ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 30 Nr kol. 560

Andrzej CZECHOWSKI

REGULARNE ROZWIĄZANIA RÓWNANIA SCHRÖDERA

Streszczenie. W pracy podano dowód istnienia i jednoznaczności rozwiązania klasy C^1 równania Schrödera. Ponadto oszacowano z góry odległość tego rozwiązania od jego zerowego przybliżenia.

1. WPROWADZENIE

Według Ph. Hartmana [1] zagadnienie linearyzacji autonomicznego układu równań różniczkowych zwyczajnych przedstawia się następująco. Dane są dwa układy n równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego:

$$\frac{dx}{dt} = A\,x + f(x), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = A\,y, \tag{2}$$

gdzie

$x \in R^n$, $y \in R^n$,

A - stała macierz $n \times n$ o wyrazach rzeczywistych,

$f : R^n \longrightarrow R^n$,

$f(x) = o\,(\|x\|)$ przy $x \longrightarrow 0$.

Linearyzacja polega na tym, że istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie topologiczne otoczenia punktu $x = 0$ na otoczenie punktu $y = 0$, przy którym rozwiązania jednego układu przechodzą w rozwiązania drugiego układu. Rozważania Hartmana oparte są na pracach S. Sternberga [2] i [3], rozpatrujących homeomorfizmy przestrzeni euklidesowych. Zagadnienie linearyzacji w takim ujęciu było również rozpatrywane przez D.M. Grobmana w [4].

Jeśli warunki początkowe układów (1) i (2) są odpowiednio

$$x(0) = x_0, \tag{1a}$$

$$y(0) = y_0, \tag{2a}$$

to rozwiązaniem układu (1, 1a) jest $x(t) = x(t;\ x_0)$, a układu (2, 2a) $y(t) = y(t;\ y_0)$. Przy ustalonym t, $x(t)$ jest obrazem odwzorowania $T^t : x_0 \to x(t)$, a $y(t)$ - odwzorowania $L^t : y_0 \to y(t)$. Przy zmiennym t odwzorowania T^t i L^t tworzą dwie rodziny odwzorowań. Zagadnienie linearyzacji sprowadza się do znalezienia wzajemnie jednoznacznego odwzorowania R, odwzorowującego otoczenie punktu x=0 na otoczenie punktu y=0 tak, aby $R\ T^t\ R^{-1} = L^t$. Podany w [1] dowód istnienia odwzorowania R składa się z dwóch części. Najpierw wykazano istnienie odwzorowania R_0 takiego, że

$$R_0\ T^1\ R_0^{-1} = L^1 \tag{3}$$

a następnie pokazano, że

$$R = \int_0^1 L^{-s}\ R_0\ T^s\ ds$$

jest szukanym odwzorowaniem.

Ponieważ rozwiązaniem układu (2,2a) jest

$$y(t) = e^{At}\ y_0,$$

więc

$$L^1(y_0) = \Gamma y_0,$$

gdzie

$$\Gamma = e^A$$

i wtedy (3) daje się przekształcić do postaci

$$R_0\ T^1 = \Gamma R_0. \tag{4}$$

Równanie (4) jest uogólnionym równaniem Schrödera [5], [6]. Dalej przyjęto, że uogólnione równanie Schrödera ma postać [6]:

$$g[f(x)] = S \cdot g(x), \tag{5}$$

gdzie $g(x)$ oznacza szukaną funkcję, a funkcja $f(x)$ oraz stała macierz rzeczywista S są dane.

W [6] M. Kuczma wykazał istnienie rozwiązania klasy C^r $(r \geqslant 1)$ równania (5). W niniejszym artykule podany jest dowód tego twierdzenia dla przypadku $r = 1$. Dzięki przyjęciu tego założenia, dowód twierdzenia, aczkolwiek prowadzony metodą podobną jak w [6], jest prostszy i łatwy w interpretacji. Ponadto oszacowano z góry odległość rozwiązania równania (5) od zerowego przybliżenia tego rozwiązania.

1.1. Przyjęte oznaczenia

Użyto następujących oznaczeń

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)' \in R^n$,

f, g, h - funkcje $R^n \to R^n$,

$f(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))'$

Różniczkowanie funkcji względem i-tej składowej wektora x oznaczono przez ∂_i:

$$\partial_i f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_i} \right)'$$

Macierz Jacobiego funkcji $f(x)$ w punkcie x oznaczona jest przez $\partial f(x)$:

$$\partial f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left[\partial_1 f(x) \ldots \partial_n f(x)\right].$$

Dla $x \in R^n$ symbol $\|x\|$ oznacza normę euklidesową:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dla macierzy kwadratowej n x n o wyrazach rzeczywistych norma została zdefiniowana jako norma odwzorowania liniowego $R^n \to R^n$:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\|.$$

Identycznie zdefiniowano normę dla macierzy Jacobiego w punkcie x. Macierz jednostkową oznaczono przez I.
Układ wektorów kolumnowych n-wymiarowych $\{v_i\}$ $(i = 1,\ldots,n)$ spełniających równanie

$$S\,V = V\,S \tag{6}$$

gdzie

$$V = [v_1 \ldots v_n] \tag{7}$$

nazywa się układem wektorów dopuszczalnych. Łatwo sprawdzić, że jeśli $g(x)$ jest rozwiązaniem równania (5), to wektory

$$v_i = \partial_i\, g(x)\Big|_{x=0} \qquad i = 1,\ldots,n \tag{8}$$

tworzą układ wektorów dopuszczalnych.

2. ROZWIĄZANIE RÓWNANIA SCHRÖDERA

Niech funkcja $f(x)$, określona i klasy C^1 w otoczeniu zera, spełnia warunek

$$f(0) = 0. \tag{9}$$

Wartości własne macierzy

$$S = \partial f(x)\Big|_{x=0}, \tag{10}$$

oznaczone jako σ_i $(i = 1,\dots,n)$ spełniają warunek

$$0 < |\sigma_1| \leqslant \dots \leqslant |\sigma_n| < 1. \tag{11}$$

Ponadto niech

$$\partial_i f(x) = \partial_i f(0) + O(\|x\|^{\delta}) \qquad x \to 0,\ 0 < \delta \leqslant 1,\ i=1,\dots,n. \tag{12}$$

Jeśli zachodzi

$$\frac{|\sigma_n|^{1+\delta}}{|\sigma_1|} < 1 \tag{13}$$

to dla każdego układu wektorów dopuszczalnych, równanie (5) ma jednoznaczne rozwiązanie określone i klasy C^1 w otoczeniu zera, spełniające (8) i

$$\partial_i g(x) = \partial_i g(0) + O(\|x\|^{\delta}), \qquad x \to 0,\ 0 < \delta \leqslant 1,\ i = 1,\dots,n. \tag{14}$$

<u>Dowód</u>

Bez zmniejszania ogólności można przyjąć, że

$$\|S\|^{1+\delta}\|S^{-1}\| < 1. \tag{15}$$

Uzasadnienie tego stwierdzenia jest następujące. Jeśli (15) nie zachodzi, to zamiast równania (5) należy rozpatrywać równanie

$$g^*\left[f^*(x)\right] = S^* \circ g^*(x), \tag{16}$$

gdzie

$S^* = T^{-1} S T$,

$f^*(x) = T^{-1} \circ f[T(x)]$,

$g^*(x) = T^{-1} \circ g[T(x)]$.

Na podstawie Lematu (Dodat ⁎ i warunku (13) istnieje macierz T taka, że

$$\|S^*\|^{1+\delta}\|S^{*-1}\| < 1.$$

Ponieważ $\|S\| \cdot \|S^{-1}\| \geqslant 1$, więc z (15) wynika, że

$$\|S\| < 1.$$

Niech α będzie takie, że $\|S\| < \alpha < 1$ oraz

$$\alpha^{1+\delta}\|S^{-1}\| < 1. \tag{17}$$

Wtedy dla dostatecznie małych $\|x\|$ jest

$$\|f(x)\| \leqslant \alpha \|x\| \tag{18}$$

$$\|\partial f(x)\| \leqslant \alpha. \tag{19}$$

Niech $\eta > 0$ będzie takie, że f(x) jest określona i klasy C^1 w $\Delta_\eta = \{x : \|x\| \leqslant \eta\}$ a relacje (18) i (19) zachodzą w Δ_η. Dla ustalonego układu wektorów dopuszczalnych $\{v_i\}$ zdefiniowana jest przestrzeń D wszystkich funkcji określonych i klasy C^1 w Δ_η, znikających w zerze i spełniających warunki (8) i (14). W D wprowadzona jest metryka

$$\varrho(g,h) = \sup_{0<\|x\| \leqslant \eta} \left\{ \|x\|^{-\delta}\|\partial g(x) - \partial h(x)\|\right\} \tag{20}$$

Przestrzeń (D, ϱ) jest przestrzenią zupełną. Istotnie, niech ciąg $\{g_n\}$ będzie podstawowym w (D, ϱ). Zachodzi więc

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\beta\in R} \bigwedge_{m,n>\beta} \varrho(g_m, g_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Korzystając z twierdzenia o wartości średniej zastosowanego dla funkcji $g_m(x) - g_n(x)$:

$$\|g_m(x)-g_n(x)\| \leqslant \|x\| \sup_{0<\|y\| \leqslant \|x\|} \|\partial g_m(y) - \partial g_n(y)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x\|^{1+\delta} \sup_{0<\|y\|\leqslant\|x\|} \left\{\|y\|^{-\delta} \|\partial g_m(y) - \partial g_n(y)\|\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\eta^{1+\delta}.$$

Przyjmując $\eta < 1$ mamy

$$\|g_m(x) - g_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A więc

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{\beta\in R}\ \bigwedge_{m,n>\beta}\ \bigwedge_{x\in\Delta_\eta} \|g_m(x) - g_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

a to oznacza, że ciąg $\{g_n(x)\}$ spełnia jednostajnie warunek Cauchy'ego.

Dla ciągu pochodnych zachodzi (przy $m,n > \beta$):

$$\sup_{0<\|x\|\leqslant\eta} \|\partial g_m(x) - \partial g_n(x)\| \leqslant \eta^\delta \quad \varrho(g_m, g_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A więc ciąg funkcji i ciąg pochodnych spełniają w Δ_η jednostajnie warunek Cauchy'ego. Wynika stąd jednostajna zbieżność ciągu funkcji i ciągu pochodnych odpowiednio do $g_o(x)$ i $\partial g_o(x)$. Ponieważ dla każdego $x\in\Delta_\eta - \{0\}$, przy odpowiednio dużych m i n zachodzi

$$\|x\|^{-\delta}\|\partial g_m(x) - \partial g_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

więc przechodząc do granicy przy $m\to\infty$ jest

$$\bigwedge_{x\in\Delta_\eta-\{0\}} \|x\|^{-\delta}\|\partial g_n(x) - \partial g_o(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

A zatem dla dostatecznie dużego n zachodzi

$$\varrho(g_n, g_o) < \varepsilon$$

Ponieważ każdy wyraz ciągu $\{g_n\}$ spełnia (8), więc i granica g_o także spełnia ten warunek.

Na podstawie (14) istnieje taka stała M_n, że

$$\|\partial_i g_n(x) - \partial_i g_n(0)\|\ \|x\|^{-\delta} \leqslant M_n \quad \text{dla } x\to 0.$$

Ponieważ

$$\|\partial_i g_n(x) - \partial_i g_o(x)\|\ \|x\|^{-\delta} \leqslant \varrho(g_n, g_o),$$

więc dla odpowiednio dużego n prawdziwe jest oszacowanie

$$\|\partial_i g_o(x) - \partial_i g_o(0)\|\ \|x\|^{-\delta} < \varepsilon + M_n \quad \text{dla } x\to 0,$$

a to oznacza, że

$$\partial_i g_o(x) = \partial_i g_o(0) + O(\|x\|^\delta) \quad \text{dla } x\to 0.$$

W ten sposób została wykazana zupełność przestrzeni (D, ϱ).

W przestrzeni (D, ϱ) zostaje wprowadzona transformacja

$$Z(g)(x) = S^{-1}\, g \circ f(x). \tag{21}$$

Obrazy funkcji g, h po dokonaniu odwzorowania (21) oznaczone są odpowiednio przez $\bar{g}$ i $\bar{h}$. Ponieważ $g(0) = 0$, więc i $\bar{g}(0) = 0$. W otoczeniu zera $\bar{g}(x) \in C^1$ jako złożenie funkcji klasy C^1. Oznaczając analogicznie do (8)

$$\bar{v}_i = \partial_i\, \bar{g}(0),$$

można pokazać, że

$$\bar{V} = V,$$

gdzie

$$\bar{V} = \left[\bar{v}1 \;\ldots\; \bar{v}_n\right].$$

W odpowiednio małym otoczeniu zera prawdziwe jest oszacowanie

$$\|\partial_i\, \bar{g}(x) - \partial_i\, \bar{g}(0)\| \le \|S^{-1}\| \left[\left\|\partial g(y)\Big|_{y=f(x)} - \partial g(y)\Big|_{y=f(0)}\right\| \cdot \|\partial_i f(x)\| + \right.$$

$$\left. + \left\|\partial g(y)\Big|_{y=0}\right\| \cdot \|\partial_i\, f(x) - \partial_i\, f(0)\|\right].$$

Ponieważ zachodzi (12), a ponadto funkcje należące do D spełniają (14), więc istnieją takie stałe β_1 i β_2, że dla odpowiednio małych $\|x\|$ zachodzi

$$\|\partial_i\, f(x) - \partial_i\, f(0)\| \le \beta_1 \|x\|^{\delta} \qquad i=1,\ldots,n$$

$$\|\partial g(x) - \partial g(0)\| \le \beta_2 \|x\|^{\delta}.$$

(18) i (19) dają

$$\|\partial_i\, \bar{g}(x) - \partial_i\, \bar{g}(0)\| \le \|S^{-1}\| \left\{\beta_2\, \alpha^{1+\delta} + \beta_1 \left\|\partial g(y)\Big|_{y=0}\right\|\right\} \cdot \|x\|^{\delta}$$

a to oznacza, że

$$\partial_i\, \bar{g}(x) = \partial_i\, \bar{g}(0) + O(\|x\|^{\delta}) \qquad i=1,\ldots,n, \qquad x \to 0.$$

Powyższe rozważania wykazują, że transformacja Z jest odwzorowaniem $D \to D$. Z oszacowania

$$\varrho(\bar{g}, \bar{h}) = \sup_{0<\|x\|\leq\eta} \left\{ \|x\|^{-\delta} \, \partial\bar{g}(x) - \partial\bar{h}(x) \right\} \leq$$

$$\leq \|S^{-1}\| \sup_{0<\|x\|\leq\eta} \left\{ \frac{\|f(x)\|^{\delta}}{\|x\|^{\delta}} \|f(x)\|^{-\delta} \|\partial f(x)\| \; \| \partial g\left[f(x)\right] -\right.$$

$$\left. - \partial h\left[f(x)\right]\| \right\} \leq \|S^{-1}\| \, \alpha^{1+\delta} \; . \; \varrho(g, h).$$

Tak więc

$$\varrho(\bar{g}, \bar{h}) \leq \Theta \; . \; \varrho(g, h), \tag{22}$$

przy czym

$$\Theta = \|S^{-1}\| \, \alpha^{1+\delta}. \tag{23}$$

Na podstawie (17) Z jest operacją zwężającą. Istnieje więc punkt stały g operacji Z, będący rozwiązaniem równania (5) i spełniający warunki (8) i (14). Rozwiązanie równania (5) można efektywnie uzyskać, stosując metodę kolejnych przybliżeń:

$$g_n(x) = S^{-n} \, g_o \circ f^n(x), \qquad n=1,2,\ldots \tag{24}$$

gdzie g_o jest zerowym przybliżeniem rozwiązania, spełniającym warunki (8) i (14), a f^n oznacza n-tą iterację funkcji f. Z (24) wynika, że rozwiązanie, którego istnienie zostało wykazane w otoczeniu Δ_η, może być rozszerzone do obszaru przyciągania zera ([5]), to znaczy do zbioru

$$\left\{ x \in R^n : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0 \right\}$$

Dla ustalonego układu wektorów dopuszczalnych $\{v_i\}$ (czyli dla zadanej macierzy V) rozwiązanie jest jednoznaczne. W najprostszym przypadku, gdy V = I, rozwiązanie jest dane przez

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} S^{-n} \, f^n(x).$$

3. OSZACOWANIE ODLEGŁOŚCI ROZWIĄZANIA OD JEGO ZEROWEGO PRZYBLIŻENIA

Dla dowolnego zadanego układu wektorów dopuszczalnych V, zerowe przybliżenie rozwiązania jest

$$g_o(x) = V\,x. \tag{25}$$

Przez $K(g_0,r)$ oznaczono kulę w przestrzeni (D, ϱ) o środku w g_0 i promieniu r. Jeśli oprócz warunku (22) będzie spełniony warunek

$$\varrho(g_0, Z\, g_0) \leq (1-\theta)r, \tag{26}$$

to rozwiązanie g(x) również będzie należało do kuli $K(g_0, r)$ [7]. Należy więc z góry oszacować $\varrho(g_0, Z\, g_0)$

$$\varrho(g_0, Z\, g_0) = \varrho(V\ x, S^{-1} V f(x)) = \sup_{0<\|x\|\leq\eta} \left\{\|x\|^{-\delta} \|S^{-1} V \partial f(x) - V\|\right\} \leq \|S^{-1} V\| \sup_{0<\|x\|\leq\eta} \left\{\|x\|^{-\delta} \|\partial f(x) - S\|\right\}$$

Ponieważ zachodzi (12), więc istnieją stałe β_i $(i=1,\dots,n)$ takie, że w otoczeniu zera kolumny macierzy $\partial f(x)$ spełniają warunek

$$\|\partial_i f(x) - \partial_i f(0)\| \leq \beta_i \|x\|^{\delta} \qquad i=1,\dots,n.$$

A zatem

$$\varrho(g_0, Z\, g_0) \leq \|S^{-1} V\| \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

Ostatnia nierówność wynika z tego, że dla danej macierzy norma indukowana przez normę euklidesową wektora jest nie większa od normy Erharda-Schmidta.

Jeśli zachodzi

$$r \geq \frac{\|S^{-1} V\| \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\theta} \tag{28}$$

to spełniona jest nierówność (26).

Ponieważ rozwiązanie g należy do kuli $K(g_0, r)$, więc

$$\sup_{0<\|x\|\leq\eta} \left\{\|x\|^{-\delta} \|\partial g(x) - \partial g_0(x)\|\right\} \leq r.$$

Zatem dla $x \in \Delta_\eta$

$$\|\partial g(x) - \partial g_0(x)\| \leq r\|x\|^{\delta}.$$

Jeśli przyjąć

$$r = \frac{\|S^{-1}\ v\|\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\Theta},$$

to

$$\varrho(g,\ g_o) \leq \frac{\|S^{-1}\ v\|\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\Theta}. \tag{29}$$

Nierówność (29) pozwala oszacować z góry odległość rozwiązania równania (5) od zerowego przybliżenia rozwiązania. Z (25) wynika, że

$$\partial g_o(x) = \partial g(0)$$

a więc

$$\|\partial g(x) - \partial g(0)\| \leq r\|x\|^{\delta}, \tag{30}$$

gdzie r jest określone przez (28).
Nierówność (30) jest oszacowaniem normy macierzy Jacobiego rozwiązania równania (5) w otoczeniu zera.

Dodatek

Lemat

Dla macierzy kwadratowej S i dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieją nieosobliwa macierz T oraz liczba rzeczywista $\eta > 0$ takie, że

$$\|T^{-1}\ S\ T\| \leq |\sigma_n| + \varepsilon \tag{i}$$

$$\|T^{-1}\ S^{-1}\ T\| \leq |\sigma_1|^{-1} + \eta \tag{ii}$$

oraz $\eta \to 0$ gdy $\varepsilon \to 0$.
σ_1 i σ_n są jak w (11).
Nierówność (i) była udowodniona przez J. Kordylewskiego [8]. A.M. Ostrowski [9] udowodnił ją dla norm $\|\ \|_1$, $\|\ \|_\infty$. Tutaj będzie podane tylko uzupełnienie do dowodu z [8]. Użyte oznaczenia są jak w [8] (zamiast macierzy A, A^*, Z są odpowiednio S, S^*, T).

$$\|S^*y\| > \big|\|G\ y\| - \|H\ y\|\big|.$$

przy czym

$$\|G\, y\| \geq \min_{t,(a,b)} \left[|t|,\ (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \right] \|y\| = |\sigma_1|\ \|y\|.$$

A zatem dla dostatecznie małego ε

$$\|S^* y\| \geq (|\sigma_1| - \varepsilon)\ \|y\|.$$

Nierówność ta implikuje

$$\|S^{*-1}\, y\| \leq \frac{1}{|\sigma_1| - \varepsilon} \|y\|.$$

Jeśli

$$\eta = \frac{\varepsilon}{|\sigma_1|(|\sigma_1| - \varepsilon)}$$

to

$$\frac{1}{|\sigma_1| - \varepsilon} = \frac{1}{|\sigma_1|} + \eta$$

a to zapewnia, że

$$\|S^{*-1}\| = \|T^{-1}\, S\, T\| \leq \frac{1}{|\sigma_1|} + \eta$$

przy tym $\eta \to 0$ gdy $\varepsilon \to 0$.

LITERATURA

[1] Hartman Ph.: Ordinary differential equations, John Wiley, New York - London - Sydney, 1964 (tłumaczenie rosyjskie: "Mir", Moskwa 1970).

[2] Sterberg S.: Local contractions and a theorem of Poincaré, American Journal of Mathematics, vol. 79, s. 809-824, October 1957.

[3] Sternberg S.: On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space, American Journal of Mathematics, vol. 80, s. 623-632,July 1958.

[4] Grobman D.M.: Topologiczieskaja klassifikacja okriestnostiej osoboj toczki w n-miernom prostranstwie, Matiematiczieskij Sbornik, 56(98), s. 77-94, 1962.

[5] Kuczma M.: Functional equations in a single variable. PWN, Warszawa 1968.

[6] Kuczma M.: Note on linearization, Annales Polonici Mathematici, vol. 29(1974), s, 75-81,

[7] Liusternik L.A., Sobolew W.I.: Elementy funkcjonalnogo analiza, "Nauka", Moskwa 1965.

[8] Kordylewski J.: On continuous solutions of systems of functional equations, Annales Polonici Mathematici, 25(1971), s. 53-83.

[9] Ostrowski A.M.: Solution of equations in Euclidean and Banach spaces, Academic Press, New York - London 1973.

ПРАВИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРОДЕРА

Р е з ю м е

В этой статье доказано существование и единственность решения класса C^1 уравнения Шродера. Кроме того оценивается сверху расстояние этого решения от его нулевого приближения.

REGULAR SOLUTIONS OF THE SCHRÖDER EQUATION

S u m m a r y

In the paper the existence and uniqueness of the C^1 class solution of the Schröder equation is proved. The estimation of the distance between that solution and its null approximation is given in advance.