ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 30 Nr kol. 560

Lucjan MERES
Instytut Matematyki - Politechnika Śląska

O PEWNYM OSZACOWANIU ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA FERMATA

Streszczenie. W pracy udowodniono, że

$$x^n + y^n = z^n, \quad n - \text{liczba naturalna większa od } 1$$

pociąga

$$z < \frac{x}{b+1-n^{2-n}} + y$$

Wynik ten jest lepszy od wyniku

$$z \leqslant \frac{x}{n} + y$$

należącego do D. Zeitlina.

W pracy [1] udowodniono, że

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{pociąga} \quad z \leqslant \frac{x}{n} + y.$$

gdzie x,y,z,n są liczbami naturalnymi.

W niniejszej pracy udowodnimy nierówność mocniejszą, mianowicie

$$z < \frac{x}{n + 1 - n^{2-n}} + y.$$

Lemat

Jeżeli $n \geqslant 2$ jest liczbą naturalną, to liczba

$$t = n + 1 - n^{2-n} \tag{1}$$

spełnia nierówność

$$1 + n(t + t^2 + \ldots + t^{n-1}) > t^n. \tag{2}$$

Dowód

Jest

$$1 + n(t + t^2 + \ldots + t^{n-1}) - t^n = 1 + n\,\frac{t^n - t}{t - 1} - t^n =$$

$$= \frac{t - 1 + n(t^n - t) - t.t^n + t^n}{t - 1} = \frac{t^n . (n - t + 1) + t - n.t - 1}{t - 1} =$$

$$= \frac{(n+1-n^{2-n})^n . (n-n-1+n^{2-n}+1) + n+1 - n^{2-n} - n^2 - n + n^{3-n} - 1}{n - n^{2-n}} =$$

$$= \frac{(n + 1 - n^{2-n})^n . n^{2-n} - n^2 - n^{2-n} + n^{3-n}}{n - n^{2-n}} =$$

$$= \frac{(n + 1 - n^{2-n})^n - n^n - 1 + n}{n^{n-2} . (n - n^{2-n})} \geqslant \frac{n^n - n^n - 1 + n}{n^{n-2} . (n - n^{2-n})} > 0 \text{ c.n.u.}$$

Udowodnioną nierówność można napisać w postaci

$$\frac{1 + n(t + t^2 + \ldots + t^{n-1})}{t^n} > 1. \tag{3}$$

Twierdzenie

Jeżeli liczby naturalne $x < y < z$ oraz liczba naturalna $n \geqslant 2$ związane są zależnością

$$z^n = x^n + y^n, \tag{4}$$

to

$$z < \frac{x}{n + 1 - n^{2-n}} + y. \tag{5}$$

Dowód

Jeżeli (5) nie ma miejsca, to jest

$$z^n \geqslant \left(\frac{x}{t} + y\right)^n = \frac{(x + ty)^n}{t^n},$$

gdzie t jest liczbą występującą w (1).
W związku z tym i nierównością

$$\binom{n}{k} \geqslant n$$

słuszną dla naturalnych k, n, takich, że $0 < k < n$ możemy napisać

$$z^n \geq \frac{\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} ty + \ldots + \binom{n}{n-1} x t^{n-1} y^{n-1} + \binom{n}{n} t^n y^n}{t^n} \geq$$

$$\geq \frac{x^n + nx^n + nx^{n-1} ty + nx^{n-2} t^2 y^2 + \ldots + nxt^{n-1} y^{n-1} + t^n y^n}{t^n} >$$

$$> \frac{x^n + nx^n t + nx^n t^2 + \ldots + nx^n t^{n-1} + t^n y^n}{t^n} =$$

$$= x^n \frac{1 + n(t + t^2 + \ldots + t^{n-1})}{t^n} + y^n .$$

Wobec (3) otrzymujemy

$$z^n > x^n + y^n$$

co przeczy (4).

Oszacowania typu (5) są interesujące z uwagi na to, że są liniowe.

LITERATURA

[1] Zeitlin D.: A note on Fermata last theorem, Fibonacci Quart 12(1974), 368-402.

О НЕКОТОРОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ФЕРМАТА

Р е з ю м е

В работе доказано, что

$$x^n + y^n = z^n, n - \text{натуральное число больше I}$$

потягивает

$$z < \frac{x}{n + 1 - n^{2-n}} + y$$

Результат этот лучше результата

$$z \leq \frac{x}{n} + y$$

принадлежавшему Д. Цайтлину.

ON A CERTAIN ESTIMATION OF SOLVING FERMAT'S EQUATION

S u m m a r y

In the paper it was proved that

$$x^n + y^n = z^n, \quad n \text{ - a natural number bigger than I}$$

what is followed by

$$z < \frac{x}{n + I - n^{2-n}} + y$$

This result is better than that one

$$z \leqslant \frac{x}{n} + y$$

which belongs to D. Zeitlin.