ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 30 Nr kol. 560

Erwin Kasparek
Mieczysław KUCHARZEWSKI

OBIEKTY GEOMETRII KLEINA OPARTEJ NA PEWNEJ PODGRUPIE MACIERZOWEJ

Streszczenie. Macierzą cykliczną nazywamy macierz kwadratową, której każdy wiersz powstaje przez przesunięcie poprzedniego o jeden element w prawo. Przez $CA(n,R)$ oznaczmy zbiór par (A,a) macierzy, gdzie A jest macierzą cykliczną, nieosobliwą, stopnia n o elementach rzeczywistych, a macierz $a \in R^n$. Zbiór ten z działaniem $(B,b) \cdot (A,a) = (B \cdot A,\ Ba + b)$ jest grupą. W myśl definicji podanej w [2] trójka $(R^n, CA(n,R), f)$, gdzie działanie $f\colon R^n \times CA(n,R) \to R^n$ ma postać $f(x, A,a) = Ax + a$, jest pewną geometrią Kleina. W pracy została podana pewna ogólna metoda wyznaczania obiektów zadanej geometrii Kleina oraz w oparciu o nię zostały wyznaczone pewne obiekty wyżej określonej geometrii.

WSTĘP

W pracach [1], [2] została podana definicja geometrii Kleina oraz zostały określone obiekty tej geometrii. W tej pracy podajemy pewną metodę wyznaczania obiektów danej geometrii i w oparciu o nię wyznaczymy obiekty pewnej geometrii Kleina. Geometrię tę będziemy nazywać geometrię cykliczną. Punkt 1 zawiera definicję geometrii Kleina oraz metodę konstrukcji obiektów. W punkcie 2 określona jest grupa cykliczna macierzy oraz geometria cykliczna Kleina. Pewne obiekty dwuwymiarowej i trójwymiarowej geometrii cyklicznej wyznaczone są w punkcie 3.

1. Geometrię Kleina [1] nazywamy trójkę

$$(M,G,f), \tag{1.1}$$

gdzie: M jest dowolnym zbiorem, G jest dowolną grupą a f oznacza efektywne działanie grupy G na zbiorze M, tzn. f jest odwzorowaniem typu $f\colon M\times G \to M$ które spełnia równanie fundamentalne (1.4), [1], warunek identyczności (1.5) [1] oraz warunek (1.6) [1].

Obiektem abstrakcyjnym geometrii (1.1) nazywamy również trójkę

$$(\mathfrak{M},G,F), \tag{1.2}$$

gdzie: $\mathfrak{M}$ jest zbiorem w ogólności różnym od M, G jest grupą, która występuje w (1.1) a F jest działaniem G na $\mathfrak{M}$, które nie musi być efektywne.

Niech $H \subset G$ będzie dowolną podgrupą grupy G. Możemy wtedy utworzyć zbiór ilorazowy $G/H := \{xH,\ x \in G\}$, którego elementami są warstwy lewostronne grupy G względem podgrupy H. Warstwy te będziemy oznaczać przez $\langle x \rangle := xH$. Na zbiorze G/H możemy określić działanie f_o grupy G w sposób następujący

$$\bigwedge_{\langle x\rangle \in G/H},\quad \bigwedge_{g \in G},\quad f_o(\langle x\rangle, g) := \langle gx\rangle,$$

tzn. działanie indukowane przez lewe translacje.

Trójka

$$(G/H, G, f_o) \tag{1.3}$$

jest obiektem tranzytywnym geometrii (1.1). Widzimy więc, że każda podgrupa H grupy G wyznacza obiekt tranzytywny geometrii (1.1). Zachodzi również związek odwrotny, tzn. każdy obiekt tranzytywny wyznacza pewną rodzinę podgrup grupy G, które są wzajemnie sprzężone. Niech obiekt (1.2) będzie tranzytywny. Dla $\omega_o \in \mathfrak{M}$ oznaczmy przez $G(\omega_o, \mathfrak{M})$ podgrupę stabilności tego elementu. Jest ona określona w sposób następujący

$$G(\omega_o, \mathfrak{M}) := \{g \subset G,\ F(\omega_o, g) = \omega_o\}. \tag{1.4}$$

Dla różnych elementów ω_o, ω_1 podgrupy stabilności tych elementów są sprzężone oraz każda podgrupa sprzężona z (1.4) jest podgrupą stabilności pewnego elementu obiektu (1.2). Udowodnimy tylko drugą część tego twierdzenia. Niech $g_o \in G$ a H oznacza podgrupę sprzężoną z (1.4), tzn. $H := g_o\, G(\omega_o, \mathfrak{M}) g_o^{-1}$. Weźmy teraz $\omega_1 := F(\omega_o, g_o)$. Pokażemy, że $H = G(\omega_1, \mathfrak{M})$. Istotnie, weźmy dowolny element $g_o h g_o^{-1} \subset H$, gdzie $h \in G(\omega_o, \mathfrak{M})$, wtedy $F(\omega_1, hg_o^{-1}) = F(F(\omega_1, g_o^{-1}), h) = F(\omega_o, h) = \omega_o \Rightarrow F(\omega_1, g_o h g_o^{-1}) = F(F(\omega_1, hg_o^{-1}), g_o) = \omega_1 \Rightarrow H \subset G(\omega_1, \mathfrak{M})$.

Niech teraz $\bar{g} \in G(\omega_1, \mathfrak{M})$, tzn. $F(\omega_1, \bar{g}) = \omega_1 \Rightarrow F(F(\omega_o, g_o), \bar{g}) = F(\omega_o, \bar{g} g_o) = \omega_1 \Rightarrow \omega_o = F(\omega_1, g_o^{-1}\bar{g}^{-1}) = F(F(\omega_o, g_o), g_o^{-1}\bar{g}^{-1}) = F(\omega_o, g_o^{-1}\bar{g}^{-1} g_o) \Rightarrow g_o^{-1}\bar{g}^{-1} g_o \subset G(\omega_o, \mathfrak{M}) \Rightarrow \bar{g} \in g_o G(\omega_o, \mathfrak{M}) g_o^{-1}$, co oznacza, że $G(\omega_1, \mathfrak{M}) \subset H$.

Pokażemy teraz, że obiekt (1.2) jest równoważny z obiektem

$$(G/G(\omega_o, \mathfrak{M}), G, F_o), \tag{1.5}$$

gdzie F_o jest określone następująco

$$\bigwedge_{\langle a\rangle \in G/G(\omega_o, \mathfrak{M})},\quad \bigwedge_{g \subset G},\quad F_o(\langle a\rangle, g) = \langle ga\rangle.$$

Dla dowodu równoważności pokażemy, że istnieje bijekcja $h: \mathfrak{M} \to G/G(\omega_o, \mathfrak{M})$ taka, że

$$\bigwedge \omega \subset \mathcal{M}, \ \bigwedge g \subset G, \ F_0(h(\omega), g) = h(F(\omega, g)) .$$

Niech $\omega \in \mathcal{M}$. Z tranzystywności (1.2) wynika, że istnieje $\bar{g} \in G$ takie, że $\omega = F(\omega_0, \bar{g})$. Odwzorowanie h określamy wzorem $h(\omega) := \bar{g}\, G(\omega_0, \mathcal{M}) = \langle\bar{g}\rangle$. Odwzorowanie to nie zależy od wyboru elementu $\bar{g}$. Istotnie, jeżeli g jest innym elementem grupy G spełniającym związek $\omega = F(\omega_0, \hat{g})$, to $F(F(\omega_0, \hat{g}), \bar{g}^{-1}) = \omega_0 \Rightarrow F(\omega_0; \bar{g}^{-1}\hat{g}) = \omega_0 \Rightarrow \bar{g}^{-1}\hat{g} \in G(\omega_0, \mathcal{M}) \Rightarrow \hat{g} \in \bar{g}G(\omega_0, \mathcal{M}) \Rightarrow \langle\hat{g}\rangle = \langle\bar{g}\rangle$. Pokażemy że odwzorowanie h jest różnowartościowe. Niech $h(\omega_1) = h(\omega_2) \Rightarrow \langle\bar{g}_1\rangle = \langle\bar{g}_2\rangle \Rightarrow \bar{g}_2 = \bar{g}_1 h$, $h \in G(\omega_0, \mathcal{M})$ lecz $\omega_2 = F(\omega_0, \bar{g}_2) = F(\omega_0, \bar{g}_1 h) = F(F(\omega_0, h), \bar{g}_1) = F(\omega_0, \bar{g}_1) = \omega_1$. Z określenia odwzorowania h łatwo widać, że jest odwzorowaniem na cały zbiór $G/G(\omega_0, \mathcal{M})$. Ponadto $F_0(h(\omega), g) = F_0(\langle\bar{g}\rangle, g) = \langle g\bar{g}\rangle$ oraz $h(F(\omega, g) = h(F(F(\omega_0, \bar{g}), g)) = h(F(\omega_0, g\bar{g})) = \langle g\bar{g}\rangle$ stąd otrzymujemy związek

$$F_0(h(\omega), g) = h(F(\omega, g)).$$

Z powyższych rozważań wynika

Lemat 1.1

Każda podgrupa H grupy G wyznacza obiekt tranzytywny geometrii (1.1). Odwrotnie, każdy obiekt tranzytywny (1.2) geometrii (1.1) wyznacza pewną klasę wszystkich podgrup wzajemnie sprzężonych, mianowicie klasę podgrup stabilności elementów zbioru $\mathcal{M}$. Ponadto, jeśli ω_0 oznacza dowolny element zbioru $\mathcal{M}$, wtedy obiekt (1.2) jest równoważny z obiektem (1.5). Niech $H_1 \subset G$ i $H_2 \subset G$ oznaczają dwie różne podgrupy grupy G. Na podstawie lematu 1.1 odpowiadają im obiekty tranzytywne

$$(G/H, G, f_1), \ f_1(\langle x\rangle, g) = \langle gx\rangle \tag{1.6}$$

oraz

$$(G/H_2, G, f), \ f_2([x], g) = gx , \tag{1.7}$$

gdzie $[x]$ oznacza warstwę lewostronną elementu x względem podgrupy H_2, tzn. $[x] := xH_2$.

Udowodnimy obecnie

Lemat 1.2

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby obiekty (1.6) i (1.7) były równoważne jest aby podgrupy H_1 i H_2 były sprzężone.

Dowód (wystarczalność)

Niech H_1 i H_2 będą sprzężone. Wtedy istnieje element $g_0 \in G$ taki, że $H_2 = g_0^{-1} H_1 g_0$. Określmy odwzorowanie $h\colon G/H_1 \to G/H_2$ następująco $h(\langle x\rangle) = [xg_0]$. Łatwo widać, że h jest odwzorowaniem na cały zbiór G/H_2. Pokażemy, że jest odwzorowaniem różnowartościowym.

Istotnie, niech $h(\langle x_1\rangle) = h(\langle x_2\rangle) \Rightarrow [x_1 g_0] = [x_2 g_0] \Rightarrow x_1 g_0 H_2 = x_2 g_0 H_2 \Rightarrow x_1 g_0 g_0^{-1} H_1 g_0 = x_2 g_0 g_0^{-1} H_1 g_0 \Rightarrow x_1 H_1 = x_2 H_1 \Rightarrow \langle x_1\rangle = \langle x_2\rangle$.

Ponadto zachodzi związek

$$h(f_1(\langle x\rangle ,g)) = f_2([xg_o],g).$$

Konieczność. Załóżmy, że obiekty (1.6) i (1.7) są równoważne, tzn. istnieje bijekcja $h\colon G/H_1 \to G/H_2$ taka, że spełniony jest warunek

$$h(f_1(\langle x\rangle ,g)) = f_2(h(\langle x\rangle),g). \tag{1.8}$$

Niech $h(\langle x\rangle) = [y]$, wtedy powyższy związek przyjmie postać

$$h(\langle gx\rangle) = [gy]. \tag{1.9}$$

Niech ponadto $h(\langle e\rangle) = [g_o]$, gdzie e oznacza element neutralny grupy G. Podstawiając w (1.9) za g element x^{-1}, otrzymamy $h(\langle e\rangle) = [x^{-1}y] \Rightarrow [g_o] = [x^{-1}y] \Rightarrow g_o^{-1}x^{-1}y \in H_2 \Rightarrow (xg_o)^{-1}y \in H_2 \Rightarrow [xg_o] = [y]$. Odwzorowanie h ma zatem postać $h(\langle x\rangle) = [xg_o]$. Niech $x \in H_1$ wtedy $h(\langle x\rangle) = [g_o] = [xg_o] \Rightarrow g_o^{-1}H_1g_o \subset H_2$. Odwzorowanie h jest bijekcją, zatem istnieje odwzorowanie odwrotne h^{-1}, które ma postać $h^{-1}([y]) = \langle xg_o^{-1}\rangle$.
Związek (1.9) przyjmuje teraz postać

$$h^{-1}([gy]) = \langle gyg_o^{-1}\rangle . \tag{1.10}$$

Niech $y \in H_2$, wtedy $h^{-1}([gy]) = h^{-1}([g]) = \langle gg_o^{-1}\rangle$. Podstawiając tę równość do (1.10) otrzymujemy, że $\langle gg_o^{-1}\rangle = \langle gyg_o^{-1}\rangle \Rightarrow g_og^{-1}gyg_o^{-1} \in H_1 \Rightarrow g_oyg_o^{-1} \in H_1$, tzn. $y \in g_o^{-1}H_1g_o \Rightarrow H_2 \in g_o^{-1}H_1g_o$. Udowodniliśmy, więc, że $H_2 = g_o^{-1}H_1g_o$, czyli podgrupy te są wzajemnie sprzężone.

Z tego lematu wynikają następujące wnioski

<u>Wniosek 1</u>

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to aby obiekt (1.7) był komitantą obiektu (1.6) jest, aby istniał taki element $g_o \in G$, że spełniona jest inkluzja $g_o^{-1}H_1g_o \subset H_2$.

<u>Wniosek 2</u>

Jeśli H_1, H_2 oznaczają dwie różne podgrupy grupy abelowej G, wtedy obiekty (1.6) i (1.7) są nierównoważne. Dowód tego faktu wynika stąd, że w grupie abelowej żadne dwie różne podgrupy nie mogą być ze sobą sprzężone.

2. Określimy teraz pojęcie macierzy cyklicznej i grupy macierzy cyklicznych oraz określimy n wymiarową geometrię Kleina pewnej grupy macierzowej.

<u>Definicja 2.1</u>

Macierz $A(a_{ij})(i,j = 1,2,\dots,n)$, $a_{ij} \in R$ nazywamy macierzą cykliczną, jeżeli ma ona postać

$$A = \alpha_0 E + \alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_{n-1} E_1^{n-1},$$

gdzie

$$E_1 = P_{n-1,n}\, P_{n-2,n-1} \dots P_{23} P_{12}, \qquad (2.1)$$

natomiast P_{ij} $(i \neq j)$ oznacza macierz transpozycji, tzn. macierz otrzymaną przez przestawienie i-tego oraz j-tego wiersza w macierzy jednostkowej, ([4]). Oznaczmy przez $C(n,R)$ zbiór wszystkich macierzy cyklicznych nieosobliwych.

Uwaga

Każdy wiersz macierzy cyklicznej powstaje z poprzedniego przez przesunięcie w prawo o jeden element.

Lemat 2.1

Zbiór macierzy cyklicznych nieosobliwych z mnożeniem tworzą grupę abelową [4].

Oznaczmy przez $CA(n,R)$ zbiór par (A,a), gdzie $A \in C(n,R)$, $a \in R^n$. W zbiorze tym wprowadzamy działanie określone następująco

$$(B,b)(A,a) = (BA, Ba + b)$$

Lemat 2.2

Zbiór $CA(n,R)$ z powyższym działaniem tworzy grupę.

Definicja 2.2

Trójkę $(R^n, CA(n,R), f)$, $f: R^n \times CA(n,R) \to R^n$, gdzie $f(x,(A,a)) = Ax + a$ nazywamy n-wymiarową geometrią cykliczną Kleina. Definicja ta jest poprawna bo f działa efektywnie na R^n, tzn.

$$\bigwedge_{x \in R^n} Ax + a = x \Rightarrow A = E,\ a = 0.$$

Ponadto geometria ta jest tranzytywna. W myśl lematu 1.1 oraz lematu 1.2, dla wyznaczenia nierównoważnych obiektów tej geometrii, wystarczy wyznaczyć podgrupy $Ca(n,R)$, które nie są sprzężone.

Grupa $CA(n,R)$ ma dwie podgrupy. Podgrupę $\{(A,0), A \in C(n,R)\}$, która jest izomorficzna z grupą $C(n,R)$ i dlatego będziemy ją oznaczać tym samym symbolem i podgrupę $\{(E,a),\ a \in R^n\}$, która jest izomorficzna z grupą addatywną przestrzeni wektorowej R^n. Podgrupę tę będziemy więc oznaczać przez R^n. Grupa $CA(n,R)$ jest iloczynem tych podgrup, tzn.

$$CA(n,R) = R^n \cdot C(n,R)$$

czyli

$$\bigwedge (A,a) \in CA(n,R),\ (A,a) = (E,a)(A,0)$$

Dla ilustracji przeprowadzonych wcześniej rozważań wyznaczymy obiekty odpowiadające tym podgrupom.
Niech $H = C(n,R)$. Wtedy elementy zbioru ilorazowego $CA(n,R)/H$ mają postać $\langle(A,a)\rangle = (A,a)H = \{(A,a)(X,o), X\subset C(n,R)\} = \{(AX,a), X\subset C(n,R)\} = \langle(E,a)\rangle$
Widać stąd, że zbiór ten można wzajemnie jednoznacznie odwzorować na zbiór $\{\langle(E,a)\rangle, a\in R^n\}$ a ten następnie na zbiór $\{a,\ a\in R^n\}$. Napiszmy teraz działanie grupy $CA(n,R)$ na zbiór $\{\langle(E,a)\rangle,\ a\in R^n\}$

$$\Lambda\langle(E,\omega)\rangle\subset CA(n,R)/H,\ F_o(\langle(E,\omega)\rangle,(A,a)) = \langle(A,a)(E,\omega)\rangle = \langle(AE,A\omega + a)\rangle =$$

$$= \langle(E,A\omega + a)\rangle$$

Obiekt $(CA(n,R)/H,\ CA(n,R),\ F_o)$ jest równoważny z obiektem $(R^n, CA(n,R), f_o)$ gdzie $f_o(\omega,(A,a)) = A\omega + a$.
Istotnie, niech h jest odwzorowaniem zbioru $CA(n,R)/H$ na zbiór R^n określonym następująco $h(\langle(E,\omega)\rangle) = \omega$.
Tak określone odwzorowanie h jest odwzorowaniem różnowartościowym i spełniającym równanie $h(F_o(\langle(E,\omega)\rangle, (A,a))) = f_o(h(\langle(E,\omega)\rangle), (A,a))$. Istotnie, $F_o(\langle(E,\omega)\rangle, (A,a)) = \langle(E,A\omega + a)\rangle \Rightarrow h(\langle(E,A\omega + a)\rangle) = A\omega + a$ oraz $f_o(h(\langle(E,\omega)\rangle), (A,a)) = f_o(\omega,(A,a)) = A\omega + a$. Ponadto odwzorowanie h jest odwzorowaniem na cały zbiór R^n, zatem ustala równoważność między tymi obiektami. Odpowiadającym obiektem abstrakcyjnym jest więc sama geometria a obiekty szczególne są jej punktami.
Niech teraz $H = \{(E,a), a\in R^n\}$. Elementy zbioru ilorazowego $CA(n,R)/H$ mają postać $[(A,a)] = (A,a)H = \{(A,a)(E,x), x\in R^n\} = \{(A,Ax + a)\} = [(A,0)]$.
Widać zatem, że zbiór ilorazowy $CA(n,R)/H$ można wzajemnie jednoznacznie odwzorować na zbiór $\{A,\ A\in C(n,R)\}$. Obiekt odpowiadający tej podgrupie jest określony przez trójkę $(CA(n,R)/H,\ CA(n,R), F_1)$, gdzie $F_1((\Omega,o),(A,a)) = [(A,a)(\Omega,0)] = [(A\Omega,a)] = [(A\Omega,0)]$. Obiekt ten jest równoważny z obiektem $(C(n,R),\ CA(n,R),\ f_1)$, gdzie $f_1(\Omega,(A,a)) = A\Omega$. Istotnie, łatwo sprawdzić, że odwzorowanie $h: CA(n,R)/H \to C(n,R)$, określone następująco $h([(\Omega,0)]) = \Omega_1$ ustala równoważność między tymi obiektami. Pokażemy, że obiekt $(C(n,R),\ CA(n,R),\ f_1)$ jest równoważny pewnemu obiektowi, którego włóknem jest pewien podzbiór R^n. Niech $\Omega\in C(n,R)$ ma ona wtedy postać $\Omega = \omega_o E + \omega_1 E_1 + \omega_2 E_1^2 + \ldots + \omega_{n-1}E_1^{n-1}$, tzn.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_o, & \omega_1, \ldots, & \omega_{n-2}, & \omega_{n-1} \\ \omega_{n-1}, & \omega_o, \ldots, & \omega_{n-3}, & \omega_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_2, & \omega_3, \ldots, & \omega_o, & \omega_1 \\ \omega_1, & \omega_2, \ldots, & \omega_{n-1}, & \omega_o \end{pmatrix}$$

Oznaczmy przez ω pierwszą kolumnę macierzy Ω^T. Wtedy macierz Ω^T kolumnowo można zapisać następująco

$$\Omega^T = (\omega,\ E_1^{-1}\omega,\ E_1^{-2}\omega,\dots,E_1^{-(n-1)}\omega),$$

gdzie zgodnie z (2.1) $E_1^{-1} = P_{12}\,P_{23}\,\dots\,P_{n-1\,n}$.

Rozważmy teraz obiekt $(R^n,\ CA(n,R),\ f_o)$, $f_o(\sigma,(A,a)) = A^T\sigma$ oraz odwzorowanie $h: C(n,R) \longrightarrow R^n$ określone następująco $h(\Omega) = \omega$. Odwzorowanie to spełnia równanie

$$h(f_1(\Omega,(A,a))) = f_o(h(\Omega),(A,a)).$$

Istotnie, $f_1(\Omega,(A,a)) = A\Omega \Rightarrow h(A\Omega) = \sigma^*$, gdzie σ^* oznacza pierwszą kolumnę macierzy $(a\Omega)^T = \Omega^T A^T = A^T\Omega^T = A^T(\omega,\ E_1^{-1}\omega,\dots,E_1^{-(n-1)}\omega) = (A^T\omega, A^TE_1^{-1}\omega,\dots$ $\dots,A^TE_1^{-(n-1)}\omega)$. Stąd $h(A\Omega) = \sigma^* = A^T\omega$. Natomiast $f_o(h(\Omega),(A,a)) =$ $= f_o(\omega,(A,a)) = A^T\omega$. Niech teraz M oznacza podzbiór przestrzeni R^n określony następująco

$$M := \{\omega \in R^n,\ \bigvee \Omega \in C(n,R),\ \omega = h(\Omega)\}$$

Z powyższych rozważań wynika, że M jest zbiorem dopuszczalnym. W tym celu niech $\omega_o \in M$, tzn. $\bigvee \Omega \in C(n,R)$, $\omega_o = h(\Omega)$, wtedy dla dowolnego $A \in C(n,R)$ definiujemy $\Omega = A\Omega = \Omega A$, stąd $h(\Omega) = h(A\Omega) = \omega^*$, gdzie ω^* jest pierwszą kolumną macierzy $(\Omega A)^T = A^T\Omega^T = A^T(\omega_o,\ E_1^{-1}\omega_o,\dots,E_1^{-(n-1)}\omega_o) =$ $= (A^T\omega_o,\ A^TE_1^{-1}\omega_o,\dots A^TE_1^{-(n-1)}\omega_o)$. Zatem $h(\Omega) = \omega^* = A^T\omega_o$, co dowodzi że $A^T\omega_o \subset M$. Możemy teraz utworzyć obiekt $(M, CA(n,R), \tilde{f}_o)$, $\tilde{f}_o := f_o|_M$ oraz $\tilde{f}_o(\sigma,(A,a)) = A^T\sigma$, który jest równoważny z obiektem $(C(n,R), CA(n,R), f_1)$. Z powyższych uwag wynika, że dla dowodu równoważności wystarczy tylko sprawdzić różnowartościowość odwzorowania h, określonego wzorem $h(\Omega) = \omega$. Niech $h(\Omega_1) = \omega_1$ oraz $h(\Omega) = h(\Omega_1) \Rightarrow \bigwedge 1 \le k < n-1$, $E_1^{-k}\omega = E_1^{-k}\omega_1 \Rightarrow \Omega^T = \Omega_1^T \Rightarrow \Omega = \Omega_1$.

We współrzędnych obiekt $\bar{\omega} = A^T\omega$ przyjmuje postać

$$\bar{\omega}_o = \alpha_o\omega_o + \alpha_{n-1}\omega_1 + \dots + \alpha_2\omega_{n-2} + \alpha_1\omega_{n-1}$$

$$\bar{\omega}_1 = \alpha_1\omega_o + \alpha_o\omega_1 + \dots + \alpha_3\omega_{n-2} + \alpha_2\omega_{n-1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\bar{\omega}_{n-1} = \alpha_{n-1}\omega_o + \alpha_{n-2}\omega_1 + \dots + \alpha_1\omega_{n-2} + \alpha_o\omega_{n-1}.$$

3. W tym punkcie wyznaczymy pewne obiekty geometrii cyklicznej Kleina w przypadku n=2 i n=3.

W dwuwymiarowej geometrii cyklicznej, zgodnie z rozważaniami poprzedniego punktu, istnieją dwa obiekty, mianowicie obiekt $(R^2,\ CA(2,R,f_o)$ o prawie transformacji

$$\bar{\omega}_0 = \alpha_0\omega_0 + \alpha_1\omega_1 + a_0, \quad \left(\begin{pmatrix}\alpha_0, & \alpha_1\\ \alpha_1, & \alpha_0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}\right) \in C(A(2,R)).$$
$$\bar{\omega}_1 = \alpha_1\omega_0 + \alpha_0\omega_0 + a_1,$$

oraz obiekt $(R^2,\ CA(2,R),\ F_0)$ o prawie transformacji

$$\bar{\omega}_0 = \alpha_0\omega_0 + \alpha_1\omega_1 \qquad \begin{pmatrix}\alpha_0, \alpha_1\\ \alpha_1, \alpha_0\end{pmatrix} \in C(2,R).$$
$$\bar{\omega}_1 = \alpha_1\omega_0 + \alpha_0\omega_1$$

Obecnie wyznaczymy jeszcze inne obiekty dwuwymiarowej geometrii cyklicznej. Każda macierz $A \in C(2,R)$ ma postać

$$A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}, \quad \alpha^2 - \beta^2 \neq 0.$$

Rozważmy podgrupy G_1, G_2 grupy $CA(2,R)$ określone następująco

$$G_1 := \left\{(A,a) \in CA(2,R),\ \alpha + \beta = 1,\ a \in R^n\right\}$$

oraz

$$G_2 := \left\{(A,a) \in CA(2,R),\ \alpha - \beta = 1,\ a \in R^n\right\}$$

Elementy zbioru ilorazowego $CA(2,R)/G_1$ mają postać

$$\langle(A,a)\rangle = \left\{(A,a)(X,x),\ (X,x) \in G_1\right\} = \left\{(AX,\ Ax + a),\ (X,x) \in G_1\right\}.$$

Podstawiając $x = -Aa^{-1}$, $X = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix}\alpha - \beta\\ -\beta\ \alpha\end{pmatrix}$ otrzymamy, że $\langle(A,a)\rangle = \left\langle\begin{pmatrix}\alpha+\beta, 0\\ 0, \alpha+\beta\end{pmatrix}, 0\right\rangle$.
Zatem zbiór $CA(2,R)/G_1$ można wzajemnie jednoznacznie odwzorować na zbiór $T := \left\{ \langle(\Omega,0)\rangle,\ \Omega = \begin{pmatrix}\omega, 0\\ 0, \omega\end{pmatrix}, \omega \neq 0\right\}$, a ten następnie na zbiór $R^* := R\ \{0\}$. Napiszmy teraz działanie grupy $CA(2,R)$ na zbiór T

$$\bigwedge \langle(\Omega,0)\rangle \in CA(2,R)/G_1, F_1(\langle(\Omega,0)\rangle, (A,a)) = \langle(A,a)(\Omega,0)\rangle = \langle(A\Omega,a)\rangle =$$

$$= \left\langle\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)\omega, & 0\\ 0, & (\alpha+\beta)\omega\end{pmatrix}, 0\right\rangle$$

Obiekt $(CA(2,R)/G_1, CA(2,R),\ F_1)$ jest równoważny z obiektem

$$(R^*,\ CA(2,R),\ f_1), \text{ gdzie } f_1(\omega,(A,a)) = (\alpha+\beta)\omega.$$

Istotnie, odwzorowanie $h: CA(2,R)/G_1 \to R^*$ określone wzorem $h(\langle(\Omega,0)\rangle) = \omega$ jest bijekcją.

Ponadto

$$h(F_1(\langle(\Omega,0)\rangle,(A,a))) = h(\langle\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)\omega,0\\ 0,(\alpha+\beta)\omega\end{pmatrix},0\rangle) = (\alpha+\beta)\omega = f_1(h(\langle(\Omega,0)\rangle),(A,a)).$$

Analogicznie można pokazać, że zbiór ilorazowy $CA(2,r)/G_2$ można wzajemnie jednoznacznie odwzorować na zbiór $\left\{ \langle(\Omega,0)\rangle,\ \Omega = \begin{pmatrix}\omega,0\\ 0,\omega\end{pmatrix},\ \omega \neq 0 \right\}$ a ten na zbiór R^*. Natomiast działanie grupy $CA(2,R)$ na ten zbiór określone jest wzorem

$$\bigwedge \langle(\Omega,0)\rangle \in CA(2,R)/G_2,\ F_2(\langle(\Omega,0)\rangle,(A,a)) = \langle(A,a)(\Omega,0)\rangle = \langle(A\Omega,a)\rangle =$$

$$= \langle\begin{pmatrix}(\alpha-\beta)\omega,0\\ 0,(\alpha-\beta)\omega\end{pmatrix},0\rangle.$$

Obiekt $(Ca(2,R)/G_2,\ CA(2,R),F_2)$ jest zatem obiektem

$$(R^*,\ CA(2,R),\ f_2),\ \text{gdzie}\ f_2(\omega,(A,a)) = (\alpha-\beta)\omega. \qquad (3.2)$$

W oparciu o obiekty (3.1) oraz (3.2) można utworzyć całą rodzinę obiektów, mianowicie $(R,\ CA(2,R),\ F_1)$ oraz $(R,\ CA(2,R),\ F_2)$, gdzie $F_1(\omega,(A,a)) = \varphi_1(\alpha+\beta).\omega$, $F_2(\omega,(A,a)) = \varphi_2(\alpha-\beta).\omega$. Natomiast φ_1, φ_2 są funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej, spełniającymi równanie

$$\varphi_i(\xi\eta) = \varphi_i(\xi)\ .\ \varphi_i(\eta),\ i=1,2.$$

Obiekty te na innej drodze zostały wyznaczone w pracy [4].

Rozważmy teraz obiekt następujący

$$(M,\ CA(2,R),\ F),\ \text{gdzie}\ M = R^*\times R^*,$$

natomiast $F=f_1 \times f_2$, tzn. $F((\omega_1,\omega_2),(A,a)) = (f_1(\omega_1,(A,a)),\ f_2(\omega_2,(A,a)))$. Niech dany jest również obiekt tranzytywny $(R^*,\ CA(2,R),\ f)$, gdzie $f(\omega,(A,a)) = h(\det A)\omega$. Funkcja h jest typu $h: R \to R$.

<u>Twierdzenie 3.1</u>

Obiekt $(R^*,\ CA(2,R),\ f)$ jest komitantą obiektu (3.3)

<u>Dowód</u>

Niech g jest funkcją określoną wzorem $g(\omega_1,\omega_2) = h(\omega_1\ .\ \omega_2)$. Wtedy $G(F(\omega_1,\omega_2),(A,a))) = g(f_1(\omega_1,(A,a)),\ f_2(\omega_2,(A,a))) = g((\alpha+\beta)\omega_1,(\alpha-\beta)\omega_2) = h((\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\omega_1\omega_2)$ $= h(\det A)\ h(\omega_1.\omega_2) = h(\det A)\ g(\omega_1,\omega_2) = f(g(\omega_1,\omega_2),\ (A,a))$. Pokażemy, że g jest surjekcją, tzn. $\bigwedge \omega \subset R^*$, $\bigvee (\omega_1,\omega_2) \in \Pi$, $g(\omega_1,\omega_2) = \omega$. Niech $\omega \in R^*$ i $\omega > 0$, wtedy ω_1, ω_2 określam następująco $\omega_1,\omega_2 \subset h^{-1}(\sqrt{|\omega|})$, tzn. ω_1, ω_2 są dowolnymi elementami przeciwobrazu elementu $\sqrt{\omega}$ poprzez funkcję h. Jeśli $\omega<0$, wtedy ω_1, ω_2 określam tak, aby $\omega_1 \in h^{-1}(\sqrt{|\omega|})$ natomiast $\omega_2 \in h^{-1}(-\sqrt{|\omega|})$. Obecnie wyznaczymy pewne obiekty trójwymiarowej geometrii cyklicznej. Zgodnie z punktem 3 możemy podać dwa obiekty. Obiekt $(R^3, CA(3,R), f_o)$ o prawie transformacji

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_0 &= \alpha_0 \omega_0 + \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + a_0 \\ \bar{\omega}_1 &= \alpha_2 \omega_0 + \alpha_0 \omega_1 + \alpha_1 \omega_2 + a_1 \\ \bar{\omega}_2 &= \alpha_1 \omega_0 + \alpha_2 \omega_1 + \alpha_0 \omega_2 + a_2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) \in CA(3,R)$$

oraz obiekt $(R^3, CA(3,R), F_o)$ o prawie transformacji

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_0 &= \alpha_0 \omega_0 + \alpha_2 \omega_1 + \alpha_1 \omega_2 \\ \bar{\omega}_1 &= \alpha_1 \omega_0 + \alpha_0 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 \\ \bar{\omega}_2 &= \alpha_2 \omega_0 + \alpha_1 \omega_1 + \alpha_0 \omega_2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_0 \end{pmatrix} \in C(3,R)$$

Obecnie wyznaczymy jeszcze inne obiekty. Niech A będzie macierzą cykliczną, $A \subset C(3,R)$. Ma ona postać

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

Niech ε będzie ustalonym pierwiastkiem trzeciego stopnia z jedności. Wtedy odwzorowanie $f: C(3,R) \to C$, określone wzorem $f(A) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2$ jest homomorfizmem grupy $C(3,R)$ w grupę multiplikatywną liczb zespolonych. Weźmy $\varepsilon = 1$, wtedy homomorfizm f określa pewną podgrupę $H_1 \subset CA(3,R)$ określoną następująco

$$H_1 = \{(A,a) \in CA(3,R),\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}.$$

Natomiast pierwiastki $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, które są wzajemnie sprzężone wyznaczają tę samą podgrupę H_1, mianowicie

$$H_2 = \{(A,a) \in CA(3,R),\ f(A) = 1\}$$

Wyznaczymy obiekty odpowiadające tym podgrupom. Elementy zbioru ilorazowego $CA(3,R)/H_1$ mają postać $\langle(A,a)\rangle = (A,a)H_1 = \{(A,a)(X,x), (X,x) \in H_1\} = \{(AX, Ax + a), (X,x) \in H_1\} = \{(AX,0), (X,0) \in H_1\}$. Podstawiając za X macierz postaci

$$X = \frac{1}{\sigma}\begin{pmatrix} \alpha_0^2 - \alpha_1\alpha_2, & \alpha_2^2 - \alpha_0\alpha_1, & \alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2 \\ \alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2, & \alpha_0^2 - \alpha_1\alpha_2, & \alpha_2^2 - \alpha_0\alpha_1 \\ \alpha_2^2 - \alpha_0\alpha_1, & \alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2, & \alpha_0^2 - \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix}$$

gdzie $\sigma = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2$.
Otrzymamy, że

$$AX = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma}\det A, & 0, & 0, \\ 0, & \frac{1}{\sigma}\det A, & 0, \\ 0, & 0, & \frac{1}{\sigma}\det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2, & 0, & 0, \\ 0, & \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2, & 0, \\ 0, & 0, & \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 \end{pmatrix}$$

gdyż $\det A = \sigma . (\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)$.
Mamy zatem równość

$$\langle(A,a)\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \omega, & 0, & 0 \\ 0, & \omega, & 0 \\ 0, & 0, & \omega \end{pmatrix}, 0 \right\rangle, \text{ gdzie } \omega = \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2$$

Widać stąd, że zbiór $CA(3,R)/H_1$ można wzajemnie jednoznacznie odwzorować na zbiór $T := \{ \langle(\Omega,0)\rangle, \Omega = \omega.E, \omega \neq 0 \}$ a ten na zbiór R^*.

Działanie grupy $CA(3,R)$ na zbiór T określone jest wzorem

$$\bigwedge \langle(\Omega,0)\rangle \subset CA(3,R)/H_1, \quad F_1(\langle(\Omega,0)\rangle, (A,a)) = \langle(A,a)(\Omega,0)\rangle = \langle(A\Omega, a)\rangle =$$

$$= \langle(\omega E, 0)\rangle, \text{ gdzie } \omega = \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2.$$

Obiekt $(CA(3,R)/H_1, CA(3,R), F_1)$ jest równoważny z obiektem $(R^*, CA(3,R), f_1)$, gdzie $f_1(\omega,(A,a)) = (\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)$.
Istotnie, odwzorowanie h określone wzorem $h(\langle(\Omega,0)\rangle) = \omega$ jest bijekcją zbioru $CA(3,R)/H_1$ na zbiór R^*, spełniającą równanie

$$h(F_1(\langle(\Omega,0)\rangle, (A,a))) = f_1(h(\langle(\Omega,0)\rangle),(A,a)).$$

Można pokazać (rachunki już pomijamy), że obiekt odpowiadający podgrupie H_2 jest obiektem o dwóch składowych, równoważny z obiektem

$$(R_*^2, CA(3,R), f_2), \text{ gdzie } R_*^2 = R^2\ \{(0,0)\}$$

o prawie transformacji:

$$\bar{\omega}_1 = (\alpha_0 - \tfrac{1}{2}\alpha_1 - \tfrac{1}{2}\alpha_2)\omega_1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\omega_2$$

$$\bar{\omega}_2 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\omega_1 + (\alpha_0 - \tfrac{1}{2}\alpha_1 - \tfrac{1}{2}\alpha_2)\omega_2.$$

Powyższa metoda wyznaczania obiektów tranzytywnych jest słuszna dla dowolnego n. Ograniczyliśmy się do przypadku $n = 2$ i $n = 3$, aby obiekty odpowiadające danym podgrupom wyznaczyć efektywnie. W przypadku dowolnego n grupę macierzy cyklicznych można zastąpić grupę macierzy quassi-diagonalnych, które są izomorficzne ([4], lemat 3.4).

LITERATURA

[1] Jasińska E.J., Kucharzewski M.: Kleinsche Geometrie und Theorie der geometrischen Objekte. Colloq. Math. 26,1972.

[2] Jasińska E.J., Kucharzewski M.: Grundlegende Begriffe der Kleinschen Geometrie. Demonst. Math. 7/3, 1974.

[3] Siwek E., Zajtz A.: Contribution à la théorie des pseudo-objets géométriques. Annal. Polon. Math. XIX,1967.

[4] Kasparek E.: Sur une èquation fonctionnelle matricielle. ZN U.Śl. (w druku).

[5] Midura S., Moszner Z.: Quelques remarques au sujet de la notion de l'objet et de l'objet géométrique. Annal. Polon. Math. 18, 1966.

ОБЪЕКТЫ ГЕОМЕТРИИ КЛАЙНА ОСНОВАННОЙ НА ОДНОЙ ИЗ ПОДГРУПП МАТРИЦЫ

Р е з ю м е

Циклической матрицей называем квадратную матрицу, которой каждая строка образуется передвигая предывущий на один элемент в право. При помощи $CA(n,R)$ обозначаем множество пар (A,a) матрицы, где A это циклическая матрица степени n с вещественными элементами а матрица $a \in R^n$. Множество это с действием $(B,в) \cdot (A,a) = (BA, Ba+в)$ это группа.

В дефиниции представленной в [2] при $(R^n, CA(n,R), f)$, где действие $f: R^n \times CA(n,R) \to R^n$ вида $f(x,A,a) = Ax + a$ это некоторая геометрия Клайна.

В работе представлено некоторый общий метод обозначения объектов заданной геометрии Клайна, а также на её основе были обозначены некоторые объекты в/у геометрии.

KLEIN'S GEOMETRY OBJECTS BASED ON A CERTAIN MATRIX SUBGROUP

S u m m a r y

A cyclic matrix is such a square matrix of which every verse is formed by shif ing the previous one by one element to the right. Let us denote a set of matrix pairs (A,a) by CA(n,R), where A is a cyclic, non-singular matrix of n orde, with real elements, and a matrix $a \in R^n$. This set together with the equation (B,b),(A,a) = (B.A,Ba+b) is group.According to the definition given in [2] the three expressions (R^n, CA(n,R), f) where the equation f: $R^n \times CA(n,R) \to R^n$ has the form of f(x,A,a) = Ax + a, is a certain Klein's geometry.

In the paper there was given a certain general method for determining the objects of the assumed Klein's geometry and on its basis some objects of the above defined geometry were determined.