ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 30 Nr kol. 560

Lucjan MERES
Instytut Matematyki - Politechnika Śląska

O PEWNYCH NIERÓWNOŚCIACH ZWIĄZANYCH Z WIELKIM TWIERDZENIEM FERMATA

Streszczenie. W niniejszej pracy udowodniono związek (A), dotyczący liczb x,y,z stanowiących ewentualne rozwiązanie równania $x^n + y^n = z^n$, n - liczba naturalna, który stanowi oszacowanie stosunku $\frac{y}{x}$ z dołu i z góry przez dwa niewiele różniące się wyrażenia w budowie, w których występuje ten sam pierwiastek stopnia $n-1$. Nie ma tego w nierówności (i) należącej do R. Niewiadomskiego. Nierówności (B) i (C) dają pewne informacje o liczbie a występującej w (A). Nierówność (D) nie jest związana z poprzednimi.

W pracy [1] udowodniono, że jeżeli liczby naturalne x,y,z,p spełniają związek

$$x^p + y^p = z^p,$$

to

$$\sqrt[p]{\frac{p(z-x)}{x}} < \frac{y}{x} < \sqrt[p]{\frac{y}{p(z-y)}}. \tag{i}$$

W niniejszej pracy udowodnimy, że jeżeli liczby naturalne x,y,z,n spełniają warunki

$$x^n + y^n = z^n, \quad x < y < z,$$

to

$$y = \sqrt[n-1]{\frac{x}{n(z-y)}} \cdot x \cdot a, \tag{A}$$

gdzie

$$a = \frac{n-1+Q \cdot 0,72}{n-0,28}, \quad 0 < Q < 1.$$

$$\frac{y}{a} < z < \frac{y}{a^2}. \tag{B}$$

$$a^{n-1} > n\left(\sqrt[n]{2}-1\right). \tag{C}$$

$$z > x + \left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \cdot y. \tag{D}$$

Uwaga

Nierówność (B) jest oczywiście równoważna nierówności

$$a^2 z < y < az. \tag{B'}$$

Nierówności (C) i (D) pociągają nieco słabsze ale za to bardziej przejrzyste nierówności

$$a^{n-1} > \frac{2}{3}, \tag{C'}$$

$$z > x + \frac{2y}{3n}. \tag{D'}$$

Twierdzenie 1

Jeżeli liczby naturalne $x < y < z$ oraz liczba naturalna $n \geqslant 2$ spełniają warunek

$$x^n + y^n = z^n, \tag{1}$$

to

$$y = \sqrt[n-1]{\frac{x}{ni}} \cdot x \cdot \frac{n-1+Q\cdot 0,72}{n-0,28}, \tag{2}$$

gdzie

$$i = z - y, \quad 0 < Q < 1.$$

Dowód

Ze związku (1) wynika, że

$$x^n = (i+y)^n - y^n. \tag{3}$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego w przedziale $\langle y, i+y \rangle$ do funkcji $f(t) = t^n$ i wzoru (3) wynika, że

$$x^n = nic^{n-1}, \tag{4}$$

gdzie c jest pewną liczbą rzeczywistą leżącą w przedziale $(y, y+i)$. W takim razie mamy dwie nierówności

$$x^n > niy^{n-1} \tag{5}$$

oraz

$$x^n < niz^{n-1}, \tag{5'}$$

które można napisać w postaci

$$y < \sqrt[n-1]{\frac{x}{n1}} \cdot x \tag{6}$$

oraz

$$z > \sqrt[n-1]{\frac{x}{n1}} \cdot x. \tag{6'}$$

Nierówność (6) jest równoważna prawej części nierówności (1). Drugą część (1) można uzyskać z (6), zmieniając role y i x.
Ponieważ $x < y$, więc z (6) dostajemy

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{n}. \tag{7}$$

Dla wygody w zapisie przyjmijmy oznaczenia

$$\frac{y}{x} = p, \quad \frac{z}{x} = q. \tag{8}$$

Oczywiście jest

$$q > p > 1 \tag{9}$$

oraz

$$q - p = \frac{1}{x}. \tag{10}$$

Z (7) i (10) otrzymujemy

$$q < p + \frac{1}{n}. \tag{11}$$

Uwzględniając teraz (1), (8), (10), (9) i (11) mamy

$$1 = q^n - p^n = (q - p)(q^{n-1} + q^{n-2}p + \ldots + qp^{n-2} + p^{n-1})$$

$$< \frac{1}{x} \cdot \left[\left(p + \frac{1}{n}\right)^{n-1} + \left(p + \frac{1}{n}\right)^{n-2} p + \ldots + \left(p + \frac{1}{n}\right) \cdot p^{n-2} + p^{n-1}\right] <$$

$$< \frac{1}{x} \cdot \left[\left(p + \frac{p}{n}\right)^{n-1} + \left(p + \frac{p}{n}\right)^{n-2} p + \ldots + \left(p + \frac{p}{n}\right) \cdot p^{n-2} + p^{n-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{x} p^{n-1}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-2} + \ldots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1\right] =$$

$$= \frac{1}{x} p^{n-1} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1}{1 + \frac{1}{n} - 1} = \frac{n1}{x} p^{n-1} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1\right] <$$

$$< \frac{ni}{x} p^{n-1}(e - 1) < \frac{ni}{x} p^{n-1} \cdot 1{,}72.$$

Oznacza to po uwzględnieniu (8), że

$$y > x \sqrt[n-1]{\frac{x}{ni}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n-1]{1{,}72}}. \tag{12}$$

Wobec znanej nierówności

$$\sqrt[k]{1+a} \leq 1 + \frac{a}{k}, \quad a > -1, \quad k \geq 1,$$

otrzymujemy

$$\sqrt[n-1]{1{,}72} \leq 1 + \frac{0{,}72}{n-1} = \frac{n-0{,}28}{n-1}.$$

Stąd i (12) mamy

$$y > x \sqrt[n-1]{\frac{x}{ni}} \cdot \frac{n-1}{n-0{,}28}. \tag{13}$$

Z nierówności (6) i (13) wynika, że istnieje liczba Q leżąca w przedziale (0,1) taka, że

$$y = x \sqrt[n-1]{\frac{x}{ni}} \cdot \frac{n-1}{n-0{,}28} + Q \cdot \left(x \sqrt[n-1]{\frac{x}{ni}} - x \sqrt[n-1]{\frac{x}{ni}} \cdot \frac{n-1}{n-0{,}28}\right).$$

Ostatni związek można oczywiście napisać w postaci (2), co kończy dowód.

<u>Twierdzenie 2</u>

Liczby y oraz z, o których mowa w twierdzeniu 1, spełniają nierówności

$$\frac{y}{a} < z < \frac{y}{a^2}, \tag{14}$$

gdzie

$$a = \frac{n - 1 + Q.0{,}72}{n - 0{,}28}$$

jest liczbą występującą w (2).

<u>Dowód</u>

Lewa część (14) wynika od razu z (2) i (6′).

Ze znanej nierówności, pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną, wynika natychmiast nierówność następująca

$$p^k + p^{k-1}q + \ldots + pq^{k-1} + q^k > (k+1) \cdot (pq)^{\frac{k}{2}}, \tag{15}$$

przy czym p i q są różnymi liczbami dodatnimi, k jest liczbą naturalną. Kładąc w (15)

$$k = n-1, \quad p = z, \quad q = y$$

otrzymujemy dzięki (1)

$$x^n = z^n - y^n = (z - y)(z^{n-1} + z^{n-2}.y + \ldots + zy^{n-2} + y^{n-1}) > in\,(zy)^{\frac{n-1}{2}},$$

czyli

$$x^{n-1} \cdot \frac{x}{ni} > (zy)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Podnosząc obie strony tej nierówności do potęgi $\frac{2}{n-1}$ dostajemy

$$\left(x \cdot \sqrt[n-1]{\frac{x}{ni}}\right)^2 > zy,$$

co na podstawie (2) oznacza, że

$$\frac{y^2}{a^2} > zy.$$

Po podzieleniu obu stron przez y dostajemy prawą część (14), co kończy dowód.

Twierdzenie 3

Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$, liczby naturalne $x < y < z$ związane zależnością (1) spełniają nierówność

$$z > x + \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)y. \tag{16}$$

Dowód

Jeżeli (16) nie zachodzi, to jest

$$x^n + y^n = z^n \leqslant \left[x + (\sqrt[n]{2} - 1)y\right]^n = x^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} (\sqrt[n]{2} - 1)^j \cdot y^j <$$

$$< x^n + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} y^{n-j} y^j (\sqrt[n]{2} - 1)^j = x^n + y^n \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (\sqrt[n]{2} - 1)^j =$$

$$= x^n + y^n \cdot \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (\sqrt[n]{2} - 1)^j - \binom{n}{0} 1^n \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)^0\right] =$$

$$= x^n + y^n \cdot \left[(1 + \sqrt[n]{2} - 1)^n - 1\right] = x^n + y^n.$$

Sprzeczność kończy dowód.

<u>Twierdzenie 4</u>

Liczba

$$a = \frac{n - 1 + Q.0{,}72}{n - 0{,}28}$$

występująca w twierdzeniach 1 i 2, spełnia warunek

$$a^{n-1} > n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right). \tag{17}$$

<u>Dowód</u>

Jest

$$z < \sqrt[n]{2} \cdot y,$$

gdyż w przeciwnym wypadku byłoby

$$x^n + y^n = z^n \geqslant 2y^n = y^n + y^n > x^n + y^n.$$

W takim razie uwzględniając oznaczenie $z-y = i$ oraz (1), otrzymamy

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \left(\frac{z}{y}\right)^n - 1 = \left(\frac{z}{y} - 1\right)\left[\left(\frac{z}{y}\right)^{n-1} + \left(\frac{z}{y}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{z}{y} + 1\right] <$$

$$\frac{i}{y} \cdot \left[\left(\frac{\sqrt[n]{2}\, y}{y}\right)^{n-1} + \left(\frac{\sqrt[n]{2}\, y}{y}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{\sqrt[n]{2}\, y}{y} + 1\right] =$$

$$= \frac{i}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{\left(\sqrt[n]{2}\right)^n - 1}{\sqrt[n]{2} - 1}.$$

A więc

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} < \frac{i}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1},$$

co wobec (2) oznacza, że

$$\frac{1}{\frac{x}{ni}\, a^{n-1}} < \frac{i}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1}.$$

Z ostatniej nierówności dostajemy (17) c.n.u.

<u>Uwaga</u>

Jest

$$\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3}{2} n}\right)^{\frac{3}{2} n}\right]^{\frac{2}{3}} < e^{\frac{2}{3}} < \left(\sqrt[3]{2{,}72}\right)^2 = \sqrt[3]{7{,}3984} < \sqrt[3]{8} = 2.$$

A więc

$$\sqrt[n]{2} > 1 + \frac{2}{3n}.$$

W związku z tym można dzięki (17) i (16) napisać

$$a^{n-1} > \frac{2}{3}, \tag{18}$$

$$z > x + \frac{2y}{3n}. \tag{19}$$

LITERATURA

[1] Niewiadomski R.: Sur la grandeur absolue et relation mutuelle des nombers entiers qui peuvent resoudre l´équation $x^p+y^p=z^p$. Wiad. Mat. 54, 1938, s. 113-127.

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ СВЯЗАННЫХ
С БОЛЬШОЙ ТЕОРЕМОЙ ФЕРМАТА

Р е з ю м е

В работе доказано связь (A), чисел x,y,z являющихся возможным решением уравнения $x^n+y^n=z^n$, n – натуральное число, которое даёт определение соотношения $\frac{y}{x}$ снизу и сверху двумя немного отличающимися выражениями в строении которых выступает тот же корень степени n – I. Этого нет в неравенстве(i) принадлежавшему Р. Невядомского. Неравенства (B) и (C) дают некоторые сведения о числе a выступающем в (A). Неравенотво (D) несвязано с предыдущими.

ABOUT CERTAIN INEQUALITIES CONNECTED
WITH THE GREAT THEOREM OF FERMAT

S u m m a r y

In this work has been proved the relation (A) concerning numbers x,y,z deciding about the possible solution of equation $x^n+y^n=z^n$, n - natural number, which estimates the relation $\frac{y}{x}$ from below and top, thorough two, not much differing in construction, expression whith the same root of order n-1. This cannot be found in inequality (i) belonging to R. Niewiadomski. Inequalities (B) and (C) give certain information about number x, which is present in (A). Inequality (D) is not counected with the previons ones.