W dalszym ciągu zajmiemy się reperami skończonymi, tzn. takimi, które zawierają skończoną liczbę punktów. Chociaż definicja reperu nie zależy od uporządkowania punktów, to jednak w przypadku reperów skończonych wygodniej jest reper traktować jako ciąg. Przyjmiemy więc następującą definicję reperu skończonego.

Definicja 2

Reperem rzędu s w geometrii (1.1) nazywamy ciąg skończony s różnych punktów

$$(p_1, p_2, \ldots, p_s), \ p_i \neq p_j, \ i \neq j, \ i,j = 1,2,\ldots,s, \tag{1.2}$$

taki, że $H(p_1, p_2, \ldots, p_s) = \{e\}$.

Powstaje pytanie, czy w każdej geometrii istnieją repery skończone?

Niech $Q \subset M$. Oznaczmy przez $G(Q,M)$ podgrupę stabilności podzbioru Q w geometrii (1.1), tzn. zbiór tych elementów grupy G, które przekształcają Q na siebie.

Zachodzi ważny związek między podgrupą nieefektywności zbioru $P \subset M$ i podgrupami stabilności poszczególnych punktów zbioru P. Ma on postać

$$H(P) = \bigcap_{x \in P} G(x,M). \tag{1.3}$$

Z (1.3) wynika, że przy zwiększaniu ilości punktów zbioru jego grupa nieefektywności nie może się powiększyć. A więc, jeżeli do reperu dodamy jakiś punkt, to otrzymany zbiór pozostanie reperem. Powstaje problem znalezienia reperu o minimalnej ilości punktów?

Dla ilustracji powyższych definicji i własności podamy teraz kilka prostych przykładów.

1. Niech $GA(n,R) = \left\{(A,a) : A \in GL(n,R), \ a \in R^n\right\}$ oznacza n-wymiarową grupę afiniczną. Działanie w $GA(n,R)$ jest określone w sposób następujący: $(B,b) \cdot (A,a) = (BA, Ba + b)$. Trójkę $(R^2, GA(2,R), f)$, gdzie $f : R^2 \times GA(2,R) \to R^2$ jest określone wzorem: $f(x,A,a) = A.x+a$, nazywamy 2-wymiarową geometrię afiniczną lub płaszczyznę afiniczną. Reperami rzędu trzeciego są trójki punktów (p_1, p_2, p_3) nie leżące na jednej prostej. Są to repery minimalne.

2. Niech $GO(n,R) = \{(A,a) : A \in O(n,R),\ a \in R^n\}$ oznacza n-wymiarową grupę euklidesową, złożoną z par (A,a), gdzie A jest n-wymiarową macierzą ortogonalną. Działanie w $GO(n,R)$ jest określone analogicznie jak w $GA(n,R)$. Trójkę $(R^2, GO(2,R), f)$, nazywamy 2-wymiarową geometrią euklidesową. Jest ona podgeometrią 2-wymiarowej geometrii afinicznej. Również w tej geometrii reperami trzeciego rzędu są trójki punktów nie leżących na jednej prostej. Są one reperami minimalnymi.

3. Niech G będzie dowolną grupą, a $H \subset G$ jej podgrupą. Oznaczmy przez $L : G \times H \to G$ lewą translację grupy H na G. Łatwo sprawdzić, że trójka (G, H, L) jest geometrią. W tej geometrii każdy punkt jest reperem.

4. Jeżeli jako G i H przyjmiemy grupę addytywną liczb rzeczywistych R, to otrzymujemy geometrię (R, R, f), gdzie $\bigwedge_{x \in R} \bigwedge_{g \in R} f(x,g) := g+x$, która stanowi szczególny przypadek geometrii podanej w przykładzie 3.

2. ORIENTACJA RZĘDU S

Niech będzie dana geometria (1.1). Załóżmy, że istnieją w niej repery rzędu s. Utwórzmy w tej geometrii obiekt iloczynowy

$$(M^s,\ G,\ f^s), \tag{2.1}$$

gdzie $M^s = M \times M \times \ldots \times M$, a dla $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ i $g \in G$ określamy $f^s(x,g) = (f(x_1,G), \ldots, f(x_s,g))_s$ (por. [1]). Oznaczmy przez M_s zbiór reperów rzędu s geometrii (1.1). Na podstawie założenia zbiór ten jest niepusty. Ma on następującą ważną własność.

Lemat 1

Podzbiór M_s jest niezmienniczym podzbiorem obiektu (2.1).

Dowód

Niech $\omega = (p_1, p_2, \ldots, p_s) \in M_s$ oraz $\omega(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_s) = f^s(\omega, g)$. Aby pokazać, że dla dowolnego $g \in G$ jest $H(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_s) = \{e\}$ wybierzmy dowolne $h \in H(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_s)$. Zachodzą wtedy związki $f(\bar{p}_i, h) = \bar{p}_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$ z których wynika $f(f(fp_i, g), h), g^{-1}) = p_i \Rightarrow f(p_i, g^{-1}hg) = p_i \Rightarrow g^{-1}hg = e$. Ostatnia równość oznacza, że $H(p_1, p_2, \ldots, p_s) = \{e\}$, a więc $\bar{\omega} \subset M_s$.

W oparciu o lemat 1 możemy utworzyć obiekt częściowy

$$(M_s,\ G,\ f_s), \quad f_s := f^s|_{M_s \times G}, \tag{2.2}$$

obiektu (2.1), (por. [1]). Obiekt ten ma następującą własność.

Lemat 2

Dla każdych dwóch reperów rzędu s istnieje co najwyżej jeden element z g, który przekształca jeden z nich w drugi.

Dowód

Niech $\omega_1 \subset M_s$ i $\omega_2 \subset M_s$. Przypuśćmy, że istnieją dwa elementy g_1 i g_2 grupy G takie, że $f_s(\omega_1, g_1) = \omega_2$, $f_s(\omega_1, g_2) = \omega_2$. Wtedy $f_s(f_s(\omega_1, g_2), g_1^{-1}) = \omega_1 \Rightarrow f_s(\omega_1, g_1^{-1}, g_2) = \omega_1 \Rightarrow g_1^{-1} g_2 = e$, a więc elementy te muszę być identyczne.

Może się zdarzyć, że nie ma elementu grupy G, który jakiś reper rzędu s przekształca w inny, tzn. G nie musi działać tranzytywnie na zbiorze reperów M_s. W 2-wymiarowej geometrii afinicznej grupa działa tranzytywnie na zbiorze reperów rzędu 3. W 2-wymiarowej geometrii euklidesowej grupa nie działa tranzytywnie na zbiorze reperów rzędu trzeciego. Natomiast działa tranzytywnie na zbiorze reperów ortonormalnych, tzn. takich, że wektory p_1p_2 i p_1p_3 są ortonormalne. W przykładzie 3 grupa nie działa tranzystywnie na zbiorze reperów pierwszego rzędu, gdy $H \neq G$. W przykładzie 4 grupa działa tranzytywnie na zbiorze reperów pierwszego rzędu i nie działa tranzystywnie na zbiorze reperów drugiego rzędu.

Oznaczmy przez $\mathfrak{M}_s$ dowolny ustalony podzbiór tranzytywny obiektu (2.2) Możemy wtedy utworzyć obiekt cześciowy

$$(\mathfrak{M}_s, G, F_s) \tag{2.3}$$

obiektu (2.2) (por. [1]), $F_s : = f_s|\mathfrak{M}_s \times G$. Przy pomocy tego obiektu definiujemy orientowalność geometrii w sposób następujący.

Definicja 3

Geometrię (1.1) nazywamy s-orientowalną, jeżeli istnieje niezmienniczy rozkład obiektu (2.3) na dokładnie dwa niepuste zbiory rozłączne, tzn. jeżeli istnieją dwa podzbiory $\mathfrak{M}_s^+$ i $\mathfrak{M}_s^-$ zbioru $\mathfrak{M}_s$ spełniające następujące warunki:

$$\mathfrak{M}_s^+ \neq \emptyset \wedge \mathfrak{M}_s^- \neq \emptyset \wedge \mathfrak{M}_s^+ \cap \mathfrak{M}_s^- = \emptyset \tag{2.4}$$

$$\mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}_s^+ \cup \mathfrak{M}_s^-. \tag{2.5}$$

$$g \in G, \omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{M}_s^{\varepsilon}, \varepsilon = \pm 1 \Rightarrow \bigvee_{\eta = \pm 1} \left[F_s(\omega_1, g), F_s(\omega_2, g) \in \mathfrak{M}_s^{\eta}\right]. \tag{2.6}$$

Geometria 2-wymiarowa afiniczna jest orientowalna trzeciego rzędu. Zbiór reperów trzeciego rzędu jest tranzytywny. Rozkład niezmienniczy można określić przyjmując $\mathfrak{M}_3^+ = \{(p_1, p_2, p_3) : \mathrm{Det}(p_2 - p_1, p_3 - p_1) > 0\}$, $\mathfrak{M}_3^- = \{(p_1, p_2, p_3 : \mathrm{Det}(p_2 - p_1, p_3 - p_1) < 0\}$.

Geometria 2-wymiarowa euklidesowa jest również 3-orientowalną. Jako włókno tranzytywne zbioru reperów trzeciego rzędu można przyjęć zbiór trójek punktów takich, że wektory $\overrightarrow{p_1p_2}$ i $\overline{p_1p_3}$ są ortonormalne. Rozkład niezmienniczy jest określony jak poprzednio.

Zbiór reperów pierwszego rzędu w geometrii z przykładu 3 nie jest w ogólności tranzytywny. Włóknami tranzytywnymi tego zbioru są warstwy względem podgrupy H. Włókna te nie muszą dopuszczać rozkładów niezmienniczych dwuelementowych. Geometria z przykładu 4 nie jest orientowalna pierwszego rzędu. Geometria ta nie jest również orientowalna drugiego rzędu, ponieważ włókno tranzytywne zbioru 2-reperów nie posiada dwuelementowego rozkładu niezmienniczego.

Jeżeli geometria (1.1) jest s-orientowalna, to każdy z podzbiorów $\mathfrak{M}_s^+$ i $\mathfrak{M}_s^-$ nazywamy s-orientację geometrii. Geometrię z wybraną orientację nazywamy zorientowaną. Geometria zorientowana rzędu s jest to para złożona z geometrii i wybranej orientacji, tzn. para $((M, G, f), \mathfrak{M}_s^{\varepsilon})$.

3. PEWNE WŁASNOŚCI ORIENTACJI

Wyżej określona orientacja nie zależy od wyboru włókna tranzytywnego $\mathfrak{M}_s$ obiektu (2.2). Zachodzi bowiem

<u>Twierdzenie 1</u>

Jeżeli geometria (1.1) jest s-orientowalną względem pewnego włókna tranzytywnego $\mathfrak{M}_s$ obiektu (2.2), to jest również s-orientowalną względem każdego innego włókna tranzytywnego tego obiektu.

Dowód tego twierdzenia przeprowadzimy w oparciu o pewien związek między orientowalnością geometrii i orientowalnością grupy, która wyznacza tę geometrię. Najpierw przypomnimy definicję orientowalności grupy, (por. [5] s. 323).

<u>Definicja 4</u>

Jeżeli grupa G zawiera podgrupę H o indeksie 2, to mówimy, że G jest orientowalną względem podgrupy H lub krótko orientowalną.

Wspomniany wyżej związek wyrażony jest w dwóch lematach.

<u>Lemat 3</u>

Jeżeli geometria (1.1) jest s-orientowalną, to grupa G jest orientowalną.

<u>Dowód</u>

Oznaczmy przez ω_o dowolny element z $\mathfrak{M}_s^+$. Podzbiór $G_o = \{g \in G : F_s(\omega_o, g) \in \mathfrak{M}_s^+\}$ grupy G jest jej podgrupą. Istotnie, niech g_1 i g_2 należą do G_o. Wtedy $F_s(\omega_o, g_1)$ i $F_s(\omega_o, g_2) \in \mathfrak{M}_s^+$. Ponieważ rozkład jest niezmienniczy istnieje $\eta = \pm 1$ takie, że $F_s(F_s(\omega_o, g_1), g_1^{-1})$ $F_s(F_s\omega_o, g_2) g_1^{-1}$) należą do $\mathfrak{M}_s^{\eta}$. Wynika stąd, że $\omega_o \in \mathfrak{M}_s^{\eta} \wedge F_s(\omega_o, g_1^{-1} g_2) \in \mathfrak{M}_s^{\eta} \Rightarrow \eta = +1 \wedge F_s(\omega_o, g_1^{-1} g_2) \in \mathfrak{M}_s^+ \Rightarrow$ $\Rightarrow g_1^{-1} g_2 \subset G_o$. A więc G_o jest podgrupą. Udowodnimy teraz, że indeks G_o jest równy 2. Niech g_1 i g_2 nie należą do G_o. Mamy wtedy

$$F_s(\omega_o, g_1), F_s(\omega_o, g_2) \subset \mathfrak{M}_s^- \Rightarrow V_{\eta} = \pm 1 \quad \left[F_s(F_s(\omega_o, g_1), g_1^{-1}\right)$$

i

$$F_s(F_s(\omega_o,g_2),g_1)\in\mathfrak{M}_s^{\eta}\Big]\Rightarrow\eta=+1\wedge F_s(\omega_o,g_1g_2)\in\mathfrak{M}_s^{+}\Rightarrow g_1\,g_2\in G_o,$$

tzn. g_1 i g_2 są równoważne względem G_o, a więc wyznaczają tę samą klasę abstrakcji i indeks G_o równa się 2.

Zachodzi również lemat w pewnym sensie odwrotny.

Lemat 4

Jeżeli grupa G jest orientowalną i istnieją repery rzędu s w geometrii (1.1), to każde włókno tranzytywne obiektu (2.2) posiada niezmienniczy rozkład złożony z dokładnie dwóch niepustych zbiorów rozłącznych, a więc geometria (1.1) jest s-orientowalną.

Dowód

Oznaczmy przez G_o podgrupę grupy G o indeksie 2. Niech $\mathfrak{M}_s$ będzie włóknem tranzystywnym obiektu (2.2). Określimy rozkład $\mathfrak{M}_s$ na dwa zbiory niepuste i rozłączne w sposób następujący: Wybieramy dowolny punkt ω_o z $\mathfrak{M}_s$. $\mathfrak{M}_s^+=\{\omega\in\mathfrak{M}_s:\ \bigvee g\subset G_o\ [\omega=F_s(\omega_o,g)]\}$, $\mathfrak{M}_s^-=\mathfrak{M}_s-\mathfrak{M}_s^+$. Zbiór $\mathfrak{M}_s^+$ jest oczywiście niepusty. Przypuśćmy, że $\mathfrak{M}_s^-=\emptyset$. Niech $g_1\in G-G_o$. Oznaczmy przez $\omega_1=F_s(\omega_o,g_1)$. Ponieważ $\mathfrak{M}_s^-$ jest pusty, ω_1 musi należeć do $\mathfrak{M}_s^+$. Istnieje więc $g_2\in G_p$ takie, że $\omega_1=F_s(\omega_o,g_2)$. Ale to jest sprzeczne z lematem 2, a więc zbiór $\mathfrak{M}_s^-$ musi być niepusty. Oczywistym jest, że zbiory $\mathfrak{M}_s^+$ i $\mathfrak{M}_s^-$ są rozłączne i w sumie dają cały zbiór $\mathfrak{M}_s$. Aby pokazać niezmienniczość rozkładu załóżmy, że $\omega_1,\omega_2\in\mathfrak{M}_s^+$ i $g\in G_o$. Mogą zajść dwie możliwości $g\in G_o$ lub $g\in G-G_o$. W przypadku pierwszym $F_s(\omega_1,g)$ i $F_s(\omega_2,g)$ należą do $\mathfrak{M}_s^+$. w przypadku drugim $F_s(\omega_1,g)$ i $F_s(\omega_2,g)$ należą do $\mathfrak{M}_s^-$. A więc w przypadku pierwszym $\eta=1$, w drugim $\eta=-1$. Podobnie sprawdzamy warunek (2.6), gdy ω_1 i $\omega_2\in\mathfrak{M}_s^-$. Podany rozkład spełnia więc wszystkie żądane warunki (2.4) - (2.6) i lemat jest udowodniony.

W oparciu o powyższe lematy dowód twierdzenia 1 jest natychmiastowy.

Jeżeli grupa G jest orientowalną, to geometria (1.1) tylko wtedy może nie być orientowalną, gdy nie ma reperów rzędu skończonego.

4. DEFINICJA ORIENTOWALNOŚCI Z. MOSZNERA

W pracy [4] Z. Moszner zaproponował pewne uzupełnienie definicji wadliwej z pracy [2] w sposób następujący.

Definicja 5

Geometrię (1.1) nazywamy s-orientowalną, jeżeli istnieje niezmienniczy rozkład reperów rzędu s, tzn. obiektu (2.2) na dokładnie dwa niepuste zbiory rozłączne M_s^+ i M_s^-, spełniające warunek

$$\bigvee(p_1,\ldots,p_s)\in M_s^+\ \bigvee g\in G\quad \text{takie, że}\quad [(f(p_1,g),\ldots,f(p_s,g))\in M_s^-]\qquad(4.1)$$

Można pokazać, że definicje 3 i 5 są równoważne, tzn. geometria jest s-orientowalną w sensie definicji 3 wtedy i tylko wtedy, gdy jest s-orientowalną w sensie definicji 5. Istotnie, jeżeli (1.1) jest s-orientowalną w sensie definicji 3, to istnieje niezmienniczy rozkład włókna tranzytywnego $\mathfrak{M}_s$ zbioru reperów M_s na dokładnie dwa niepuste zbiory rozłączne $\mathfrak{M}_s^+$ i $\mathfrak{M}_s^-$. Na podstawie lematu 3 grupa G jest orientowalną, a na podstawie lematu 4 każde włókno tranzytywne $\mathfrak{M}_{s\varkappa}, \varkappa \in I$ obiektu (2.2) posiada niezmienniczy rozkład na dokładnie dwa zbiory niepuste rozłączne $\mathfrak{M}_{s\varkappa}^+$, $\mathfrak{M}_{s\varkappa}^-$. Wtedy sumy $M_s^+ = \bigcup_{\varkappa \in I} \mathfrak{M}_{s\varkappa}^+$ i $M_s^- = \bigcup_{\varkappa \in I} \mathfrak{M}_{s\varkappa}^-$ rozciągnięte na wszystkie włókna tranzytywne obiektu (2.2) wyznaczają niezmienniczy rozkład zbioru reperów M_s, który spełnia warunek (4.1). Odwrotnie, jeżeli geometria (1.1) jest s-orientowalną w myśl definicji 5, to istnieje niezmienniczy rozkład zbioru reperów M_s na dwa niepuste zbiory rozłączne M_s^+ i M_s^-. Oznaczając przez $\mathfrak{M}_s$ włókno tranzytywne obiektu (2.2), do którego należy punkt $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ występujący w warunku (4.1), określamy niezmienniczy rozkład tego włókna w sposób następujący: $\mathfrak{M}_s^+ = M_s^+ \cap \mathfrak{M}_s$, $\mathfrak{M}_s^- = M_s^- \cap \mathfrak{M}_s$. Zbiory są niepuste i rozłączne, a więc geometria (1.1) jest s-orientowalną w myśl definicji 3.

Chociaż definicje 3 i 5 są równoważne, wydaje mi się, że definicja 3 jest wygodniejszą z dwu powodów. W definicji 3 orientacje są wyznaczone prawie jednoznacznie, tzn. dowolność jest tylko w wyborze włókna tranzytywnego. Orientacje w definicji 5, jak zauważył G. Łubczonok, mogą być wybierane w sposób bardzo dowolny. Trudno powiedzieć, czy takie orientacje mają jakieś znaczenie geometryczne. Z drugiej strony w definicji 3 występują pojęcia związane z grupami i obiektami geometrycznymi. Warunek (4.1) w definicji 5 wydaje mi się sztuczny. Natomiast znaczenie definicji 5 polega na tym, że pokazuje ona pewne ważne własności niewątpliwie trudnego pojęcia jakim jest orientowalność geometrii

LITERATURA

[1] Jasińska E.J., Kucharzewski M.: Grundlegende Begriffe der Kleinschen Geometrie, Demonstratio Math. 7(3) (1974), 381-402.

[2] Kucharzewski M.: Über die Orientierung der Kleinschen Geometrien, Ann. Polon. Math. 29(1975), 363-371.

[3] Kucharzewski M.: O pojęciu orientacji geometrii Kleina, Zeszyty Naukowe AGH Kraków (w druku).

[4] Moszner Z.: L'orientation dans la géomètrie de Klein, Tensor, (w druku).

[5] Moszner Z. et Tabor J.: Sur la notion du biscalaire, Ann. Polon.Math. 19(1967), 323-330.

ЗАМЕЧАНИЯ ДЛЯ ПОНЯТИЯ ОРИЕНТИРОВКИ ГЕОМЕТРИИ КЛАЙНА

Р е з ю м е

Геометрией Клайна называем три (M,G,f) где M это любое множество, G – любая группа, а f – эффективное действие G на M [1]. Первичную дефиницию ориентации такой геометрии дал автор в работе [2]. Дефиниция эта была исправлена З. Мошнером в [4]. В работе представлена дефиниция геометрии Клайна равновесит дефиницию З. Мошнера. Одновременно представлено некоторые свойства тн. с-реперов в геометрии Клайна.

SOME REMARKS ON THE NOTION OF KLEIN'S GEOMETRY ORIENTATION

S u m m a r y

Klein's geometry consists of three expressions (M,G,f), where M is an arbitrary set, G – an arbitrary group and f – an effective influence of G on M, (of I). The first orientation definition of such a geometry was given by the author in the paper [2]. This definition was corrected by Z. Moszner in [4]. The paper contains the orientation definition equivalent to Z. Moszner's definition. Some properties of so-called "s-repers" in Klein's geometry are given simultaneously.