ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 30 Nr kol. 560

Jerzy TIMMLER
Instytut Matematyki - Politechnika Śląska

DOWÓD PEWNEGO TWIERDZENIA PODANEGO PRZEZ DVORETZKEGO I HANANIEGO

Streszczenie. W powyższej pracy udowodniono następujące twierdzenie: Dla każdego ciągu wektorów (1) z przestrzeni E^2 istnieje ciąg znaków $\{\varepsilon_i\}$, gdzie $\varepsilon_i = 1$, taki że nierówność (2) jest spełniona.

W pracy [1] podano następujące

Twierdzenie A

Dla skończonego ciągu wektorów

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \tag{1}$$

z przestrzeni E^2 o długościach nie większych od 1 można dobrać ciąg znaków $\varepsilon_i = \pm 1$ $i = 1,2,\ldots,n$ tak, by

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i v_i\right| \leqslant \sqrt{3} \qquad k = 1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

Tamże jest jedynie idea dowodu. Prof. Z. Zahorski zachęcił mnie do napisania pełnego dowodu powyższego twierdzenia.

Niech dane będą trzy wektory

$$v_1, v_2, v_3 \tag{3}$$

w przestrzeni E^2.

Lemat 1

Wśród wektorów (3) istnieje taka para, że kąt pomiędzy wektorami tej pary zawiera się w przedziale $\left[0 \frac{\pi}{3}\right]$ lub $\left[2\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

Prosty dowód lematu pomijamy. Łatwo zauważyć, że lemat 1 prawdziwy, jeżeli zamiast trzech wektorów na płaszczyźnie rozpatrywać będziemy cztery i więcej wektorów.

Dla ciągu (1) określamy teraz pomocniczy ciąg wektorów

$$\{v_{rk}\}. \tag{4}$$

gdzie

$$r = 0,1,2,\dots,n-3, \qquad k = 1,2,\dots,n-r.$$

Jeżeli $r=0$, to wektory ciągu (4) są tożsame z wektorami ciągu (1). Dla $k \leqslant 4$ przy ustalonym r przez

$$v_{r\alpha_{1,r}},\ v_{r\alpha_{2,r}},\ \alpha_{1,r} \leqslant \alpha_{2,r} \leqslant 4 \tag{5}$$

oznaczymy te spośród wektorów ciągu (4), które tworzą między sobą kąt $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ lub $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$.

Definicja 1

Jeżeli przy ustalonym r dane są wektory (5), to wektory ciągu (4) dla $r+1$ tworzymy w następujący sposób

$$v_{r+1,k} = v_{r,k} \qquad \text{gdy} \qquad k < \alpha_{1,r}$$

$$v_{r+1,k} = v_{r,k+1} \qquad \text{gdy} \qquad \alpha_{1,r} < k < \alpha_{2,r}$$

$$v_{r+1,k} = v_{r,k+2} \qquad \text{gdy} \qquad \alpha_{2,r} \leqslant k \leqslant 4$$

$$v_{r+1,3} = \begin{cases} v_{r\alpha_{1,r}} - v_{r\alpha_{2,r}} & \text{gdy} \quad \sphericalangle(v_{r\alpha_{1,r}}\ v_{r\alpha_{2,r}}) \leqslant \frac{\pi}{3} \\ v_{r\alpha_{1,r}} + v_{r\alpha_{2,r}} & \text{gdy} \quad \frac{2\pi}{3} \leqslant \sphericalangle(v_{r\alpha_{1,r}}\ v_{r\alpha_{2,r}}) \leqslant \pi \end{cases}$$

$$v_{r+1,k} = v_{r,k+1} \qquad \text{gdy} \qquad 4 \leqslant k \leqslant n-r$$

o ile takie k istnieje.

Wniosek 1

Dla dowolnego $r = 0,1,2,\dots,n-3$ i $k = 1,2,\dots,n-r$ wektory ciągu (4) posiadają długość nie większą od 1.

Dowód

Z określenia ciągu (4) wiadomo, że $|v_{o,k}| \leqslant 1$ dla każdego k. Na podstawie definicji 1 można zauważyć, że wszystkie wyrazy ciągu (4) też mają długość nie większą od 1. Należałoby tylko sprawdzić długość wektora $v_{r+1,3}$. Wektor $v_{r+1,3}$ jest sumą lub różnicą wektorów $v_{r\alpha_{1r}}$, $v_{r\alpha_{2r}}$. Z twierdzenia Carnota wiadomo, że $|v_{r+1,3}| < 1$, ponieważ kąty pomiędzy wektorami $v_{r\alpha_{1r}}$, $v_{r\alpha_{2r}}$ należą do przedziału $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ lub $\left[\frac{2\pi}{3},\right]$.

Wniosek 2

Jeżeli $r = n-3$, to w ciąg (4) zawiera tylko trzy wyrazy.

Na podstawie definicji 1 określimy teraz pewien ciąg znaków $\varepsilon_{r,k}$ o wartościach +1 lub -1.

Definicja 2

Jeżeli obierzemy znaki ciągu ε_{rk} przy ustalonym r+1, to

$$\varepsilon_{rk} = \varepsilon_{r+1,k} \quad \text{gdy} \quad k < \alpha_{1,r}$$

$$\varepsilon_{r,\alpha_{1,r}} = \varepsilon_{r+1,3}$$

$$\varepsilon_{r,k} = \varepsilon_{r+1,\,k+1} \quad \text{gdy} \quad \alpha_{1,r} < k < \alpha_{2,r}$$

$$\varepsilon_{r\alpha_{2,r}} = \begin{cases} -\varepsilon_{r+1,3} & \text{gdy} \quad \sphericalangle(v_{r\alpha_{1r}}, v_{r\alpha_{2r}}) \leqslant \frac{\pi}{3} \\ \varepsilon_{r+1,3} & \text{gdy} \quad \frac{2\pi}{3} < \sphericalangle(v_{r\alpha_{1r}}, v_{r\alpha_{2r}}) \leqslant \pi \end{cases}$$

$$\varepsilon_{r,k} = \varepsilon_{r+1,k-2} \quad \text{gdy} \quad \alpha_{2r} \leqslant k \leqslant 4$$

$$\varepsilon_{r,k} = \varepsilon_{r+1,k+1} \quad \text{gdy} \quad 4 < k \leqslant n-r+1$$

o ile takie k istnieją.

Korzystając z definicji 1 i 2 udowodnimy.

Lemat 2

$$\left|\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{r,k} v_{r,k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{4} \varepsilon_{r,k} v_{r,k}\right| \tag{6}$$

Dowód

Sumę po lewej stronie równości (6) możemy napisać w następującej postaci

$$\left|\varepsilon_{r,1} v_{r,1} + \varepsilon_{r,2} v_{r,2} + \varepsilon_{r,3} v_{r,3}\right|. \tag{7}$$

Korzystając z definicji 1 mamy

$$\left|\varepsilon_{r,1} v_{r,1} + \varepsilon_{r,3} v_{r,3} + \varepsilon_{r,3}(v_{r\alpha_{1,n-4}} - v_{r\alpha_{2,n-4}})\right|. \tag{8}$$

Z (8) i definicji 2 wynika

$$\left|\varepsilon_{r,1} v_{r,1} + \varepsilon_{r,2} v_{r,2} + \varepsilon_{r\alpha_{1,n-4}} v_{r,\alpha_{1,r}} + \varepsilon_{r\,2,r} v_{r\alpha_{2,r}}\right|. \tag{9}$$

Pisząc zależność (7), (8), (9) skorzystaliśmy z założenia, że:

$$\alpha_{1,r} = 3 \quad \alpha_{2,r} = 4 \quad \sphericalangle(v_{r\alpha_{1,r}}\ v_{r\alpha_{2,r}}) \sphericalangle \frac{\pi}{3} \tag{10}$$

Zależność (9) dowodzi równości (6) przy założeniu (10). W innych przypadkach dowód jest analogiczny.

Lemat 3

Dla dowolnej liczby $q \leq r$ istnieje ciąg znaków $\varepsilon_{r-q,k}$ taki, że

$$\left|\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{r,k}\, v_{r,k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{3+q} \varepsilon_{r-q,k}\, v_{r-q,k}\right|, \tag{11}$$

gdzie wektory $v_{r,k}$ są wyrazami ciągu (4).

Dowód

Z definicji 1 wynika, że należałoby lemat 2 udowodnić w dwu przypadkach

1^{o} jeżeli $v_{r+1,3} = v_{r\alpha_{1},r} - v_{r\alpha_{2},r}$

2^{o} jeżeli $v_{r+1,3} = v_{r\alpha_{1},r} + v_{r\alpha_{2},r}$

Udowodnimy tylko przypadek 1^{o}, ponieważ dowód w przypadku 2^{o} jest analogiczny. Dowód indukcyjny ze względu na q. Zakładamy, że równość (11) jest prawdziwa dla q, wykażemy jej prawdziwość dla q+1.

Na podstawie definicji 1 prawą stronę równości (11) zapiszemy w następujący sposób

$$\left|\sum_{k=1}^{3+q} \varepsilon_{r-q,k}\, v_{r-q,k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{r-q,k}\, v_{r-q,k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=4}^{3+q} \varepsilon_{r-q,k}\, v_{r-q,k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\alpha_{1},r-q-1^{-1}} \varepsilon_{r-q,k}\, v_{r-q-1,k} + \right.$$

$$+ \sum_{k=\alpha_{1},r-q-1^{+1}}^{\alpha_{2},r-q-1^{-2}} \varepsilon_{r-q,k}\, v_{r-q-1,k} + \sum_{k=\alpha_{2},r-q-1^{+1}}^{2} \varepsilon_{r-q,k}\, v_{r-q-1^{+}}$$

$$+ \varepsilon_{r-q,3}(v_{r-q-1},\, \alpha_{1,r-q-1} - v_{r-q-1},\, \alpha_{2,r-q-1} +$$

$$\left. + \sum_{k=5}^{3+q+1} \varepsilon_{r-q-k},\, v_{r-q-1,k}\right|.$$

Z definicji 2 dostajemy

$$\left|\sum_{k=1}^{3+q} \varepsilon_{r-q,k}\, v_{r-q,k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\alpha_{1},r-q-1^{+1}} \varepsilon_{r-q-1,k}\, v_{r-q-1,k} + \right.$$

$$+\sum_{k=\alpha_{1,r-q-1}+1}^{\alpha_{2,r-q-1}-2} \varepsilon_{r-q-q,k}\, v_{r-q-1,k} + \sum_{k=\alpha_{2,r-q-1}+1}^{2} \varepsilon_{r-q-1,k}\, v_{r-q-1,k} +$$

$$+ \varepsilon_{r-q-1,\,\alpha_{1,r-q-1}}\, v_{r-q-1,\,\alpha_{1,r-q-1}} + \varepsilon_{r-q-1,\,\alpha_{2,r-q-1}}\,\cdot$$

$$\cdot\, v_{r-q-1,\,\alpha_{2,r-q-1}} + \sum_{k=5}^{3+2+1} \varepsilon_{r-q-1,k}\, v_{r-q-1,k}\Bigg| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{3+q+1} \varepsilon_{r-q-1,k}\, v_{r-q-1,k}\right|.$$

Na podstawie twierdzenia o indukcji widać, że lemat jest prawdziwy dla każdego $q = 0,1,2,\ldots,r$. Koniec dowodu.

Korzystając z lematu 2 udowodnimy twierdzenie A.

Dowód twierdzenia A

Jeżeli $r = n-3$, to ciąg (4) posiada trzy wyrazy, którymi są wektory z przestrzeni E^2 o długościach nie większych niż 1. Oczywistym jest, że twierdzenie A jest prawdziwe dla dwu wektorów, przy odpowiednim doborze czynnika +1 lub -1. Łatwo zauważyć, korzystając z lematu 1, że twierdzenie A jest także prawdziwe dla trzech wektorów. Korzystając z definicji 1, 2 oraz lematu 3 widać, że istnieje ciąg znaków $\varepsilon_{rk} = \pm 1$ taki, że

$$\bigwedge_{r} \left|\sum_{i=1}^{k} {}_{r,i}\, v_{r,i}\right| < \sqrt{3}, \tag{13}$$

gdzie $r = 0,1,2,\ldots,n-3$.

Jeżeli $r=0$, to ciąg $\varepsilon_{0,i} = \pm 1$ $i = 1,2,\ldots,n$ jest szukanym ciągiem znaków spełniającym nierówność (2). Koniec dowodu.

Stała podana w twierdzeniu A nie jest minimalne. Można wnioskować, że istnieje mniejsza niż podana w twierdzeniu A stała. Stałą $\sqrt{3}$ można zmniejszyć lecz nie może być ona mniejsza od $\sqrt{2}$.

Przykład

Rozpatrzmy trzy wektory

$$v_1(1,0),\quad v_2\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right),\quad v_3\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\, \frac{\sqrt{6}}{4}\right).$$

Łatwo sprawdzić, że kąt pomiędzy wektorami v_2, v_3 jest mniejszy od $\frac{\pi}{3}$.

Jeżeli

$$|v_1-v_2| = |-v_1+v_2| = \sqrt{1,5}$$

to

$$|v_1-v_2+v_3| = \sqrt{2,5}$$

oraz

$$|-v_1+v_2-v_3| = |-v_1+v_2+v_3| = \sqrt{2,5}$$

LITERATURA

[1] Dvoretzky A. and Hanani C.: Sur les changements des signes des termes d'une serie a termes complexes. Comptes rendus l'Academie des Sciences (Paris) 225, (1947), p. 516-518.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ПРЕДСТАВЛЕННОЙ ДВОРЕЦКИМ И ГУНАНИ

Р е з ю м е

В работе доказано следующую теорему. Для каждой векторной последовательности (1) в пространстве E^2 существует последовательность знаков $\{\varepsilon_i\}$ где $\varepsilon_i = \pm 1$ такая, что неравенство (2) будет исполнено.

THE PROOF FOR CERTAIN THEOREM GIVEN BY DVORETZKY AND HANANIE

S u m m a r y

In this paper we have proved the following theorem: For every vector sequence (1) from the space E^2 there exists the sequence of numbers $\{\varepsilon_i\}$, where $\varepsilon_i = \pm 1$ is such that the inequality (2) is true.