ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA Nr kol. 560

Brunon SZOCIŃSKI

# OBIEKTY LINIOWE JEDNORODNE GEOMETRII PODWÓJNIE PSEUDOSTOCHASTYCZNEJ

Streszczenie. W pracy tej podana jest ogólna metoda wyznaczania w geometrii podwójnie pseudostochastycznej obiektów liniowych o n składowych. Dla zilustrowania omawianej metody wyznaczono wszystkie obiekty liniowe jednorodne o jednej składowej.

## WSTĘP

Niech $H(n,R)$ będzie dowolną podgrupą ogólnej grupy liniowej $GL(n,R)$. Przez $GH(n,R)$ oznaczmy grupę, elementami której są pary postaci $(A,a)$, gdzie $A \in H(n,R)$, $a \in R^n$, zaś działanie "o" określone jest wzorem

$$(B,b) \circ (A,a) = (BA, Ba+b).$$

Zgodnie z ogólną definicją geometrii Kleina podaną w pracy [2], n-wymiarową geometrię grupy $GH(n,R)$ nazywamy trójkę

$$(R^n, GH(n,R), f), \tag{1}$$

gdzie odwzorowanie $f: R^n \times GH(n,R) \to R^n$, zwane działaniem grupy $GH(n,R)$ na przestrzeni $R^n$, określone jest następująco

$$f(x,g) = Ax+a, \quad x \in R^n, \quad g = (A,a) \in GH(n,R).$$

Ponieważ geometria (1) jest wyznaczona przez grupę $H(n,R)$, dlatego będziemy ją nazywać również geometrią Kleina opartą na tej grupie.

Geometria (1) nazywa się afiniczną, jeżeli w charakterze grupy $H(n,R)$ przyjmiemy $GL(n,R)$. Innym przykładem geometrii Kleina jest geometria podwójnie pseudostochastyczna (nazywana też krótko geometrią dps, por. [6]) oparta na grupie $DS(n,R)$ macierzy podwójnie pseudostochastycznych (por. [4], doppelt pseudostochastische Matrix) $A = [a_{ik}]$, (gdzie $i,k=1,2,\ldots,n$ $a_{ik} \in R$), określonych związkami

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}=1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ik}=1, \quad i,k=1,2,\ldots,n.$$

Abstrakcyjnym obiektem geometrycznym danej geometrii (1) (por. [2]) nazywamy każdą trójkę

$$(\mathfrak{M}, GH(n,R), F), \tag{2}$$

gdzie $\mathfrak{M}$ jest dowolnym zbiorem (zwanym włóknem obiektu), zaś $F: \mathfrak{M} \times GH(n,R) \to \mathfrak{M}$ odwzorowaniem (zwanym prawem transformacji) spełniającym następujące warunki

$$\bigwedge_{\omega \in \mathfrak{M}} \bigwedge_{g_1, g_2 \subset GH} f\left[f(\omega, g_1), g_2\right] = f(\omega, g_2 \circ g_1), \qquad 1^\circ$$

$$\bigwedge_{\omega \in \mathfrak{M}} f(\omega, e) = \omega. \qquad 2^\circ$$

Warunki te nazywamy odpowiednio równaniem fundamentalnym i warunkiem identyczności. Symbol e oznacza element neutralny grupy GH(n,R). Abstrakcyjny obiekt geometryczny o włóknie $\mathfrak{M} = R^m$ nazywamy liniowym, jeżeli jego prawo transformacji jest funkcją liniową względem składowych obiektu, tzn. ma postać

$$F(\omega, g) = \phi(g)\omega + \psi(g), \quad \omega \in R^m, \quad g \in GH(n,R).$$

Symbol $\phi$ oznacza tu macierz kwadratową stopnia m, zaś $\omega$ oraz $\psi$ - macierze jednokolumnowe o m wierszach. Jeżeli ponadto $\psi(g) \equiv 0$, to obiekt liniowy nazywamy jednorodnym. W dalszym ciągu będziemy się zajmować obiektami liniowymi jednorodnymi o m składowych i prawie transformacji

$$F(\omega, g) = \phi(A)\omega, \quad \omega \in R^m, \quad g = (A, a) \in GH(n,R). \tag{3}$$

Równanie fundamentalne i warunek identyczności dla takich obiektów sprowadzają się do warunków

$$\phi(BA) = \phi(B)\,\phi(A), \tag{4}$$

$$\phi(E_n) = E_m, \tag{5}$$

gdzie $E_n$ i $E_m$ oznaczają odpowiednio macierze jednostkowe rzędu n i m. Znalezienie wszystkich rozwiązań $\phi: H(n,R) \to GL(m,R)$ równania (4), spełniających warunek (5), jest równoznaczne z wyznaczeniem w danej geometrii wszystkich obiektów liniowych jednorodnych o prawie transformacji (3).

Jednym z ważniejszych problemów każdej geometrii Kleina jest wyznaczenie obiektów geometrycznych. Z uwagi na to, że w praktyce posługujemy się głównie obiektami liniowymi jednorodnymi o prawie transformacji (3), wyznaczenie wszystkich takich obiektów zaliczyć można do podstawowych problemów każdej geometrii. Poszukiwaniem tego typu obiektów liniowych geo-

metrii afinicznej zajmowali się między innymi S. Gołąb, M. Kucharzewski, M. Kuczma i A. Zajtz. Spis literatury oraz dokładne omówienie uzyskanych do tej pory rezultatów można znaleźć w skrypcie [3].

Celem niniejszej pracy jest znalezienie wszystkich obiektów liniowych jednorodnych n-wym. geometrii dps. Metoda tutaj przedstawiona polega na sprawdzeniu tego problemu do analogicznego, rozwiązanego już, problemu wyznaczania takich obiektów w ( ·1)-wym. geometrii afinicznej.

1. Na wstępie podamy przykłady rozważanych obiektów liniowych

Definicja

Abstrakcyjny obiekt geometryczny geometrii (1) o włóknie $\mathcal{M} = R$ i prawie transformacji

$$F(\sigma,g) = \varphi(\mathrm{Det}\ A)\sigma, \quad \sigma \in R, \quad g = (A,a) \subset GH(n,R), \tag{1.1}$$

gdzie

$$\varphi(t) = |t|^p, \tag{1.2}$$

względnie

$$\varphi(t) = (\mathrm{sgn}\ t)\ .\ |t|^p, \tag{1.3}$$

nazywamy odpowiednio W-gęstością lub G-gęstością o wadzie (-p).

W niektórych zagadnieniach celowe jest posługiwanie się uogólnionymi gęstościami, które określamy następująco

Definicja

Przez gęstość uogólnioną rozumiemy obiekt (R,GH(n,R), F), którego prawo transformacji ma postać (1.1), gdzie $\varphi : R \to \{0\} \to R$ jest funkcją multiplikatywną (tzn. spełniającą warunek $\varphi(t_2 t_1) = \varphi(t_2)\varphi(t_1)$ dla dowolnych $t_1, t_2 \in R-\{0\}$), dla której $\varphi(1)=1$.

Funkcja $\varphi$ nie musi być mierzalną. Założenie mierzalności tej funkcji prowadzi do postaci (1.2) i (1.3) (p. [1], s. 48). Przykładami obiektów liniowych jednorodnych o n składowych są abstrakcyjne wektory kontrawariantny oraz kowariantny.

Definicja

Abstrakcyjnym wektorem kontrawariantnym (kowariantnym) geometrii (1) nazywamy obiekt (2) o włóknie $\mathcal{M} = R^n$ i prawie transformacji

$$F(u,g) = Au, \quad u \in R^n, \quad (F(\xi,g) = \xi A^{-1}, \quad \xi \in R^n),$$

gdzie $g = (A,a)$, $A \in H(n,R)$. W zapisie powyższym symbole u oraz $\xi$ oznaczają odpowiednio macierz jednokolumnową $[u^i]$ i macierz jednowierszową $[\xi_i]$.

Przy pomocy danych obiektów geometrycznych można utworzyć pewne inne obiekty. Jednym z nich jest produkt obiektów. Ogólną definicję produktu

można znaleźć w pracy [2], s. 386. My ograniczymy się do następującego przypadku szczególnego.

Definicja

Produktem wektorów kontrawariantnego i kowariantnego w geometrii (1) nazywamy obiekt, którego włóknem jest zbiór $R^n \times R^n$ i którego prawo transformacji wyraża się wzorem

$$F(u,\xi,g) = (Au,\xi A^{-1}), \quad \text{gdzie} \quad A \in H(n,R).$$

2. Zanim przystąpimy do wyznaczania obiektów liniowych geometrii dps udowodnimy pewien lemat.

W tym celu określimy, znane z algebry oraz z teorii obiektów geometrycznych, pojęcie grupy stabilności (por. [3], s. 75).

Definicja

Grupą stabilności obiektu (2) w punkcie $\omega_0 \in \mathcal{M}$ nazywamy podgrupę grupy $GH(n,R)$, której elementami są wszystkie elementy $g \in GH(n,R)$, spełniające równanie $F(\omega_0,g) = \omega_0$.

Jak wiadomo z teorii obiektów geometrycznych (por. [3], s. 76) grupy stabilności w punktach tego samego włókna tranzytywnego są sprzężone, co oznacza, że zachodzi implikacja

$$\left(\bigvee_{g_0 \in GH} \omega_1 = f(\omega_0,g_0)\right) \Rightarrow G_1 = g_0 G_0 g_0^{-1}, \tag{2.1}$$

gdzie $G_1$ i $G_0$ oznaczają grupy stabilności odpowiednio w punktach $\omega_1$ i $\omega_0$. Przyjmijmy teraz następujące oznaczania

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = [1 \ldots 1], \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n \end{bmatrix}, \quad \bar{\xi} = [0 \ldots 0 \ 1],$$

i rozważmy produkt wektorów kontrawariantnego i kowariantnego w n-wym. geometrii afinicznej. Łatwo zauważyć, że grupą stabilności tego obiektu w punkcie $(e,\varepsilon)$ jest grupa $GDS(n,R)$, elementami której są pary $(A,a)$, gdzie $A \subset DS(n,R)$. Podobnie, grupę stabilności rozważanego obiektu w punkcie $(\bar{u},\bar{\xi})$ jest grupa o elementach postaci $(\bar{X},a)$, gdzie

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad X \in GL(n-1,R). \tag{2.2}$$

Grupę tę oznaczmy przez $G_0(n,R)$, zaś podgrupę ogólnej grupy liniowej $GL(n,R)$ - złożoną z macierzy (2.2) - przez $\overline{GL}(n,R)$.

Bezpośrednia rachunkiem można łatwo sprawdzić, że następująca macierz kwadratowa n -tego stopnia $(n \geq 2)$ $Q = [q_{ij}]$, gdzie

$$q_{ij} = \begin{cases} -\delta_{ij} & \text{dla } i,j=1,2,\dots,n-1 \\ 1 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \qquad (\delta_{ij} \text{ - symbol Kroneckera}) \tag{2.3}$$

spełnia związki

$$Qe = \bar{u}, \quad \bar{\xi}Q = \varepsilon, \quad \mathrm{Det}\, Q = (-1)^{n+1} n \neq 0.$$

Zatem $g_0 = (Q,0)$ jest elementem grupy, na której oparta jest n-wym. geometria afiniczna, takim że $(\bar{u},\bar{\xi}) = F(e,\varepsilon,g_0)$. Stąd na mocy (2.1) grupy stabilności $G_0(n,R)$ oraz $GDS(n,R)$ są sprzężone, tzn.

$$G_0(n,R) = g_0 \,.\, GDS(n,R) \,.\, g_0^{-1}.$$

Z powyższego związku otrzymujemy natychmiast następujący lemat.

Lemat

Podgrupy $\overline{GL}(n,R)$ i $DS(n,R)$ ogólnej grupy liniowej są sprzężone, tj. $\overline{GL}(n,R) = Q.DS(n,R).Q^{-1}$, gdzie Q jest macierzą określoną związkami (2.3).

3. Jak wiemy z rozważań przeprowadzonych we wstępie, wyznaczenie w geometrii dps wszystkich obiektów liniowych jednorodnych o m składowych i prawie transformacji (3) sprowadza się do wyznaczenia wszystkich rozwiązań $\phi : DS(n,R) \longrightarrow GL(m,R)$ równania (4), spełniających warunek (5). Ponieważ w myśl udowodnionego lematu dowolną macierz $A \in DS(n,R)$ możemy przedstawić w postaci iloczynu $A = Q^{-1}\,\bar{X}Q$, gdzie $\bar{X}$ jest określona związkiem (2.2) zaś Q jest macierzą stałą, więc poszukiwana funkcja $\phi$ ma postać

$$\phi(A) = \phi^*(X), \quad X \subset GL(n-1,R), \tag{3.1}$$

gdzie: $\phi^* : GL(n-1,R) \longrightarrow GL(m,R)$ jest dowolnym rozwiązaniem równania

$$\phi^*(YX) = \phi^*(Y)\ \phi^*(X), \tag{3.2}$$

spełniającym warunek

$$\phi^*(E_{n-1}) = E_m. \tag{3.3}$$

Tak więc z podanego w punkcie 2 lematu wynika

Twierdzenie 1

Każde rozwiązanie $\phi : DS(n,R) \longrightarrow GL(m,R)$ równania (4), spełniające warunek (5), wyraża się wzorem (3.1), gdzie $\phi^* : GL(n-1,R) \longrightarrow GL(m,R)$ jest dowolną funkcją, która spełnia równanie multiplikatywne (3.2) i warunek (3.3), przy czym macierze X oraz A związane są zależnością

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = QAQ^{-1} \tag{3.4}$$

Jak już zaznaczyliśmy we wstępie równanie (3.2) zostało w ogólnym przypadku rozwiązane przez A. Zajtza. Zatem w oparciu o twierdzenie 1 potrafimy wyznaczyć w geometrii dps wszystkie obiekty liniowe jednorodne o prawie transformacji (3). Z uwagi na to, że w przypadku ogólnym postać rozwiązań równania (3.2) jest skomplikowana, nie będziemy podawać kształtu wszystkich obiektów liniowych. Dla przykładu wyznaczymy tylko obiekty liniowe o jednej składowej. Skorzystamy przy tym z następującego twierdzenia udowodnionego przez M. Kucharzewskiego i A. Zajtza w pracy [5].

Twierdzenie 2

Każde rozwiązanie $\phi^*:GL(n,R) \to GL(m,R)$ równania (3.2), dla $m < n$, spełniające warunek $\phi^*(E_n) = E_m$, zależy tylko od wyznacznika $\Delta = \mathrm{Det}\, X$, tzn. wyraża się wzorem $\phi^*(X) = \mu(\Delta)$, gdzie $\mu: R-\{o\} \to GL(m,R)$ jest dowolną funkcją macierzową stopnia m zmiennej rzeczywistej, która spełnia równanie multiplikatywne $\mu(\eta\xi) = \mu(\eta)\mu(\xi)$ i warunek $\mu(1) = E_m$.

Zauważmy, że ze związku (3.4) wynika $\mathrm{DET}\, X = \mathrm{Det}\, A$. Stąd oraz z twierdzeń 1 i 2 otrzymujemy natychmiast

Twierdzenie 3

W n-wym. geometrii dps (dla $n \geqslant 3$) każdy liniowy jednorodny obiekt o jednej składowej i prawie transformacji (3) jest gęstością uogólnioną.

LITERATURA

[1] Aczel J.: Vorlesungen uber Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1961.

[2] Jasińska E.J., Kucharzewski M.: Grundlegende Begriffe der Kleinschen Geometrie, Demonstratio Math. 3 (1974), 381-402.

[3] Kucharzewski M.: Elementy teorii obiektów geometrycznych, Katowice 1969.

[4] Kucharzewski M., Szociński B.: Über eine kanonische Form der regulären doppelt pseudostochastischen Matrizen, Prace Naukowe U.Śl. Prace Mat. IV (1973), 35-43.

[5] Kucharzewski M., Zajtz A.: Über die linearen homogenen geometrischen Objekte des Typus [m,n,1], wo $m < n$ ist, Ann. Polon. Math. 17 (1966) 205-225.

[6] Szociński B.: Niezmienniki pary punktów geometrii podwójnie pseudostochastycznej, Zeszyty Naukowe Pol.Śl., Mat.-Fiz. 24 (1974), 24-36.

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ОБЪЕКТЫ ВДВОЙНЕ ПСЕВДОСЛУЧАЙНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Р е з ю м е

В этой работе подано общий метод определения линейных однородных объектов о п-компонентах вдвойне псевдослучайной геометрии. Для того чтобы проиллюстрировать этот метод вычислено все линейные однородные объекты с одной компонентной.

HOMOGENEOUS LINEAR OBJECTS OF DOUBLY PSEUDOSTOCHASTIC GEOMETRY

S u m m a r y

In this paper there is given the general method of determining of the linear objects with n components is doubly pseudostochastic geometry. To illustrate this method there are determined all homogeneous linear objects with one component.