Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 30 Nr kol. 560

Jerzy TIMMLER
Instytut Matematyki - Politechnika Śląska

O PRZESTAWIANIU SZEREGÓW W PRZESTRZENI E^n

Streszczenie. Permutacje liczb naturalnych nazywamy sumowalnymi, jeśli jest spełniony warunek (2).

W pracy udowodniono twierdzenie: Jeśli elementy szeregu (1) i permutacja $\{N_k\}$ liczb naturalnych spełnia warunki (6), (7) to permutacja $\{N_k\}$ jest sumowalna.

Niech dany będzie zbieżny szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = S, \tag{1}$$

którego wyrazami są wektory z przestrzeni E^n. Permutację zbioru liczb naturalnych nazywamy sumowalną, jeżeli

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} v_{N_k}. \tag{2}$$

Celem niniejszej pracy jest to, by wykazać, że dla pewnej klasy szeregów (1) istnieje permutacja sumowalna.

W pracy [1] podano

Twierdzenie A

Jeżeli wyrazy pewnego zespolonego szeregu spełniają związek

$$\lim_{k\to\infty} k\, a_k = 0, \tag{3}$$

oraz gdy pewne permutacja zbioru liczb naturalnych N_k spełnia warunek

$$\lim_{k\to\infty} k\, a_{N_k} = 0. \tag{4}$$

to permutacja $\{N_k\}$ jest sumowalna.

Z twierdzenia A wynika

Wniosek 1

Jeżeli wyrazy pewnego zbieżnego szeregu (o wyrazach rzeczywistych) spełniają warunek (3), a ponadto permutacja $\{N_k\}$ spełnia warunek (4), to jest ona sumowalna.

Dowód powyższego wniosku pomijamy, ponieważ jest on analogiczny do dowodu twierdzenia A.

Jeżeli

$$v_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n),$$

to szeregowi (1) odpowiada n szeregów liczbowych

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^i \qquad i = 1,2,\dots,n. \tag{5}$$

Wiadomo, że zbieżność szeregu (1) jest równoważna zbieżności każdego z szeregów (5)

Udowodnimy

Lemat 1

Permutacja $\{N_k\}$ jest permutacją sumowalną dla szeregu (1) wtedy i tylko wtedy, gdy permutacja ta jest permutacją sumowalną dla każdego z szeregów (5).

Dowód

W szczególności permutacja $\{N_k\}$ spełnia warunki

$$\lim_{k\to\infty} k\, v_k = 0, \tag{6}$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty} k\, v_{N_k} = 0 \tag{7}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy permutacja ta spełnia warunki

$$\lim_{k\to\infty} k\, x_k^i = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{k\to\infty} k\, x_{N_k}^i = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{9}$$

Jest to oczywiste wobec równoważności (5) i (1). Warunki (6), (7) są oczywiście odpowiednio równoważne warunkom (8), (9). Q.e.d.

Rozpatrzmy obecnie dwa ciągi wektorów z przestrzeni E^n

$$\left\{a_k\right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \left\{b_k\right\}_{k=1}^{\infty} \tag{10}$$

Określenie

Jeżeli dla każdego i, $i = 1,2,3,\ldots,n$ współrzędne ciągu (10) spełniają warunek

$$\lim \frac{a_k^i}{b_k^i} = C,$$

lub

$$\lim \frac{a_k^i}{b_k^i} = 0$$

to odpowiednio

$$a_k = O(b_k)$$
$$a_k = o(b_k).$$

Na podstawie określenia udowodnimy

Lemat 2

Jeżeli dla szeregu (1) permutacja $\left\{N_k\right\}$ spełnia warunki (6), (7) a wyrazy szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k, \tag{11}$$

są co najwyżej $O(v_k)$, to permutacja $\left\{N_k\right\}$ też spełnia warunki (6), (7) dla szeregu (11).

Dowód

$\left\{N_k\right\}$ czyni zadość warunkom (6), (7) dla szeregu (1), czyli

$$\lim_{k\to\infty} k\, w_k \leq \lim_{k\to\infty} k\, v_k = 0 \tag{12}$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty} k\, w_{N_k} \leq \lim_{k\to\infty} k\, v_{N_k} \tag{13}$$

Koniec dowodu

Łatwo zauważyć, że dla każdego bezwzględnie zbieżnego szeregu dowolna permutacja jest sumowalna.

Przykład 1

Rozpatrzmy obecnie warunkowo zbieżny szereg

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k \lg_2 k}. \tag{14}$$

Szereg (14) przekształcimy w następujący sposób

$$a_2+(a_3+a_4) + (a_5+a_6+a_7+a_8) + \ldots + (a_{2^{l-1}+1} + \ldots + a_{2^l}) + \ldots$$

Wyrazy w nawiasach dowolnie przestawiamy, a następnie opuszczamy nawiasy. Tak otrzymany szereg posiada sumowalną permutację $\{N_k\}$.
Dla

$$l = 1,2,3,\ldots \quad i \quad 2^{l-1} < k \leqslant 2^l$$

wyrazy N_k szukanej permutacji spełniają związek

$$k+1-2^{k-1} \leqslant N_k \leqslant k-1+2^{l-1}. \tag{15}$$

Przykład 2

Niech dany będzie szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k,$$

gdzie

$$v_k = (-1)^k \left(\frac{c_1}{k \lg_2 k}; \frac{c_2}{k \lg_2 k}; \ldots \frac{c_n}{k \lg_2 k} \right) \tag{16}$$

oraz

$$c_i \geqslant 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Grupujemy wyrazy szeregu (16) w następujący sposób

$$v_2 + (v_3+v_4) + (v_5+v_6+v_7+v_8) + \ldots + (v_{2^{l-1}+1} + \ldots + v_{2^l}) + \ldots$$

Permutujemy dowolnie wyrazy w nawiasach, następnie nawiasy opuszczamy. Tak otrzymana permutacja jest sumowalna na podstawie (14), (15) i lematu 1.

LITERATURA

[1] Jasek B.: Uber Umordnung von Reihen Colloqium Mathematicum 7 (1960) p. 257-259.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЯДОВ В ПРОСТРАНСТВЕ E^n

Р е з ю м е

Перестановки натуральных чисел называем суммируемыми, если будет исполнено условие (2).

В работе доказано теорему: Если элементы ряда (1) и перестановка $\{N_k\}$ натуральных чисел исполняет условия (6), (7) тогда перестановка $\{N_k\}$ суммируется.

ON PRESENTING SERIES IN E^n SPACE

S u m m a r y

The permutation of natural numbers is summable if the condition (2) is true.

We prooved the following theorem in this paper: If elements of series (1) and the permutation $\{N_k\}$ of natural numbers Satisfy conditions (6), (7), then the permutation $\{N_k\}$ is summable.