ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 30 Nr kol. 560

Eugeniusz ZAPOROWSKI

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI KATEGORII OBIEKTÓW ABSTRAKCYJNYCH

Streszczenie. Celem tej pracy jest kategoryjne ujęcie teorii obiektów abstrakcyjnych przedstawionej w [1], [2].

1. PODSTAWOWE DEFINICJE

O b i e k t e m   a b s t r a k c y j n y m nazywamy trójkę (X,G,f), gdzie X jest zbiorem, G - grupą, f - działaniem grupy na zbiorze, tzn. funkcję

$$f : X \times G \to X \tag{1.1}$$

o własnościach:

$$f(f(x,g_1), g_2) = f(x,g_2 \cdot g_1) \tag{1.2}$$

$$f(x,e) = x, \tag{1.3}$$

e - element neutralny G.
Zbiór X nazywamy w ł ó k n e m   o b i e k t u   a b s t r a k c y j n e g o (X,G,f). Gdy działanie f jest e f e k t y w n e, tzn. spełnia warunek

$$\left(\bigwedge_{x\in X} f(x,g) = x\right) \to g = e \tag{1.4}$$

to wtedy obiekt abstrakcyjny nazywamy g e o m e t r i ą   K l e i n a.

W ł ó k n e m   t r a n z y t y w n y m (orbitą) obiektu abstrakcyjnego (X,G,f) wyznaczonym przez punkt $x_o \subset X$ nazywamy zbiór $W^f_{x_o}$ postaci:

$$W^f_{x_o} = \left\{ f(x_o,g) \mid g \in G \right\}. \tag{1.5}$$

G r u p ą   s t a c j o n a r n ą w punkcie x_o nazywamy grupę G_{x_o} postaci:

$$G_{x_o} = \{g \in G\ f(x_o, g) = x_o\}. \tag{1.6}$$

Działanie f nazywamy w o l n y m, jeżeli w każdym punkcie zbioru X grupa stacjonarna jest trywialna.

K a t e g o r i a $\mathcal{C}$ składa się z:

a) pewnej klasy o b i e k t ó w,

b) zbioru $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ m o r f i z m ó w o dziedzinie A i przeciwdziedzinie B, jeżeli $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, to piszemy $f : A \to B$,

c) funkcji przyporządkowującej każdej uporządkowanej trójce obiektów A, B,C i parze morfizmów $f : A \to B$ i $g : B \to C$ ich z ł o ż e n i e $g \circ f : A \to C$.

Ponadto powinny być spełnione aksjomaty:

Łączność złożenia. Jeżeli $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ są morfizmami, to $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f : A \to D$.

Istnienie morfizmu tożsamościowego. Dla dowolnego obiektu A istnieje morfizm $1_A : A \to A$ taki, że dla dowolnych morfizmów $F : A \to B$ i $g : C \to A$ mamy

$$f \circ 1_A = f \quad i \quad 1_A \circ g = g$$

P o d k a t e g o r i a $\mathcal{C}'$ kategorii $\mathcal{C}$ jest kategorią o własnościach:

a) obiekty $\mathcal{C}'$ są obiektami $\mathcal{C}$,

b) dla dowolnych obiektów A', B' kategorii $\mathcal{C}'$ $Hom_{\mathcal{C}'}(A',B') \subset Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$,

c) jeżeli $f' : A' \to B'$ i $g' : B' \to C'$ są morfizmami w $\mathcal{C}'$, to ich złożenie $g' \circ f' : A' \to C'$ jest złożeniem w $\mathcal{C}$,

d) morfizm tożsamościowy w $\mathcal{C}'$ jest również morfizmem tożsamościowym w $\mathcal{C}$.

W przypadku, gdy dla dowolnych A', B' $Hom_{\mathcal{C}'}(A',B') = Hom_{\mathcal{C}}(A',B')$ mówimy, że podkategoria $\mathcal{C}'$ jest p o d k a t e g o r i ą z u p e ł n ą kategorii $\mathcal{C}$.

Morfizm $f : A \to B$ nazywamy m o n o m o r f i z m e m (e p i m o r f i z m e m), jeżeli dla dowolnych morfizmów $g : X \to A$, $h : X \to A$ $g' : B \to Y$ $h' : B \to Y$ zachodzi implikacja $f \circ g = f \circ h \to g = h$ $(g' \circ f = h' \circ g \to g' = h')$

Morfizm $\bar{f} : B \to A$ nazywamy o d w r o t n y m do morfizmu $f : A \to B$, jeżeli $f \circ \bar{f} = 1_B$ i $\bar{f} \circ f = 1_A$ i oznaczamy f^{-1}. Morfizm $f : A \to B$ nazywamy i z o m o r f i z m e m jeżeli istnieje morfizm odwrotny do niego. Obiekt A nazywamy o b i e k t e m p o c z ą t k o w y m (k o ń c o w y m) kategorii $\mathcal{C}$ jeżeli dla każdego obiektu X zbiór $Hom_{\mathcal{C}}(A,X)$ $(Hom_{\mathcal{C}}(X,A))$ jest jednoelementowy.

Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą dwiema kategoriami.

F u n k t o r e m k o w a r i a n t n y m z $\mathcal{C}$ do $\mathcal{D}$ nazywamy funkcję, która morfizmom kategorii $\mathcal{C}$ przyporządkowuje morfizmy kategorii $\mathcal{D}$: $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ spełniają warunki

) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dla $A \in \mathcal{C}$,

b) jeżeli $f : A \to B$ jest morfizmem w $\mathcal{C}$ to $F(f) : F(A) \to F(B)$,

c) jeżeli $f : A \to B$ i $g : B \to C$ są morfizmami, to $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

2. KATEGORIA OBIEKTÓW ABSTRAKCYJNYCH

Rozważmy dwa obiekty abstrakcyjne (X_i, G_i, f_i) $i = 1,2$. Parę α_1^2, φ_1^2, gdzie α_1^2 jest odwzorowaniem $X_1 \mapsto X_2$ a φ_1^2, homomorfizmem z G_1 do G_2 nazywa się odwzorowaniem ekwiwariantnym obiektu abstrakcyjnego $(X_1\ G_1\ f_1)$ w $(X_2\ G_2\ f_2)$, jeżeli

$$\bigwedge_{g \in G_1} f_2(\cdot, \varphi_1^2(g)) \circ \alpha_1^2 = \alpha_1^2 \circ f_1(\cdot, g) \tag{2.1}$$

lub inaczej: dla każdego $g \in G_1$ diagram

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f_1(\cdot, g)"] \arrow[d, "\alpha_1^2"'] & X_1 \arrow[d, "\alpha_1^2"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2(\cdot, \varphi_1^2(g))"] & X_2 \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

jest przemienny.

<u>Twierdzenie 2.1</u>

Klasa obiektów abstrakcyjnych z odwzorowaniami ekwiwariantnymi jako morfizmami tworzy kategorię.

<u>Dowód</u>

Określamy złożenie morfizmów

$$(\alpha_i^{i+1}, \varphi_i^{i+1}) : (X_i, G_i, f_i) \longrightarrow (X_{i+1}, G_{i+1}, f_{i+1}) \quad i = 1,2$$
$$(\alpha_2^3, \alpha_2^3) \cdot (\alpha_1^2, \varphi_1^2) \stackrel{df}{=} (\alpha_2^3 \circ \alpha_1^2\ \varphi_2^3 \circ \varphi_1^2). \tag{2.3}$$

Łączność tak zdefiniowanego złożenia wynika natychmiast z łączności złożenia dla funkcji i dla homomorfizmu grup. Morfizmem tożsamościowym dla (X, G, f), jak łatwo widać, jest para $(id_X, 1_G)$.

Niech $\mathcal{A}$ oznaczać będzie otrzymaną w ten sposób kategorię. Przez $\mathcal{G}$ oznaczymy kategorię, której obiektami są geometrie Kleina a morfizmami odwzorowania ekwiwariantne. Również wszystkie obiekty abstrakcyjne o działaniu wolnym tworzą kategorię; oznaczmy ją przez $\mathcal{W}$. Podobnie wszystkie obiekty abstrakcyjne o ustalonym zbiorze X lub ustalonej grupie G tworzą kategorie. Oznaczmy je odpowiednio $\mathcal{A}_X$ i $\mathcal{A}_G$. Wszystkie wyżej wymienione kategorie są podkategoriami zupełnymi kategorii $\mathcal{A}$. Wynika to łatwo z określenia tych kategorii i z definicji podkategorii.

3. OBIEKTY POCZĄTKOWE I KOŃCOWE

W kategorii $\mathcal{A}$ obiektem końcowym będzie każdy obiekt abstrakcyjny o włóknie jednoelementowym i grupie trywialnej. Albowiem dla obiektu abstrakcyjnego $(\{x_o\}, \{e\}, \bar{f})$ i dowolnego obiektu (X,G,f) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}((X,G,f),(\{x_o\},\{e\},\bar{f}))$ składa się tylko z pary (α,φ), gdzie $\alpha : X \to x_o$, $\varphi : G \to \{e\}$ są odwzorowaniami stałymi. Innych morfizmów już nie ma. Podobnie będzie w $\mathcal{G}$ i $\mathcal{W}$. Natomiast w $\mathcal{A}_X$ i $\mathcal{A}_G$ nie zawsze istnieją obiekty końcowe. Tylko gdy X jest zbiorem jednoelementowym lub G jest grupą trywialną można mówić o obiektach końcowych w tych kategoriach.

O b i e k t e m p o c z ą t k o w y m w $\mathcal{A}$ będzie obiekt postaci $(\phi, \{e\}, \bar{f})$, gdzie ϕ jest zbiorem pustym a $\bar{f}$ przekształceniem pustym ([3], s. 18). Żądany w definicji obiektu początkowego morfizm ma postać $(\tilde{\phi},\varphi)$: $(\phi,\{e\}, \bar{f}) \to (X,G,f)$, gdzie $\tilde{\phi}$ - jest przekształceniem pustym, $\varphi:\{e\} \to G$. Ten sam obiekt abstrakcyjny będzie obiektem początkowym w kategoriach $\mathcal{G}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{A}_X$, $\mathcal{A}_G$.

4. MONOMORFIZMY, EPIMORFIZMY I IZOMORFIZMY

Twierdzenie 4.1

Morfizm $(\alpha_1^2,\varphi_1^2) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}((X_1,G_1,f_1), (X_2,G_2,f_2))$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1^2 : X_1 \to X_2$ jest iniekcją a $\varphi_1^2 : G_1 \to G_2$ jest monomorfizmem grup.

Dowód

Załóżmy, że α_1^2 jest iniekcją a φ_1^2 monomorfizmem. Niech (β,ψ), (γ, σ) będą dowolnymi morfizmami $(X,G,f) \to (X_1,G_1,f_1)$. Rozważmy

$$(\alpha_1^2, \varphi_1^2) \circ (\beta, \psi) = (\alpha_1^2 \varphi_1^2) \circ (\gamma,\sigma) \tag{4.1}$$

Równość (4.1) jest równoważna równości $(\alpha_1^2 \circ \beta, \varphi_1^2 \circ \psi) = (\alpha_1^2 \circ \gamma, \varphi_1^2 \circ \sigma)$, co oznacza, że $\alpha_1^2 \circ \beta = \alpha_1^2 \circ \gamma \wedge \varphi_1^2 \circ \psi = \varphi_1^2 \circ \sigma$. Tak więc $\beta = \gamma \wedge \psi = \sigma$, czyli $(\beta,\psi) = (\gamma,\sigma)$.

Z równości (4.1) wynika, że $(\beta,\psi) = (\gamma,\sigma)$ co dowodzi, że $(\alpha_1^2, \varphi_1^2)$ jest monomorfizmem. Załóżmy teraz, że zachodzi implikacja

$$(\alpha_1^2,\varphi_1^2) \circ (\beta,\psi) = (\alpha_1^2,\varphi_1^2) \circ (\gamma,\sigma) \to (\beta,\psi) = (\gamma,\sigma) \tag{4.2}$$

To oznacza, że

$$\alpha_1^2 \circ \beta = \alpha_1^2 \circ \gamma \wedge \varphi_1^2 \circ \psi = \varphi_1^2 \circ \sigma \to \beta = \gamma \wedge \psi = \sigma$$

A więc

$$\alpha_1^2 \circ \beta = \alpha_1^2 \circ \gamma \longmapsto \beta = \gamma \quad \text{i} \quad \varphi_1^2 \circ \sigma = \varphi_1^2 \circ \sigma \longmapsto \psi = \sigma$$

co oznacza, że α_1^2 jest iniekcją a φ_1^2 - monomorfizmem grup.

<u>Twierdzenie 4.2</u>

Morfizm $(\alpha_1^2, \varphi_1^2) \in Hom_{\mathcal{K}}((X_1,G_1,f_1); (X_2,G_2,f_2))$ jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1^2 : X_1 \quad X_2$ jest suriekcją a $\alpha_1^2 : G_1 \longmapsto G_2$ epimorfizmem grup.

<u>Dowód</u> przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia (4.1).

<u>Twierdzenie 4.3</u>

Morfizm $(\alpha_1^2, \varphi_1^2) \in Hom_{\mathcal{K}}((X_1,G_1,f_1), (X_2,G_2,f_2))$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1^2 : X_1 \longmapsto X_2$ jest bijekcją a $\varphi_1^2 = G_1 \longmapsto G_2$ izomorfizmem grup.

<u>Dowód</u>

Aby $(\alpha_2^2, \varphi_1^2)$ był izomorfizmem, musi istnieć morfizm odwrotny $(\alpha_2^1, \varphi_2^1)$: $: (X_2,G_2,f_2) \longrightarrow (X_1,G_1,f_1)$.

To oznacza, że

$$(\alpha_1^2, \varphi_1^2) \circ (\alpha_2^1, \varphi_2^1) = id_{X_2}, 1_{G_2}$$

$$(\alpha_2^1, \varphi_2^1) \circ (\alpha_1^2, \varphi_1^2) = id_{X_1}, 1_{G_1}$$

$$\alpha_1^2 \circ \alpha_2^1 = id_{X_2}, \quad \alpha_2^1 \circ \alpha_1^2 = id_{X_1}, \quad \varphi_2^1 \circ \varphi_1^2 = 1_{G_1}, \quad \varphi_2^1 \circ \varphi_1^2 = 1_{G_1}$$

A więc α_1^2 musi być bijekcją, φ_1^2 - izomorfizmem grup. Z drugiej strony, jeżeli α_1^2 jest bijekcją, φ_1^2 - izomorfizmem grup, to morfizm $((\alpha_1^2)^{-1}, (\varphi_1^2)^{-1})$ jest morfizmem odwrotnym do $(\alpha_1^2, \varphi_1^2)$ a więc $(\alpha_1^2, \varphi_1^2)$ jest izomorfizmem.

5. PEWNE WŁASNOŚCI MORFIZMÓW

<u>Twierdzenie 5.1</u>

Jeżeli $(\alpha_1^2, \varphi_1^2) \in Hom_{\mathcal{K}}((X_1, G_1, f_1), (X_2, G_2, f_2))$ wtedy $\bigwedge_{x_0 \in X_1} \alpha_1^2\left[W_{x_0}^{f_1}\right] \subset W_{\alpha_1^2(x_0)}^{f_2}$. Jeżeli φ_1^2 jest epimorfizmem, wtedy $\bigwedge_{x_0 \in X_1} \alpha_1^2\left[W_{x_0}^{f_1}\right] = W_{\alpha_1^2(x_0)}^{f_2}$.

Dowód

Niech $y \in W^{f_1}_{x_0}$. Wtedy istnieje $g_1 \in G_1$ takie, że $f_1(x_0, g_1) = y$ i $\alpha^2_1(y) = \alpha^2_1[f_1(x_0, g_1)] = f_2[\alpha^2_1(x_0), \varphi^2_1(g_1)]$. Tak więc $\alpha^2_1(y) \in W^{f_2}_{\alpha^2_1(x_0)}$, czyli

$$\alpha^2_1\left[W^{f_1}_{x_0}\right] \subseteq W^{f_2}_{\alpha^2_1(x_0)}. \tag{5.1}$$

Niech teraz φ^2_1 będzie epimorfizmem a $z \in W^{f_2}_{\alpha^2_1(x_0)}$. Wtedy $z = f_2[\alpha^2_1(x_0), g_2]$ dla pewnego $g_2 \in G_2$; $g_2 = \varphi^2_1(g_1)$ dla pewnego $g_1 \in G_1$. Mamy więc $z = f_2[\alpha^2_1(x_0)\ \varphi^2_1(g_1)] = \alpha^2_1[f_1(x_0, g_1)]$, $z \in \alpha^2_1\left[W^{f_1}_{x_0}\right]$.
A zatem

$$W^{f_2}_{\alpha^2_1(x_0)} \subset \alpha^2_1\left[W^{f_1}_{x_0}\right]. \tag{5.2}$$

Związki (5.1) i (5.2) dają nam dowód drugiej części twierdzenia.

Twierdzenie 5.2

Jeżeli $(\alpha^2_1, \varphi^2_1) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}((X_1, G_1, f_1), (X_2, G_2, f_2))$, wtedy $\bigwedge_{x_0 \in X_1} \varphi^2_1\left[G^{f_1}_{x_0}\right]$ jest podgrupą stacjonarną grupy stacjonarnej $G^{f_2}_{\alpha^2_1(x_0)}$.

Dowód

$\varphi^2_1\left[G^{f_1}_{x_0}\right]$ jest podgrupą G_2, jako obraz grupy poprzez homomorfizm φ^2_1. Niech $g_2 \in \varphi^2_1\left[G^{f_1}_{x_0}\right]$. Istnieje $g_1 \in G^{f_1}_{x_0}$, że $\varphi^2_1(g_1) = g_2$. Otrzymujemy następującą równość: $f_2[\alpha^2_1(x_0), g_2] = f_2[\alpha^2_1(x_0), \varphi^2_1(g_1)] = \alpha^2_1[f_1(x_0, g_1)] = \alpha^2_1(x_0)$, która dowodzi, że

$$\varphi^2_1\left[G^{f_1}_{x_0}\right] \subset G^{f_2}_{\alpha^2_1(x_0)} \tag{5.3}$$

a więc $\varphi^2_1\left[G^{f_1}_{x_0}\right]$ jest podgrupą stacjonarną grupy stacjonarnej $G^{f_2}_{\alpha^2_1(x_0)}$.

Twierdzenie 5.3

Jeżeli $(\alpha^2_1, \varphi^2_1) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}((X_1, G_1, f_1), (X_2, G_2, f_2))$, α^2_1 - iniekcja, φ^2_1 - izomorfizm, wtedy grupy $G^{f_1}_{x_0}$ i $G^{f_2}_{\alpha^2_1(x_0)}$ są izomorficzne dla dowolnego $x_0 \in X_1$.

Dowód

Wystarczy wykazać, że $\varphi_1^2\left[G_{x_0}^{f_1}\right] = G^{f_2}_{\alpha_1^2(x_0)}$. Niech $x_0 \in X_1$ $g_2 \in G^{f_2}_{\alpha_1^2(x_0)}$. Stąd $\exists|_{g_1 \in G_1}\ \varphi_1^2(g_1) = g_2$ i $\alpha_1^2(x_0) = f_2\left[\alpha_1^2(x_0), g_2\right] = \alpha_1^2\left[f_1(x_0,g_1)\right]$. Z iniektywności α_1^2 otrzymujemy $f_1(x_0,g_1) = x_0$ a więc $g_1 \in G^{f_1}_{x_0}$. Tak więc $G^{f_2}_{\alpha_1^2(x_0)} \subset \varphi_1^2\left[G^{f_1}_{x_0}\right]$. Stąd i z (5.3) otrzymujemy tezę twierdzenia 5.3.

6. PRZYKŁAD FUNKTORA KOWARIANTNEGO

Niech (X,G,f) będzie dowolnym obiektem $\mathcal{A}$. H niech będzie podgrupą niezmienniczą G, tzn. $H = \left\{g \in G \,\middle|\, \bigwedge_{x \in X} f(x,g) = x\right\}$. Zdefiniujemy $\bar{f}: X \times G/H \mapsto X$, następująco: $\bar{f}(x,[g] = f(x,g)$. Otrzymaliśmy nowy obiekt abstrakcyjny $(X, G/H, \bar{f})$. Jest to geometria Kleina, ponieważ $\bigwedge_{x\in X} \bar{f}(x,[g]) = x \longleftrightarrow \bigwedge_{x \in X} f(x,g) = x \longleftrightarrow g \in H \mapsto [g]$ jest elementem neutralnym w G/H.

Definiujemy funkcję $F: \mathcal{A} \mapsto \mathcal{G}$

$$F(X,G,f) = (X\ G/H,\ \bar{f})$$

$$F(\alpha_1^2,\ \varphi_1^2) = (\alpha_1^2, [\varphi_1^2]),$$

gdzie $(\alpha_1^2, \varphi_1^2) \in Hom_{\mathcal{A}}\ ((X_1,G_1,f_1),\ (X_2,G_2,f_2))$, $[\varphi_1^2][g] = [\varphi_1^2(g)]$.

$$F(id_X,\ 1_G) = (id_X\ [1_G]) = (id_X,\ 1_{G/H}).$$

Niech $(\alpha_2^3,\ \varphi_2^3) \in Hom_{\mathcal{A}}\left[(X_2,G_2,f_2),\ (X_3,G_3,f_2)\right]$

$$F\left[(\alpha_2^3,\varphi_2^3) \circ (\alpha_1^2,\varphi_1^2)\right] = F(\alpha_2^3 \circ \alpha_1^2,\ \varphi_2^3 \circ \varphi_1^2) = (\alpha_2^3 \circ \alpha_1^2, \left[\varphi_2^3 \circ \varphi_1^2\right]) =$$

$$= (\alpha_2^3 \circ \alpha_1^2,\ [\varphi_2^3] \circ [\varphi_1^2]) = (\alpha_2^3, [\varphi_2^3]) \circ (\alpha_1^2, [\varphi_1^2]) = F(\alpha_2^3,\ \varphi_2^3) \circ F(\alpha_1^2,\ \varphi_1^2).$$

Tak więc funkcja F jest funktorem kowariantnym. Funktor ten nazwiemy funktorem tworzenia geometrii Kleina.

LITERATURA

[1] Jasińska E.J. und Kucharzewski M.: Kleinische Geometrie und Theorie der Geometrischen Objekte. Coll. math. XXVI (1972), 271-279.

[2] Jasińska E.J. und Kucharzewski M.: Grundlegende Begriffe der Kleinischen Geometrie. Dem.Math. VII(3) 1974, 381-402.

[3] Semadeni Z., Wiweger A.: Wstęp do teorii kategorii i funktorów. PWN, Warszawa 1972.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КАТЕГОРИЙ АБСТРАКЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ

Р е з ю м е

Целью этой работы является охват категорий теории абстракционных объектов, представленных в [1], [2].

BASIC PROPERTIES OF THE CATEGORY OF ABSTRACT OBJECTS

S u m m a r y

The purpose of this work is the categoric formulation of the theory of abstract objects presentend in [1], [2].