ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 30 Nr kol. 560

Halina JONDRO

WARIACJE WIELOMIANÓW FABERA I ICH ZASTOSOWANIA DO ZAGADNIEŃ EKSTREMALNYCH W RODZINIE FUNKCJI JEDNOLISTNYCH OGRANICZONYCH

Streszczenie. Praca składa się z dwóch części. W pierwszej części uzyskane zostały wariacje wielomianów Fabera dla funkcji klasy S_1, odpowiadające wariacji zewnętrznej Schiffera, wariacji wewnętrznej Spencera-Schaeffera-Charzyńskiego oraz wariacji Löwnera.

W drugiej części pracy zastosowano wyniki pierwszej części do zbadania funkcji, które realizują maksimum funkcjonału stojącego po lewej stronie nierówności Nehariego-Singha i uzyskano równanie algebraiczne, które muszą spełniać funkcje ekstremalne.

Związki między wielomianami Fabera i funkcjami jednolistnymi znane są od dawna. Wiadomo mianowicie, że współczynniki macierzy Grunsky'ego w rodzinie S funkcji jednolistnych wyrażają się przy pomocy wielomianów Fabera, utworzonych dla odwrotności tych funkcji. Fakt ten posłużył Schifferowi [5] do uzyskania wariacji współczynników macierzy Grunsky'ego przy pomocy wariacji wielomianów Fabera w rodzinie S, a tym samym do uzyskania warunków, jakie muszą spełniać funkcje ekstremalne dla funkcjonałów Grunsky'ego. W przypadku rodziny S_1 funkcji jednolistnych ograniczonych warunki Grunsky'ego zostały wzmocnione i przyjęły postać warunku Nehariego-Singha. Oprócz macierzy Grunsky'ego występuje tam jeszcze jedna macierz, której współczynniki wyrażają się także przy pomocy wielomianu Fabera. Wynika stąd, że również w przypadku funkcji jednolistnych ograniczonych znajomość wielomianu Fabera może posłużyć do uzyskania wariacji funkcjonału stojącego po lewej stronie nierówności Nehariego-Singha, a tym samym do uzyskania informacji o funkcjach ekstremalnych.

W pierwszej części pracy uzyskane zostały wariacje wielomianów Fabera dla odwrotności funkcji klasy S_1, odpowiadające wariacji zewnętrznej Schiffera [7], wariacji wewnętrznej Spencera-Schaeffera-Charzyńskiego [4], [1] oraz wariacji Löwnera [2]. Wzory te są interesujące same przez się i mogą być użyte, jak to zrobił Schiffer w [5], dla funkcji klasy S, do uzyskiwania wariacji różnych funkcjonałów w klasie S_1.

W drugiej części pracy zastosowano wyniki pierwszej części do zbadania funkcji, które realizują maksimum funkcjonału stojącego po lewej stronie nierówności Nehariego-Singha i uzyskano równanie algebraiczne, które mu-

szą spełniać funkcje ekstremalne. Wynik ten pokrywa się z wynikiem O. Tammiego [6] otrzymanym przy zastosowaniu wariacji zewnętrznej w klasie S_1 oraz z wynikiem J. Śladkowskiej [9], otrzymanym przy pomocy wariacji wewnętrznej w klasie S_1.

Niech S_1 będzie klasą funkcji postaci:

$$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots\ldots, \quad b_1 > 0$$

jednolistnych w kole $U = \{|z| < 1\}$, spełniających warunek $|f(z)| < 1$, $z \in U$. Niech $f \in S_1$. Weźmy pod uwagę funkcje

$$M(z,\zeta) = \log \frac{z - \zeta}{f(z) - f(\zeta)}, \quad (z,\zeta) \in U \times U$$

i

$$N(z,\bar{\zeta}) = -\log(1 + \overline{f(\zeta)}\, f(z)), \quad (z,\bar{\zeta}) \in U \times U$$

gdzie $M(z,\zeta)$ i $N(z,\bar{\zeta})$ są głównymi gałęziami logarytmu, takimi, że gdy z i ζ zmierzają do zera, to $M(z,\zeta)$ zmierza do $-\mathrm{Log}\, b_1$, a $N(z,\bar{\zeta})$ do zera. Funkcje $M(z,\zeta)$ i $N(z,\bar{\zeta})$ są funkcjami holomorficznymi zmiennych z, ζ i odpowiednio z, $\bar{\zeta}$ w bicylindrze $U \times U$. Niech zatem

$$M(z,\zeta) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} z^m \zeta^n \tag{1}$$

i

$$N(z,\bar{\zeta}) = \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} z^m \bar{\zeta}^n \tag{2}$$

$F_m(t)$ nazywamy m-tym wielomianem Fabera dla funkcji $\frac{1}{f(z)}$, jeżeli jest wielomianem stopnia m i jeżeli w otoczeniu punktu $z = 0$ ma rozwinięcie postaci:

$$F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right) = \frac{1}{z^m} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} z^n. \tag{3}$$

Definicja ta jest jednoznaczna. Funkcja generująca wielomiany Fabera w otoczeniu punktu $z = 0$ ma postać:

$$\log(1 - tf(z)) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (F_m(t) + m a_{mo}) z^m \tag{4}$$

Z powyższej równości oraz z (1) i (2) wynika, że

$$F_m\left(\frac{1}{f(\zeta)}\right) = \zeta^{-m} + \sum_{n=1}^{\infty} ma_{mn}\zeta^n, \quad m \geqslant 1, \tag{5}$$

i

$$F_m(\overline{f(\zeta)}) = \sum_{n=1}^{\infty} mb_{mn}\bar{\zeta}^n - ma_{mo}. \quad m \geqslant 1. \tag{6}$$

Porównując (3) i (5) otrzymamy, że

$$c_{mn} = ma_{mn}, \quad m,n \geqslant 1.$$

Różniczkując związek (4) względem t otrzymamy:

$$\frac{f(z)}{1-tf(z)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} F'_m(t)z^m \tag{7}$$

skąd

$$\frac{1}{1-tf(z)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} tF'_m(t)z^m. \tag{8}$$

Podamy teraz trzy twierdzenia dotyczące wariacji funkcji klasy S_1. W pierwszym podana jest wariacja zewnętrzna Schiffera, w drugim wariacja Spencera-Schaeffera-Charzyńskiego, w trzecim - wariacja Löwnera.

Twierdzenie 1

Jeżeli $f \in S_1$, $w_o \in U \setminus f(U)$ - dowolną liczbą zespoloną, to dla h zespolonego dostatecznie małego istnieje funkcja klasy S_1 postaci:

$$^*f(z) = f(z) + h\frac{f(z)}{f(z)-w_o} - \bar{h}_1 \frac{[f(z)]^2}{1-\bar{w}_o f(z)} + o(h) \tag{9}$$

gdzie $\frac{o(h)}{h}$ zmierza niemal jednostajnie do zera, gdy $h \to 0$.

Twierdzenie 2

Jeżeli $f \in S_1$, z_o, β są dowolnymi liczbami zespolonymi, przy czym $z_o \in U$, to dla τ rzeczywistego, dostatecznie małego, istnieje funkcja klasy S_1 postaci:

$$f^*(z) = f(z) + \tau\left\{\beta\left[\left(z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2 f(z) \frac{f(z_0)+f(z)}{f(z_0)-f(z)} - zf'(z) \frac{z_0+z}{z_0-z}\right] + \right.$$

$$\left. + \bar{\beta}\left[\overline{\left(z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2} f(z) \frac{1+\overline{f(z_0)}f(z)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)} - zf'(z) \frac{1+\bar{z}_0 z}{1-\bar{z}_0 z}\right]\right\} + O(\tau). \tag{10}$$

Twierdzenie 3

Jeżeli $f \in S_1$, Θ - dowolna liczba rzeczywista, to dla $\varepsilon > 0$ dostatecznie małego istnieje funkcja klasy S_1 postaci:

$$f_*(z) = f(z) - \varepsilon z f'(z) \frac{1+e^{-i\Theta}z}{1-e^{-i\Theta}z} + o(\varepsilon) \tag{11}$$

Zbudujemy teraz funkcje generujące wielomiany Fabera dla funkcji $^*f$, f^* i f_*. Biorąc pod uwagę (4), (7), (8), (9), (10) i (11), otrzymujemy:

$$\log(1-t^*f(z)) = \log(1-tf(z)) - h\left[\frac{t}{1-tw_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m} tF'_m(t)z^m - \right.$$

$$\left. - \frac{t}{1-tw_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{w_0}\cdot F'_m\left(\frac{1}{w_0}\right)z^m\right] + \bar{h}\left[\frac{1}{t-\bar{w}_0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m} tF'_m(t)z^m + \right. \tag{12}$$

$$\left. + \frac{t}{\bar{w}_0(\bar{w}_0-t)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\cdot\bar{w}_0\cdot F'_m(\bar{w}_0)z^m\right] + o(h).$$

$$\log(1-tf^*(z)) = \log(1-tf(z)) - \tau\left\{\beta\left[\left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2 \cdot\right.\right.$$

$$\cdot\left(\frac{tf(z_0)+1}{tf(z_0)-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m} tF'_m(t)z^m - \frac{2tf(z_0)}{tf(z_0)-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{1}{f(z_0)} F'_m\left(\frac{1}{f(z_0)}\right)z^m\right) - \tag{13}$$

$$\left. - \sum_{m=1}^{\infty}(F_m(t)+ma_{m0})z^m - 2\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m-1}(F_k(t)+ka_{k0})\frac{1}{z_0^{m-k}}\right)z^m\right] +$$

$$+\bar{\beta}\left[\overline{\left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2}\left(\frac{\overline{f(z_0)}+t}{t-\overline{f(z_0)}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\,tF'_m(t)z^m+\frac{2t}{\overline{f(z_0)}-t}\,\cdot\right.\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\cdot\overline{f(z_0)}F'_m\left(\overline{f(z_0)}\right)z^m\right)-\sum_{m=1}^{\infty}(F_m(t)+ma_{m0})z^m\;- \tag{13}$$

$$\left.\left.-\;2\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m-1}(F_k(t)+ka_{k0})\bar{z}_0^{m-k}\right)z^m\right]\right\}+o(\tau).$$

i

$$\log(1-tf_*(z))=\log(1-tf(z))+\frac{\varepsilon zt\bar{f}'(z)}{1-t\bar{f}(z)}\cdot\frac{1+e^{-i\theta}z}{1-e^{-i\theta}z}+o(\varepsilon). \tag{14}$$

Korzystając z (4) i porównując współczynniki przy tych samych potęgach z po obu stronach (12), (13) i (14), otrzymujemy następujące wzory wariacyjne dla wielomianów Fabera ${}^*F_m(t)$, $F^*_m(t)$ i ${}_*F_m(t)$:

$$\begin{aligned}{}^*F_m(t)&=F_m(t)+h\left[\frac{t}{1-tw_0}\,tF'_m(t)-\frac{1}{w_0^2(1-tw_0)}\,F'_m\left(\frac{1}{w_0}\right)\right]+\\&+\bar{h}\left[\frac{t}{\bar{w}_0-t}\,F'_m(t)-\frac{\bar{w}_0}{\bar{w}_0-t}\,F'_m(\bar{w}_0)\right]+o(h)\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}F^*_m(t)&=F_m(t)+\tau\left\{\beta\left[\left(z_0\frac{f(z_0)}{f(z_0)}\right)^2\left(\frac{tf(z_0)+1}{tf(z_0)-1}\,tF'_m(t)-\right.\right.\right.\\&\left.\left.\frac{2}{tf(z_0)-1}\,\frac{1}{f(z_0)}\,F'_m\left(\frac{1}{f(z_0)}\right)\right)-mF_m(t)-\frac{2m}{z_0^m}-2m\sum_{k=1}^{m-1}F_k(t)\,\frac{1}{z_0^{m-k}}\right]+\\&+\bar{\beta}\left[\overline{\left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2}\left(\frac{\overline{f(z_0)}+t}{t-\overline{f(z_0)}}\,tF'_m(t)+\frac{2\overline{f(z_0)}}{\overline{f(z_0)}-t}\,\overline{f(z_0)}F'_m\left(\overline{f(z_0)}\right)\right)-\right.\\&\left.\left.-\;mF_m(t)-2m\bar{z}_0^m-2m\sum_{k=1}^{m-1}F_k(t)\bar{z}_0^{m-k}\right]\right\}+o(\tau).\end{aligned} \tag{16}$$

$$ {}_*F_m(t) = F_m(t) - \varepsilon\left[mF_m(t) + 2me^{-im\theta} - 2m\sum_{k=1}^{m-1} F_k(t)e^{-i\theta(m-k)}\right] + o(\varepsilon) \tag{17}$$

Weźmy teraz pod uwagę funkcjonał $F_m\left(\frac{1}{f(w)}\right)$, gdzie w jest ustalonym, ale dowolnym punktem koła U. Wariacje tego funkcjonału, odpowiadające wariacjom (9), (10) i (11), dane są wzorami:

$$ {}^*F_m\left(\frac{1}{{}^*f(w)}\right) = {}^*F_m\left(\frac{1}{f(w)}\right) + F'_m\left(\frac{1}{f(w)}\right)\left(\frac{1}{{}^*f(w)} - \frac{1}{f(w)}\right) + o(h). \tag{18}$$

$$ F^*_m\left(\frac{1}{f^*(w)}\right) = F^*_m\left(\frac{1}{f(w)}\right) + F'_m\left(\frac{1}{f(w)}\right)\left(\frac{1}{f_*(w)} - \frac{1}{f(w)}\right) + o(\tau) \tag{19}$$

$$ {}_*F_m\left(\frac{1}{f_*(w)}\right) = {}_*F_m\left(\frac{1}{f(w)}\right) + F'_m\left(\frac{1}{f(w)}\right)\left(\frac{1}{f_*(w)} - \frac{1}{f(w)}\right) + o(\varepsilon). \tag{20}$$

Z (15) - (20) otrzymujemy:

$$ {}^*F_m\left(\frac{1}{{}^*f(w)}\right) = F_m\left(\frac{1}{f(w)}\right) + h\frac{1}{w_0^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}F'_n\left(\frac{1}{w_0}\right)w^n F'_m\left(\frac{1}{w_0}\right) + $$
$$ + h\bar{w}_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}F'_n(\bar{w}_0)w^n F'_m(\bar{w}_0) + o(h) \tag{21}$$

$$ F^*_m\left(\frac{1}{f^*(w)}\right) = F_m\left(\frac{1}{f(w)}\right) + \tau\left\{\beta\left[\left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2 \cdot \frac{2f(w)}{f(w)-f(z_0)}\frac{1}{f(z_0)}F'_m\left(\frac{1}{f(z_0)}\right) - \right.\right.$$
$$ - mF_m\left(\frac{1}{f(w)}\right) - \frac{2m}{z_0^m} - 2m\sum_{k=1}^{m-1}F_k\left(\frac{1}{f(w)}\right)\frac{1}{z_0^{m-k}} + F'_m\left(\frac{1}{f(w)}\right)\frac{1}{f^2(w)}wf'(w). $$
$$ \left.\cdot\frac{z_0+w}{z_0-w}\right] + \bar{\beta}\left[\left(\overline{z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}}\right)^2\frac{2\overline{f(z_0)}f(w)}{\overline{f(z_0)}f(w)-1}\overline{f(z_0)}F'_m(\overline{f(z_0)})) - mF_m\left(\frac{1}{f(w)}\right)\right. \tag{22}$$
$$ \left.\left. - 2m\bar{z}_0^m - 2m\sum_{k=1}^{m-1}F_k\left(\frac{1}{f(w)}\right)\bar{z}_0^{m-k} + F'_m\left(\frac{1}{f(w)}\right)\frac{1}{f^2(w)}wf'(w)\frac{1+\bar{z}_0 w}{1-\bar{z}_0 w}\right]\right\} + o(\tau) $$

$$ {}_*F_m\left(\frac{1}{f_*(w)}\right) = F_m\left(\frac{1}{f(w)}\right) - \varepsilon\left[mF_m\left(\frac{1}{f(w)}\right) + 2me^{-im\theta} + 2m\sum_{k=1}^{m-1}F_k\left(\frac{1}{f(w)}\right)\cdot\right. $$
$$ \left. e^{-i\theta(m-k)} - F'_m\left(\frac{1}{f(w)}\right)\frac{wf'(w)}{f^2(w)}\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(e^{-i\theta}w)^m\right)\right] + o(\varepsilon). \tag{23}$$

Wzory te będą wykorzystane w drugiej części pracy.

Potraktujemy z kolei $F_m(\overline{f(w)})$, gdzie w jest ustalonym, ale dowolnym punktem koła U, jako funkcjonał określony w rodzinie S_1. Wariacje tego funkcjonału, odpowiadające wariacjom (9), (10) i (11), dane są wzorami:

$$ {}^{\prime\prime}F_m({}^{\prime\prime}\overline{f(w)}) = {}^{\prime\prime}F_m(\overline{f(w)}) + F'_m(\overline{f(w)})({}^{\prime\prime}\overline{f(w)} - \overline{f(w)}) + o(h) \tag{24} $$

$$ F^*_m(\overline{f^*(w)}) = F^*_m(\overline{f(w)}) + F'_m(\overline{f(w)})(\overline{f^*(w)} - \overline{f(w)}) + o(\tau) \tag{25} $$

$$ {}_*F_m(\overline{f_*(w)}) = {}_*F_m(\overline{f(w)}) + F'_m(\overline{f(w)})(\overline{f_*(w)} - \overline{f(w)}) + o(\varepsilon) \tag{26} $$

Z (15), (16), (17), (24), (25) i (26), otrzymujemy:

$$ \begin{aligned} \overline{{}^{*}F_m({}^{*}\overline{f(w)})} = F_m(\overline{f(w)}) - h\,\frac{1}{w_0^2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,w_0\overline{F'_n(w_0)}\,\bar{w}^n\right)F'_m\left(\frac{1}{w_0}\right) - \\ - \bar{h}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\frac{1}{\bar{w}_0}\,\overline{F'_n\left(\frac{1}{\bar{w}_0}\right)}\,\bar{w}^n\right)F'_m(\bar{w}_0) + o(h) \end{aligned} \tag{27} $$

$$ \begin{aligned} F^*_m(\overline{f^*)w)}) = F_m(\overline{f(w)}) + \tau\Bigg\{\beta\Bigg[\left(z_0\,\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2\left(\frac{2}{1-f(z_0)\overline{f(w)}}\,\frac{1}{f(z_0)}\cdot\right. \\ \left.F'_m\left(\frac{1}{f(z_0)}\right)\right) - \overline{F'_m(f(w))}\,\bar{w}\,\overline{f'(w)}\,\frac{1+z_0\bar{w}}{1-z_0\bar{w}} - mF_m(\overline{f(w)}) - \frac{2m}{z_0^m} - \\ - 2m\sum_{k=1}^{m-1}F_k(\overline{f(w)})\,\frac{1}{z_0^{m-k}}\Bigg] + \bar{\beta}\Bigg[\overline{\left(z_0\,\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2}\left(\frac{2\overline{f(z_0)}}{\overline{f(z_0)} - \overline{f(w)}}\,\overline{f(z_0)}\left(F'_m(\overline{f(z_0)})\right)\right) - \\ - F'_m(\overline{f(w)})\,\bar{w}\,\overline{f'(w)}\,\frac{\bar{z}_0+\bar{w}}{\bar{z}_0-\bar{w}} - mF_m(\overline{f(w)}) - 2m\bar{z}_0^m - 2m\sum_{k=1}^{m-1}F_k(\overline{f(w)})\,\bar{z}_0^{m-k}\Bigg]\Bigg\} + o(\tau). \end{aligned} \tag{28} $$

$$ \begin{aligned} {}_*F_m(\overline{f_*(w)}) = F_m(\overline{f(w)}) - \varepsilon\Bigg[mF_m(\overline{f(w)}) + 2me^{-im\theta} + 2m\sum_{k=1}^{m-1}F_k(\overline{f(w)})e^{-i\theta(m-k)} + \\ + F'_m(\overline{f(w)})\,\bar{w}\,\overline{f'(w)}\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(e^{-i\theta}\bar{w})^m\right)\Bigg] + o(\varepsilon) \end{aligned} \tag{29} $$

Weźmy pod uwagę dwie formy, jedną kwadratową

$$P(x,x) = \sum_{m,n=1}^{N} a_{mn} x_m x_n \tag{30}$$

drugą Hermite'a

$$Q(x,\bar{x}) = \sum_{m,n=1}^{N} b_{mn} x_m \bar{x}_n, \quad N \geqslant 1. \tag{31}$$

Z własności funkcji $M(z,\xi)$ i $N(z,\bar{\xi})$ wynika, że

$$a_{mn} = a_{nm} \quad \text{i} \quad b_{mn} = \overline{b_{nm}}$$

Niech $R(x,\bar{x}) = P(x,x) + Q(x,\bar{x})$.
Rozważmy funkcjonał

$$\mathrm{Re}\left\{R(x,\bar{x})\right\} = \mathrm{Re}\left\{\sum_{m,n=1}^{N} (a_{mn} x_m x_n + b_{mn} x_m \bar{x}_n)\right\},$$

gdzie $x = (x_1,\ldots,x_N)$ jest N-wymiarowym wektorem o N współrzędnych zespolonych, nie wszystkich równych 0. Załóżmy, że funkcja $f \in S_1$ realizuje maksimum funkcjonału (32) w rodzinie S_1, czyli

$$\mathrm{Re}\left\{\hat{R}(x,\bar{x})\right\} \leqslant \mathrm{Re}\left\{R(x,\bar{x})\right\}, \tag{33}$$

gdzie $\mathrm{Re}\left\{\hat{R}(x,\bar{x})\right\}$ jest wartością funkcjonału dla $\hat{f} \in S_1$.

Policzymy teraz wartość funkcjonału $\mathrm{Re}\left\{R(x,\bar{x})\right\}$ dla funkcji ${}^*f$, f^* i f_* określonych wzorami (9), (10) i (11).

Korzystając z rozwinięcia w szereg $F_m\left(\frac{1}{f(w)}\right)$ i z analogicznych rozwinięć dla ${}^*F_m\left(\frac{1}{{}^*f(w)}\right)$, $F^*_m\left(\frac{1}{f^*(w)}\right)$ i ${}_*F_m\left(\frac{1}{f_*(w)}\right)$, a następnie porównując współczynniki przy w^n po obu stronach, otrzymujemy związki:

$${}^*a_{mn} = a_{mn} + h \cdot \frac{1}{w_0^3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} \cdot F'_n\left(\frac{1}{w_0}\right) \cdot F'_m\left(\frac{1}{w_0}\right) + \bar{h}\, \bar{w}_0 \frac{1}{n} \frac{1}{m} F'_n(\bar{w}_0)\, F'_m(\bar{w}_0) + o(h) \tag{34}$$

$$a^*_{mn} = a_{mn} + \tau\left\{\beta\left[-2\left(z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2 \frac{1}{f^2(z_0)} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} F'_m\left(\frac{1}{f(z_0)}\right) F'_n\left(\frac{1}{f(z_0)}\right)\right.\right. \tag{35}$$

$$- n a_{mn} - m a_{mn} - 2\sum_{k=1}^{n-1} k a_{mk} \frac{1}{z_0^{n-k}} + \frac{2}{z_0^{n+m}} - 2\sum_{k=1}^{m-1} k a_{kn} \frac{1}{z_0^{m-k}}\Bigg] +$$

$$+\bar{\beta}\left[-2\left(z_0\overline{\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}}\right)^2 \overline{f^2(z_0)}\,\frac{1}{m}\frac{1}{n}F'_m(\overline{f(z_0)})\,F'_n(\overline{f(z_0)}) - na_{mn} - ma_{mn} -\right.$$

$$\left.\left. - 2\sum_{k=1}^{n-1} ka_{mk}\bar{z}_0^{n-k} - 2\sum_{k=1}^{m-1} ka_{kn}\bar{z}_0^{m-k} + 2\bar{z}_0^{n+m}\right]\right\} + o(\tau).$$

$$^*a_{mn} = a_{mn} - \varepsilon\left[ma_{mn} + na_{mn} + 2\sum_{k=1}^{m-1} ka_{kn}e^{-i\theta(m-k)} + 2\sum_{k=1}^{n-1} ka_{mk}e^{-i\theta(n-k)} - \right.$$

$$\left. - 2e^{-(n+m)i\theta}\right] + o(\varepsilon). \tag{36}$$

Mnożąc (34), (35) i (36) przez $x_m x_n$ i sumując po m oraz n, otrzymujemy następujące wzory wariacyjne dla formy $P(x,x)$:

$$^*P(x,x) = P(x,x) + h\sum_{m,n=1}^{N} F'_n\left(\frac{1}{w_0}\right)F'_m\left(\frac{1}{w_0}\right)\frac{x_n x_m}{nm}$$

$$+ \bar{h}\sum_{m,n=1}^{N} F'_n(\bar{w}_0)\,F'_m(\bar{w}_0)\,\frac{x_n x_m}{n.m} + o(h). \tag{37}$$

$$P^*(x,x) = P(x,x) - \tau\left\{\beta\left[2\left(z_0\overline{\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}}\right)^2\left(\frac{1}{f(z_0)}\sum_{n=1}^{N} F'_n\left(\frac{1}{f(z_0)}\right)\frac{x_n}{n}\right)^2 +\right.\right.$$

$$\left. + 2\sum_{m,n=1}^{N} na_{mn}x_m x_n + 4\sum_{n,m=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1} ka_{mk}\frac{1}{z_0^{n-k}}x_m x_n - 2\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n}{z_0^n}\right)^2\right] + \tag{38}$$

$$+\bar{\beta}\left[2\left(z_0\overline{\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}}\right)^2 \cdot (\overline{f(z_0)})\sum_{n=1}^{N}\left(F'_n(\overline{f(z_0)})\frac{x_n}{n}\right)^2 + 2\sum_{m,n=1}^{N} na_{mn}x_m x_n +\right.$$

$$\left.\left. + 4\sum_{m,n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1} ka_{mk}\bar{z}_0^{n-k}x_m x_n - 2\left(\sum_{n=1}^{N}\bar{z}_0^n x_n\right)^2\right]\right\} + o(\tau)$$

$$
{}_*P(x,x) = P(x,x) - \varepsilon\Bigg[2\sum_{m,n=1}^{N} m a_{mn} x_m x_n + 4\sum_{m,n=1}^{N}\Bigg(\sum_{k=1}^{m-1} k a_{kn} e^{-i\Theta(m-k)}\Bigg) x_m x_n - \tag{39}
$$

$$
- 2\sum_{m,n=1}^{N} e^{-(n+m)i\Theta} x_m x_n\Bigg] + o(\varepsilon).
$$

Korzystając z rozwinięcia w szereg $F_m(f(w))$ i z analogicznych rozwinięć dla $F_m({}^*f(w))$, $F_m(f^*(w))$, $F_m(f_*(w))$, a następnie porównując współczynniki przy w^n po obu stronach, otrzymujemy związki:

$$
{}^*b_{mn} = b_{mn} - h\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{m}\,\overline{F'_n(w_o)}F'_m\left(\frac{1}{w_o}\right) - \bar{h}\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{m}\,\overline{F'_n\left(\frac{1}{\bar{w}_o}\right)}\,F'_m(\bar{w}_o) + o(h) \tag{40}
$$

$$
b^*_{mn} = b_{mn} + \Bigg\{\beta\Bigg[\left(z_o\,\frac{f'(z_o)}{f(z_o)}\right)^2 2\,\frac{1}{m.n}\,F'_n(f(z_o))\,F'_m\left(\frac{1}{f(z_o)}\right) - \tag{41}
$$

$$
- (n+m)b_{mn} - 2\sum_{k=1}^{n-1} k b_{mk} z_o^{n-k} - 2\sum_{k=1}^{m-1} k b_{kn}\,\frac{1}{z_o^{m-k}}\Bigg] +
$$

$$
+ \bar{\beta}\Bigg[2\overline{\left(z_o\,\frac{f'(z_o)}{f(z_o)}\right)^2}\cdot \bar{F}'_m(\overline{f(z_o)})\,F_n\left(\frac{1}{f(z_o)}\right)\frac{1}{m.n} - (n+m)b_{mn} -
$$

$$
- 2\sum_{k=1}^{n-1} k b_{mk}\,\frac{1}{\bar{z}_o^{n-k}} - 2\sum_{k=1}^{m-1} k b_{kn}\bar{z}_o^{m-k}\Bigg]\Bigg\} + o(\tau)
$$

$$
{}_*b_{mn} = b_{mn} - \varepsilon\Bigg[(m+n)b_{nm} + 2\sum_{k=1}^{m-1} k b_{kn} e^{-i\Theta(m-k)} - 2\sum_{k=1}^{n-1} k b_{mk} e^{i\Theta(n-k)}\Bigg] + o(\varepsilon) \tag{42}
$$

Mnożąc (40), (41) i (42) przez $x_m\bar{x}_n$ i sumując po m oraz n, otrzymujemy wzory wariacyjne dla formy $Q(x,\bar{x})$:

$$
{}^*Q(x,\bar{x}) = Q(x,\bar{x}) - h\sum_{m,n=1}^{N} F'_m\left(\frac{1}{w_o}\right)\overline{F'_n(w_o)}\,\frac{x_m\bar{x}_n}{m\;n} - \tag{43}
$$

$$
- \bar{h}\sum_{m,n=1}^{N} F'_m(\bar{w}_o)\,\overline{F'_n\left(\frac{1}{\bar{w}_o}\right)}\frac{x_m\bar{x}_n}{m\;n} + o(h)
$$

$$Q^*(x,\bar{x}) = Q(x,\bar{x}) + \tau\Bigg\{\beta\Bigg[2\left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2 \sum_{m,n=1}^{N} \overline{\left(F'_m(\overline{f(z_0)})\right)}\, F'_n\left(\frac{1}{\overline{f(z_0)}}\right)\frac{x_m\bar{x}_n}{mn} - \tag{44}$$

$$- \sum_{m,n=1}^{N}(n+m)\bar{b}_{mn}x_m\bar{x}_n - 2\sum_{m,n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1} kb_{mk}z_0^{n-k}\, x_m\bar{x}_n - 2\sum_{m,n=1}^{N}\sum_{k=1}^{m-1} kb_{kn}\,\frac{x_m\bar{x}_n}{z_0^{m-k}}\Bigg] +$$

$$+ \bar{\beta}\Bigg[2\overline{\left(z_0\frac{f(z_0)}{f(z_0)}\right)^2} \sum_{m,n=1}^{N} F'_m(\overline{f(z_0)})\,\overline{F'_n\left(\frac{1}{\overline{f(z_0)}}\right)}\,\frac{x_m\bar{x}_n}{m.n} - \sum_{m,n=1}^{N}(n+m)\bar{b}_{mn}x_m\bar{x}_n -$$

$$- 2\sum_{m,n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1} k\bar{b}_{mk}\,\frac{x_m\bar{x}_n}{z_0^{n-k}} - 2\sum_{m,n=1}^{N}\sum_{k=1}^{m-1} k\bar{b}_{kn}z_0^{m-k}\, x_m\bar{x}_n\Bigg]\Bigg\} + o(\tau).$$

$$_*Q(x,\bar{x}) = Q(x,\bar{x}) - \varepsilon\Bigg[\sum_{m,n=1}^{N}(m+n)b_{mn}x_m\bar{x}_n + 2\sum_{m,n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{m-1} kb_{kn}e^{-i\Theta(m-k)}\right)x_m\bar{x}_n - \tag{45}$$

$$- 2\sum_{m,n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n-1} kb_{mk}e^{i\Theta(n-k)}\right)x_m\bar{x}_n\Bigg] + o(\varepsilon).$$

Założyliśmy, że f(z) jest funkcją ekstremalną, a

$$\mathrm{Re}\left\{R(x,\bar{x})\right\} = \mathrm{Re}\left\{P(x,x) + Q(x,\bar{x})\right\} = \mathrm{Re}\left[\left(\sum_{m,n=1}^{N} a_{mn}x_mx_n + b_{mn}x_m\bar{x}_n\right)\right],$$

odpowiadającą jej wartością formy.

Ponieważ funkcje $^*f$ dla dostatecznie małych h, f^* dla dostatecznie małych τ i f_* dla dostatecznie małych ε są również funkcjami rodziny S_1, więc odpowiadające im wartości naszego funkcjonału spełniają nierówności:

$$\mathrm{Re}\left\{^*R(x,\bar{x})\right\} \leqslant \mathrm{Re}\left\{R(x,\bar{x})\right\},$$

$$\mathrm{Re}\left\{R^*(x,\bar{x})\right\} \leqslant \mathrm{Re}\left\{\mathrm{Re}(x,\bar{x})\right\},$$

$$\mathrm{Re}\left\{_*R(x,\bar{x})\right\} \leqslant \mathrm{Re}\left\{R(x,\bar{x})\right\}.$$

Stąd

$$\mathrm{Re}\left\{{}^{*}R(x,\bar{x})\right\} - \mathrm{Re}\left\{R(x,\bar{x})\right\} = \tag{46}$$

$$\mathrm{Re}\Bigg\{h\sum_{m,n=1}^{N} F'_n\left(\frac{1}{w_o}\right) F'_m\left(\frac{1}{w_o}\right)\frac{x_n x_m}{n.m} + \bar{h}\sum_{m,n=1}^{N} F'_n(\bar{w}_o)\, F'_m(\bar{w}_o)\,\frac{x_n x_m}{n.m} -$$

$$- h\sum_{m,n=1}^{N} F'_m\left(\frac{1}{w_o}\right)\overline{F'_n(w_o)}\,\frac{x_m\bar{x}_n}{m.n} - \bar{h}\sum_{m,n=1}^{N} F'_m(\bar{w}_o)\,\overline{F'_n\left(\frac{1}{\bar{w}_o}\right)}\,\frac{x_m x_n}{m.n} + o(h)\Bigg\} \leqslant 0$$

$$\mathrm{Re}\left\{R^{*}(x,\bar{x})\right\} - \mathrm{Re}\left\{R(x,\bar{x})\right\} = \tag{47}$$

$$= -\tau\,\mathrm{Re}\Bigg\{\beta\Bigg[2\left(z_o\frac{f'(z_o)}{f(z_o)}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{f(z_o)}\sum_{n=1}^{N} F'_n\left(\frac{1}{f(z_o)}\right)\frac{x_n}{n}\right)^2 -$$

$$- 2\left(z_o\frac{f'(z_o)}{f(z_o)}\right)^2\sum_{m,n=1}^{N}\overline{F'_m(f(z_o))}\,F'_n\left(\frac{1}{f(z_o)}\right)\frac{x_m\bar{x}_n}{m\,n} + 2\sum_{n=1}^{N} na_{mn}x_m x_n +$$

$$+ 4\sum_{m,n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1} ka_{mk}\frac{1}{z_o^{n-k}}\,x_m x_n - 2\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n}{z_o^{n}}\right)^2 + \sum_{m,n=1}^{N}(n+m)\bar{b}_{mx}x_m\bar{x}_n +$$

$$+ 2\sum_{m,n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1} kb_{mk}z_o^{n-k}\,x_m\bar{x}_n + 2\sum_{m,n=1}^{N}\sum_{k=1}^{m-1} kb_{kn}\frac{x_m\bar{x}_n}{z_o^{m-k}}\Bigg] +$$

$$+\bar{\beta}\Bigg[2\overline{\left(z_o\frac{f'(z_o)}{f(z_o)}\right)}^2\left(\overline{f(z_o)}\sum_{n=1}^{N}F'_n(\overline{f(z_o)})\,\frac{x_n}{n}\right)^2 - 2\overline{\left(z_o\frac{f'(z_o)}{f(z_o)}\right)}^2\cdot$$

$$\cdot\sum_{m,n=1}^{N}F'_m(\overline{f(z_o)})\,\overline{F'_n\left(\frac{1}{f(z_o)}\right)}\frac{x_m\bar{x}_n}{m.n} + 2\sum_{m,n=1}^{N} na_{mn}x_m x_n - 2\left(\sum_{n=1}^{N}\bar{z}_o^{n}x_n\right)^2 +$$

$$+ 4\sum_{m,n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1} ka_{mk}\bar{z}_o^{n-k}\,x_m x_n + \sum_{m,n=1}^{N}(n+m)\bar{b}_{mn}x_m\bar{x}_n + 2\sum_{m,n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1} k\bar{b}_{mk}\frac{x_m\bar{x}_n}{\bar{z}_o^{n-k}} +$$

$$+ 2\sum_{m,n=1}^{N}\sum_{k=1}^{m-1} k\bar{b}_{kn}\bar{z}_o^{m-k}\,x_m\bar{x}_n\Bigg] + o(\tau)\Bigg\} \leqslant 0$$

$$\mathrm{Re}\left\{{}_*R(x,\bar{x})\right\} - \mathrm{Re}\left\{R(x,\bar{x})\right\} = \tag{48}$$

$$= \mathrm{Re}\Bigg\{-\varepsilon\Bigg[2\sum_{m,n=1}^{N} m a_{mn} x_m x_n + 4\sum_{m,n=1}^{N}\Bigg(\sum_{k=1}^{m-1} k a_{kn} e^{-i\theta(m-k)}\Bigg) x_m x_n -$$

$$- 2\sum_{m,n=1}^{N} e^{-i(n+m)\theta} x_m x_n + 2\sum_{m,n=1}^{N}\Bigg(\sum_{k=1}^{m-1} k b_{kn} e^{-i\theta(m-k)}\Bigg) x_m \bar{x}_n +$$

$$+ \sum_{m,n=1}^{N} (n+m) b_{mn} x_m \bar{x}_n + 2\sum_{m,n=1}^{N}\Bigg(\sum_{k=1}^{n-1} k b_{mk} e^{i\theta(n-k)}\Bigg) x_m \bar{x}_n\Bigg] + o(\varepsilon)\Bigg\} \leq 0$$

Wobec dowolności zespolonego h z (46) wynika, że

$$\left(\sum_{m=1}^{N} \frac{x_m}{m} F'_m\left(\frac{1}{w_o}\right) - \frac{\bar{x}_m}{m}\overline{F'_m(\bar{w}_o)}\right)^2 = 0. \tag{49}$$

Gdyby $w_o \in U$ był punktem zewnętrznym dla obszaru $f(U)$, to dla dowolnego w

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m} F'_m\left(\frac{1}{w}\right) - \frac{\bar{x}_m}{m}\overline{F'_m(\bar{w})}\right) = 0 \tag{50}$$

Z powyższej równości wynikałoby, że $x_1 = x_2 = \ldots\ldots x_N = 0$, co nie zachodzi. Wnioskujemy stąd, że zbiór $U \setminus f(U)$ nie ma punktów wewnętrznych. Wobec dowolności τ rzeczywistego $\mathrm{Re}\{\ldots\}w$ (47) musi być równy zero, a z dowolności β zespolonego wynika równość:

$$\left(z_o \frac{f'(z_o)}{f(z_o)}\right)^2\left(\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{x_n}{n} i \cdot \frac{1}{f(z_o)} \cdot F'_n\left(\frac{1}{f(z_o)}\right) - \frac{\bar{x}_n}{n} i\, f(z_o)\, \overline{F'_n(\overline{f(z_o)})}\right]\right)^2 =$$

$$= -\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{z_o^n}\right)^2 - \left(\sum_{n=1}^{N} \bar{x}_n z_o^n\right)^2 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{m,n=1}^{N} m(a_{mn}\bar{x}_m\bar{x}_n + b_{mn}x_m\bar{x}_n) +$$

$$+ 2\sum_{m,n=1}^{N}\sum_{k=1}^{m-1}\left[(k a_{kn} x_m x_n + k b_{kn} x_m \bar{x}_n)\frac{1}{z_o^{m-k}} + (k\bar{a}_{kn}\bar{x}_m\bar{x}_n + k\bar{b}_{kn}\bar{x}_m x_n) z_o^{m-k}\right]$$

Z uwagi na dowolność $z_0 \in U$, z powyższego równania widać, że funkcja $w = f(z)$, ekstremalna w klasie S_1, spełnia w kole U równanie:

$$\left(z\frac{w'}{w}\right)^2\left(\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{x_n}{n}\, i\,\frac{1}{w}\,F'_n\left(\frac{1}{w}\right) - \frac{\bar{x}_n}{n}\, iw\overline{F'_n(\bar{w})}\right]\right)^2 = Q(z), \tag{52}$$

gdzie $Q(z)$ jest prawą stroną równania (51), w której przyjęto z w miejsce z_0.

Z (51) wynika, że $Q(z)$ przedłuża się jako funkcja wymierna na całą płaszczyznę, że ma jedynie bieguny stopnia co najwyżej $2N$ w $z = 0$ i $z = \infty$ oraz, że $\operatorname{Im} Q(z) = 0$ dla $|z| = 1$. Ponadto z dowolności dodatniego ε w (48) wynika, że

$$Q(z) \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad |z| = 1. \tag{53}$$

Z (51) wynika dalej, że jeśli $z^* \in U$ i $Q(z^*) = 0$, to $\overline{z^*}$ jest pierwiastkiem parzystokrotnym funkcji $Q(z)$, a ponieważ $Q(z) = Q\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$, więc także wszystkie pierwiastki leżące w zewnętrzu koła jednostkowego są parzystokrotne, a z (53) wynika, że takież są pierwiastki leżące na okręgu $|z| = 1$. $Q(z)$ jest zatem kwadratem pewnej funkcji wymiernej rzeczywistej na $|z| = 1$, o biegunach stopnia co najwyżej N w punktach $z = 0$ i $z = \infty$. Wyciągając teraz pierwiastek z obu stron (52) stwierdzamy, że $w = f(z)$ spełnia równanie różniczkowe postaci:

$$\left(z\frac{w'}{w}\right)\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\, i\,\frac{1}{w}\,F'_m\left(\frac{1}{w}\right) - \frac{\bar{x}_m}{m}\, i\, w\,\overline{F'_m(\bar{w})}\right) = \tag{54}$$

$$= \frac{A_N}{z^N} + \ldots + A_0 + \ldots + \bar{A}_N z^N.$$

gdzie A_0 jest rzeczywiste. Co więcj, porównując wyrazy wolne po obu stronach (54), z uwagi na (5) i (6), stwierdzamy, że $A_0 = 0$. Całkując wreszcie (54), otrzymujemy:

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\,F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right) + \frac{\bar{x}_m}{m}\,\overline{F_m(\overline{f(z)})}\right) = \frac{-iA_N}{N}\cdot\frac{1}{z^N} + \ldots + \frac{-i\bar{A}_N}{N}\,z^N + C. \tag{55}$$

Biorąc jeszcze raz pod uwagę (5) i (6) stwierdzamy, że część główna strony lewej (55) ma postać:

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot\frac{1}{z^m}\right),$$

a więc strona prawa (55) ma postać:

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\frac{1}{z^m}+\frac{\bar{x}_m}{m}z^m\right)+C$$

Stwierdzamy na koniec, że $\mathrm{Im}\{C\}=0$. Istotnie, na mocy (50) zbiór $\partial f(U)\cap\partial U\neq\emptyset$. Wynika stąd bez trudu, że istnieje ciąg $z_n\in U$, $z_n\to e^{i\varphi_0}$, taki, że ciąg $f(z_n)\to e^{i\psi_0}$. Kładąc w związku

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right)+\frac{\bar{x}_m}{m}\overline{F_m(\overline{f(z)})}\right)=\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\frac{1}{z^m}+\frac{\bar{x}_m}{m}z^m\right)+C \tag{56}$$

z_n w miejsce z i przechodząc do granicy przy $n\to\infty$, otrzymujemy

$$\mathrm{Im}\{C\}=0.$$

Na koniec z (5) i (6) oraz (56) wynika, że

$$C=-\sum_{m=1}^{N}\bar{x}_m\bar{a}_{m0}$$

Obliczmy na koniec maksymalną wartość funkcjonału $\mathrm{Re}\{R(x,\bar{x})\}$. Porównując w tym celu współczynniki przy z^m, otrzymamy:

$$\sum_{n=1}^{N}\left(x_n a_{nm}+\bar{x}_n\bar{b}_{nm}\right)=\frac{\bar{x}_m}{m}\quad\text{dla}\quad 1\leq m\leq N, \tag{57}$$

$$\sum_{n=1}^{N}(x_n a_{nm}+\bar{x}_n\bar{b}_{nm})=0\quad\text{dla}\quad m>N.$$

Mnożąc (57) przez x_m i sumując po $m=1,\ldots,N$, otrzymujemy:

$$\sum_{m,n=1}^{N}(a_{nm}x_n x_m+\bar{b}_{nm}\bar{x}_n x_m)=\sum_{m=1}^{N}\frac{|x_m|^2}{m},$$

a korzystając z tego, że $a_{nm} = a_{mn}$ i $\overline{b}_{nm} = b_{mn}$, mamy dalej

$$\sum_{m,n=1}^{N} (a_{mn}x_m x_n + b_{mn}x_m\bar{x}_n) = \sum_{m=1}^{N} \frac{|x_m|^2}{m}.$$

Tym samym zostało udowodnione

Twierdzenie

Jeżeli $f \in S_1$ jest funkcją, dla której funkcjonał $\mathrm{Re}\{R(x,\bar{x})\}$ osiąga wartość maksymalną, to (α) f spełnia równanie

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m} F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right) + \frac{\bar{x}_m}{m}\overline{F_m(\overline{f(z)})}\right) = \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m} z^{-m} + \frac{\bar{x}_m}{m} z^m\right) - \sum_{m=1}^{N} \bar{x}_m \bar{a}_{mo},$$

gdzie: $F_m(t)$ jest m-tym wielomianem Fabera dla funkcji $\frac{1}{f(z)}$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{mo}z^m = \log\frac{z}{f(z)} \quad \text{oraz} \quad \mathrm{Im}\left\{\sum_{m=1}^{N} x_m a_{mo}\right\} = 0.$$

(β) Dla f wartość funkcjonału $\mathrm{Re}\{R(x,\bar{x})\}$ wynosi

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|x_n|^2}{n}.$$

LITERATURA

[1] Charzyński Z., Śladkowska J.: Fonctions algébriques et variations analytiques des fonctions univalentes. Disc. Math. (Rozpr. Mat.) 70(1970) 1-80.

[2] Löwner K.: Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreisses. Math. Ann. 89, (1923) 103-121.

[3] Nehari Z.: Some inequalities in the theory of functions. Trans. Amer. Math. Soc. 75, (1953) 256-286.

[4] Schaeffer A.C., Spencer D.C.: Coefficient regions for schlicht functions, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 35 New York (1950).

[5] Schiffer M.: Faber polynomials in the theory of univalent functions, Bull. Amer. Math. Soc. 54(6) (1948) 503-517.

[6] Schiffer M., Tammi O.: On the coefficient problem for bounded univalent functions. Trans. Amer. Math. Soc. 140 (1969), 461-475.

[7] Schiffer M.: Extremum problems and variational methods in conformal mapping. Proc. Internat. Congress Math. (1958), Cambridge Univ. Press, New York, (1960), 211-231.

[8] Singh V.: Interior variations and some extremal problems for certain classes of univalent functions, Pacific J. Math. 7(1957) 1485-1504.

[9] Śladkowska J: Les polynômes de Faber dans la théorie des fonctions univalentes bornées, Demonstratio Math. 7(1) (1975) 99-112.

ВАРИАЦИИ МНОГОЧЛЕНОВ ФАБЕРА

Р е з ю м е

Эта работа состоит из двух частей. В первой части получены вариации многочленов Фабера для функций класса S_1, соответствующие внешней вариации Шиффера, внутренней вариации Спенсера-Шиффера-Хажиньского а также вариации Левнера.

Во второй части работы используются результаты первой части для исследования функций которые дают максимум функционала находящегося по левой стороне неравенства Нехари-Синга и получено алгебраическое уравнение, которому должно удовлетворять экстремальные функции.

VARIATIONS OF FABER POLYNOMIALS AND THEIR APPLICATION TO EXTREME PROBLEMS IN THE FAMILY ON ONE-LEAF LIMITED FUNCTIONS

S u m m a r y

This paper consists of two parts. In the first one were obtained variations of the Faber polynomials for the functions in class S_1, suitable to the Schiffer exterior variation, to the Spencer-Schaeffer-Charzyński interior variation and to the Loewner variation.

In the second part of this paper are adopted the results of the first par for studying the functions which realize maximum of the functional being on the left of Nehari-Singh inequality, reciving a algebraic equality which must be satisfied by extremal functions.