ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 30 Nr kol. 560

Grażyna KOZŁOWSKA

Instytut Matematyki - Politechnika Śląska

APROKSYMACJA FUNKCJAMI CAŁKOWITYMI DWÓCH ZMIENNYCH W PRZESTRZENIACH ORLICZA Z NORMAMI MIESZANYMI

Streszczenie. W pracy uogólniono klasyczne twierdzenia Jacksona i Bernsteina [3] oraz pewien wynik Gubanowa [1] na przestrzenie Orlicza z normami mieszanymi, aproksymując w tych przestrzeniach funkcje dwóch zmiennych funkcjami całkowitymi.

OZNACZENIA

$D = [a,b;c,d]$ — prostokąt; może być niewłaściwy.

$\varphi(u)$ — N - funkcja, tzn. $\varphi(u) = \int\limits_0^{|u|} p(t)\,dt$, gdzie $p(t)$ jest funkcją niemalejącą, prawostronnie ciągłą dla $t \geqslant 0$, spełniającą warunki $p(t) > 0$ dla $t > 0$, $p(0)=0$ oraz $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)=\infty$

$\psi(v)$ — N - funkcja.

$$\|f(\cdot,y)\|_{(\varphi)} = \inf\left\{\varepsilon>0;\ \int\limits_a^b \varphi\left(\frac{|f(x,y)|}{\varepsilon}\right) dx \leqslant 1\right\}.$$

$L^{*\varphi}(a,b)$ — przestrzeń funkcji $f(\cdot,y)$ określonych i mierzalnych w $[a,b]$, takich, że
$$\int\limits_a^b \varphi(k|f(x,y)|)\,dx < \infty$$
dla prawie wszystkich y z pewnego przedziału $[c,d]$, gdzie $k > 0$ zależy od y.

$$\|f(x,\cdot)\|_{(\psi)} = \inf\left\{k > 0;\ \int\limits_c^d \psi\left(\frac{|f(x,y)|}{k}\right) dy \leqslant 1\right\}.$$

$L^{*\psi}(c,d)$ — przestrzeń funkcji $f(x,\cdot)$ określonych i mierzalnych w $[c,d]$, takich, że

$\int_c^d \psi(l|f(x,y)|)\,dy<\infty$ dla prawie wszystkich x z pewnego przedziału $[a,b]$, gdzie $l>0$ zależy od x.

$\|f(x,y)\|_{(\varphi,\psi)} = \| \, \|f(\cdot,y)\|_{(\varphi)}\|_{(\psi)}$

$L^{*(\varphi,\psi)}(D)$ przestrzeń Orlicza z normą mieszaną. Przestrzeń funkcji dwóch zmiennych f(x,y) określonych i mierzalnych w D, takich, że $f(\cdot,y)\in L^{*\varphi}(a,b)$ dla prawie wszystkich $y\in[c,d]$ oraz $\|f(\cdot,y)\|_{(\varphi)}\in L^{*\psi}(c,d)$. Normą w tej przestrzeni jest $\|f(x,y)\|_{(\varphi,\psi)}$

$L^{*(\varphi,\psi)} = L^{*(\varphi,\psi)}(-\infty;\infty\,;\,-\infty,\infty)$.

$$G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{l=0}^{\infty} b_l y^l = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_k b_l x^k y^l,$$

gdzie: $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k!|a_k|} = \sigma_1<\infty$

$\overline{\lim_{l\to\infty}} \sqrt[l]{l!\,b_l} = \sigma_2<\infty$

jest funkcją całkowitą typu σ_1 ze względu na zmienną x i σ_2 ze względu na y.

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_{(\varphi,\psi)} = \inf_{G_{\sigma_1,\sigma_2}} \|f(x,y)-G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\|_{(\varphi,\psi)}.$$

Przy dodatnich u i v przyjmuje się:

$$\omega(f;u,v)_{(\varphi,\psi)} = \sup_{|h|\le u,\,|k|\le v} \|f(x+h,y+k)-f(x,y)\|_{(\varphi,\psi)},$$

$$\omega(f;u,0)_{(\varphi,\psi)} = \sup_{|h|\le u} \|f(x+h,y)-f(x,y)\|_{(\varphi,\psi)}$$

$$\omega(f;0,v)_{(\varphi,\psi)} = \sup_{|k|\le v} \|f(x,y+k)-f(x,y)\|_{(\varphi,\psi)}$$

$$\Delta_h\,\Delta_k\, f(x,y) = f(x,y)-f(x,y+k)-f(x+h,y)+f(x+h,y+k).$$

$$\omega_{1,1}(f;u,v)_{(\varphi,\psi)} = \sup_{|h|\le u,\,|k|\le v}\|\Delta_h\,\Delta_k\, f(x,y)\|_{(\varphi,\psi)}$$

1. PRZESTRZENIE ORLICZA Z NORMAMI MIESZANYMI

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją określoną i mierzalną w prostokącie D, taką, że $f(\cdot,y) \in L^{*\varphi}(a,b)$ dla prawie wszystkich $y \in [c,d]$ oraz $\|f(\cdot,y)\|_{(\varphi)} \in L^{*\varphi}(c,d)$.

Przestrzeń tak określonych funkcji jest przestrzenią liniową. Funkcje f_1 i f_2 będzie uważało się za równe, $f_1 = f_2$, jeśli ich wartości są równe prawie wszędzie w prostokącie D. W przestrzeni tej można określić normę

$$\|f(x,y)\|_{(\varphi,\psi)} = \big\| \|f(\cdot,y)\|_{(\varphi)} \big\|_{(\psi)}$$

Tak określoną przestrzeń z normą $\|f(x,y)\|_{(\varphi,\psi)}$ oznacza się $L^{*(\varphi,\psi)}(D)$ i nazywa przestrzenią Orlicza z normą mieszaną.

Przyjmując różne N - funkcje w miejsce φ i ψ otrzymuje się różne przestrzenie Orlicza. W szczególności przyjmując $\varphi(u) = |u|^{p_1}$ i $\psi(v) = |v|^{p_2}$, gdzie $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ otrzymuje się przestrzeń $L^P(D)$, gdzie $P = (p_1,p_2)$.

Wtedy

$$\|f(x,y)\|_{L^P(D)} = \left\{ \int_c^d \left[\int_a^b |f(x,y)|^{p_1}\, dx \right]^{p_2/p_1} dy \right\}^{1/p_2}.$$

2. APROKSYMACJA FUNKCJI $f,(x,y) \in L^{*(\varphi,\psi)}$ FUNKCJAMI CAŁKOWITYMI $G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)$

W przestrzeniach Orlicza z normami mieszanymi okazują się prawdziwe twierdzenia analogiczne do klasycznych twierdzeń Jacksona i Bernsteina.

<u>Twierdzenie 1</u>

Jeśli $f(x,y) \in L^{*(\varphi,\psi)}$, to prawdziwe jest oszacowanie

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_{(\varphi,\psi)} \leq C\,\omega\left(f;\ \frac{1}{\sigma_1},\ \frac{1}{\sigma_2}\right)_{(\varphi,\psi)}$$

Dowód twierdzenia w [2] s. 28.

<u>Twierdzenie 2</u>

Jeśli $f(x,y) \subset L^{*(\varphi,\psi)}$ ma pochodne cząstkowe absolutnie ciągłe aż do rzędu $k_1 - 1$ ze względu na x i $k_2 - 1$ ze względu na y oraz

$$\left\| \frac{\partial^{k_1} f}{\partial x^{k_1}} \right\|_{(\varphi,\psi)} < \infty, \qquad \left\| \frac{\partial^{k_2} f}{\partial y^{k_2}} \right\|_{(\varphi,\psi)} < \infty,$$

to

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_{(\varphi,\psi)} \leqslant C(k_1,k_2)\left\{\frac{1}{\sigma_1^{k_1}}\omega\left(\frac{\partial^{k_1} f}{\partial_x^{k_1}};\frac{1}{\sigma_1},0\right)_{(\varphi,\psi)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma_2^{k_2}}\omega\left(\frac{\partial^{k_2} f}{\partial_y^{k_2}};0,\frac{1}{\sigma_2}\right)_{(\varphi,\psi)}\right\}$$

Dowód twierdzenia w [2] s. 41.

<u>Twierdzenie 3</u>

Niech $f(x,y) \in L^{*(\varphi,\psi)}$, jeśli $A_{m,n}(f)_{(\varphi,\psi)} \leqslant k\left(\frac{1}{m^{\alpha}} + \frac{1}{n^{\beta}}\right)$, to przy

1. $\alpha < 1,\ \beta < 1$ $\quad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_{(\varphi,\psi)} = O(\delta^{\alpha} + \gamma^{\beta})$,

2. $\alpha < 1,\ \beta = 1$ $\quad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_{(\varphi,\psi)} = O(\delta^{\alpha} + \gamma|\ln\gamma|)$,

3. $\alpha = 1,\ \beta < 1$ $\quad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_{(\varphi,\psi)} = O(\delta|\ln\delta| + \gamma^{\beta})$,

4. $\alpha = 1,\ \beta = 1$ $\quad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_{(\varphi,\psi)} = O(\delta|\ln\delta| + \gamma|\ln\gamma|)$,

5. $\alpha > 1,\ \beta > 1$ $\quad \omega_{1,1}(f;\delta,\gamma)_{(\varphi,\psi)} = O(\delta + \gamma)$,

itd. Dowód twierdzenia w [2] s. 60.

Jeśli funkcja $f(x,y) \in L^{*(\varphi,\psi)}$, to dokładność z jaką da się ona aproksymować za pomocą całki postaci

$$f_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,z)\Phi_{\sigma_1}(t-x)\Phi_{\sigma_2}(z-y)\,dt\,dz,$$

gdzie $\Phi_{\sigma}(u)$ jest funkcją mierzalną, dodatnią, parzystą i

$$a)\ \int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{\sigma}(u)\,du = 1, \qquad b)\ \delta_{\sigma} = \int_{0}^{\infty} u\Phi_{\sigma}(u)\,du \underset{\sigma\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

pozwala oszacować twierdzenie 4.

<u>Twierdzenie 4</u>

$$\|f_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) - f(x,y)\|_{(\varphi,\psi)} \leqslant 12\left[\omega(f;\delta_{\sigma_1},0)_{(\varphi,\psi)} + \omega(f;0,\delta_{\sigma_2})_{(\varphi,\psi)}\right].$$

Dowód twierdzenia w [2] s. 66.

LITERATURA

[1] Gubanow G.P.: O tocznosti priedstawlenija nieprierywnych periodiczeskich funkcji dwóch pieriemiennych singularnymi intiegrałami. IWUZ.Matematika No 12(91), 1969.

[2] Kozłowska G.: O aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi w przestrzeniach funkcji całkowalnych z mieszanymi potęgami. Praca doktorska. UAM, Poznań 1974.

[3] Timan A.F.: Tieorija pribliżenija funkcji diejstwitielnogo pieremiennogo. Moskwa 1960.

АППРОКСИМАЦИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА С МИКСИРОВАННЫМИ НОРМАМИ

Р е з ю м е

В представленой работе обобщены класические теоремы Джексона, Бернштейна [3] и результат Губанова [1] на пространства Орлича с миксированными нормами. В этих пространствах функции двух переменных аппроксимованные целыми функциями.

APPROXIMATION BY ENTIERE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES IN ORLICZ SPACES WITH MIXED NORM

S u m m a r y

In this paper there are generalized Jackson's and Bernstein s [3]theorems and result of Gubanow [1] for the functions two variables in the Orlicz spaces with mixed norm. These functions are approximation by entiere functions.