ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 30 Nr kol. 560

Jerzy TROJAN

O WYKŁADNIKU ZBIEŻNOŚCI

Streszczenie. W pracy badana jest mało używana definicja wykładnika zbieżności. W klasyczny sposób wyprowadza się to pojęcie przy pomocy wzoru (1), my zajmiemy się wzorem (3). Podane są dwa twierdzenia:

Twierdzenie 1

Dany jest ciąg $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \in R^+$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $1 < \varrho(\{\alpha_n\}) < \infty$. Wówczas:

1^o $\mu(\{\alpha_n\}) \geqslant \varrho(\{\alpha_n\})$

2^o $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^p} = K$, $K \neq 0 \Rightarrow \mu(\{\alpha_n\}) = \varrho(\{\alpha_n\}) = p$

3^o Jeśli $\mu(\{\alpha_n\}) < \infty$, to $\forall \delta > 0$ $\exists \{\beta_n\}$ $\alpha_n \leqslant \beta_n$ $n=1,2,\ldots$

$\mu(\{\beta_n\}) = \varrho(\{\beta_n\})$ $\mu(\{\alpha_n\}) - \delta < \mu(\{\beta_n\}) \leqslant \mu(\{\alpha_n\})$

Twierdzenie 2

Dane są ciągi $\{\alpha_n\}$, $\{\gamma_n\}$ o wyrazach nieujemnych, spełniające nierówność (8). Jeśli jeden z wykładników zbieżności $\mu(\{\alpha_n\})$ lub $\mu(\{\beta_n\})$ jest większy od 1, to $\mu(\{\alpha_n\}) = \mu(\{\gamma_n\})$.

Podany jest również wzór (7) pozwalający na wyliczenie wykładnika zbieżności μ.

Celem pracy jest spopularyzowanie innej niż zazwyczaj spotykanej definicji wykładnika zbieżności ciągu iteracji. Przez analogię do kryteriów d'Alamberta i Cauchy, dotyczących zbieżności szeregów, można wprowadzić pierwiastkowe kryterium szybkości zbieżności ciągów, lepsze w pewnym sensie od najczęściej stosowanych wzorów, wykorzystujących ilorazy kolejnych wyrazów. Kryterium to zostało wprowadzone w pozycji [3] bibliografii.

Zajmiemy się ciągami liczbowymi o wyrazach rzeczywistych i dodatnich, zbieżnymi ponadto do zera. Ciągi takie znajdują zastosowanie przy badaniu zbieżności metod iteracyjnych (patrz np [1]). Szybkość zbieżności ciągu można scharakteryzować przy pomocy pojęcia wykładnika zbieżności.

Definicja 1

Niech będzie dany ciąg liczb rzeczywistych dodatnich $\{\alpha_n\}$. Niech ponadto $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Wykładnik zbieżności $\varrho(\{\alpha_n\})$ definiujemy wzorem

$$\varrho(\{\alpha_n\}) = \sup\left\{p: \limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^p} < \infty\right\}. \tag{1}$$

Powyższa definicja posiada pewną niedogodność. Rozpatrzmy bowiem ciąg

$$\alpha_n = 10^{-2^{2\left[\frac{n}{2}\right]}}. \tag{2}$$

Zgodnie ze wzorem (1) otrzymamy $\rho(\{\alpha_n\}) = 1$ mimo, że można tu było oczekiwać zbieżności kwadratowej: ciąg (2) jest nie wolniej zbieżny niż ciąg $\{\beta_n\}$, gdzie

$$\beta_n = 10^{-2^{n-1}},$$

a jest oczywiste, że

$$\rho(\{\beta_n\}) = 2.$$

Dla uniknięcia tego przykrego faktu wprowadzimy nową definicję wykładnika zbieżności, o tyle "lepszą", o ile lepsze w badaniu szeregów liczbowych jest kryterium Cauchy od kryterium d'Alamberta.

Definicja 2

Niech będzie dany ciąg liczb rzeczywistych dodatnich $\{\alpha_n\}$. Niech ponadto $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. Wykładnik zbieżności $\mu(\{\alpha_n\})$ definiujemy wzorem

$$\mu(\{\alpha_n\}) = \sup\left\{p:\ \limsup_{n\to\infty} \alpha_n^{\frac{1}{p^n}} = 0\right\}. \tag{3}$$

Zauważmy, że wykładnik zbieżności μ zdefiniowany powyżej posiada własność monotoniczności, której nie miał wykładnik ρ w sensie definicji 1. Mianowicie

$$\alpha_n \leq \beta_n \quad \text{dla} \quad n > N \Rightarrow \mu(\{\alpha_n\}) \geq \mu(\{\beta_n\})$$

Przed podaniem twierdzenia charakteryzującego nowo wprowadzony wykładnik μ zaprezentujemy lemat pomocny przy jego dowodzie

Lemat

Dany jest ciąg $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$ $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. Wówczas

$$\sup\left\{p:\ \limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^p} < \infty\right\} = \sup\left\{p:\ \limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^p} = 0\right\} \tag{4}$$

$$\sup\left\{p:\ \limsup_{n\to\infty} \alpha_n^{p^{-n}} < 1\right\} = \sup\left\{p:\ \limsup_{n\to\infty} \alpha_n^{p^{-n}} = 0\right\} \tag{5}$$

Dowód

Oznaczmy

$$P_1 = \left\{p \geq 0: \limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^p} < \infty\right\} \qquad P_2 = \left\{p \geq 0: \limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^p} = 0\right\}$$

$$Q_1 = \left\{p \geq 0: \limsup_{n\to\infty} \alpha_n^{p^{-n}} < 1\right\} \qquad Q_2 = \left\{p \geq 0: \limsup_{n\to\infty} \alpha_n^{p^{-n}} = 0\right\}.$$

Następujące własności zbiorów P_i $i=1,2$ są oczywiste

$$0 \in P_1$$

$$p_0 \in P_1, \quad p_1 < p_0 \Rightarrow \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^{p_1}} < \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^{p_0}} \Rightarrow p_1 \in P_1$$

$$p_0 \in P_2 \Rightarrow p_0 \in P_1 \quad \text{czyli} \quad P_2 \subset P_1 \Rightarrow \sup P_1 \geq \sup P_2.$$

Pozostaje udowodnić nierówność odwrotną. Jeżeli $\sup P_1 = 0$, to $\sup P_2 = 0$ i równość (4) jest prawdziwa. Załóżmy więc, że $\sup P_1 > 0$. Wtedy, dla dowolnie małego δ istnieje $p_0 \in P_1$ takie, że $\sup P_1 - p_0 < \frac{1}{2}\delta$ i ciąg $\beta_n = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^{p_0}}$ jest ograniczony. Obieramy teraz $p_1 = p_0 - \frac{1}{2}\delta$. Jest

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^{p_1}} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^{p_0}} \alpha_n^{\frac{1}{2}\delta} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Otrzymujemy więc, że

$$\forall \delta > 0 \ \exists p_1 : \sup P_1 - p_1 < \delta \quad \text{i} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^{p_1}} = 0$$

a stąd wynika nierówność $\sup P_1 < \sup P_2$.

W podobny sposób udowadniamy (5)

$$1 \in Q_1$$

$$p_0 \in Q_1, \quad p_1 < p_0 \Rightarrow \alpha_n^{p_1^{-n}} < \alpha_n^{p_0^{-n}} \Rightarrow p_1 \in Q_1$$

$$p_0 \in Q_2 \Rightarrow p_0 \in Q_1 \quad \text{czyli} \quad Q_2 \subset Q_1 \Rightarrow \sup Q_1 \geq \sup Q_2$$

Jeżeli $\sup Q_1 = 1$ to $\sup Q_2 = 1$. Zakładamy więc, że $\sup Q_1 > 1$. Wtedy istnieje $p_0 \in Q_1$ takie, że $\sup Q_1 - p_0 < \frac{1}{2}\delta$ dla dowolnie małego δ oraz $\alpha_n^{p_0^{-n}} < K < 1$ dla dostatecznie dużych n. Definiując p_1 wzorem $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{2p_0^2}\delta$, otrzymujemy

$$\alpha_n^{p_1^{-n}} = \alpha_n^{\left(\frac{1}{p_0} + \frac{\delta}{2p_0^2}\right)^n} = \alpha_n^{\frac{1}{p_0^n}\left(1 - \frac{\delta p_0}{2p_0^2}\right)^n} < K^{(1 + \frac{\delta}{2p_0})^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Oznacza to, że

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p_1: \ \sup Q_1 - p_1 < \delta \quad \text{i} \quad \limsup_{n\to\infty} \alpha_n^{p_1^{-n}} = 0$$

czyli $p_1 \in Q_2$, skąd wynika, że $\sup Q_1 \leqslant \sup Q_2$

Możemy teraz sformułować

<u>Twierdzenie 1</u>

Dany jest ciąg $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $1 < \varrho(\{\alpha_n\}) < \infty$. Wówczas

1° $\mu(\{\alpha_n\}) \geqslant \varrho(\{\alpha_n\})$

2° $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^p} = K$, $K \neq 0 \Rightarrow \mu(\{\alpha_n\}) = \varrho(\{\alpha_n\}) = p$

3° Jeżeli $\mu(\{\alpha_n\}) < \infty$ to $\forall \delta > 0 \ \exists \{\beta_n\}$ $\alpha_n \leqslant \beta_n$ $n=1,2,\ldots,$ $\mu(\{\beta_n\}) = \varrho(\{\beta_n\})$, $\mu(\{\alpha_n\}) - \delta < \mu(\{\beta_n\}) \leqslant \mu(\{\alpha_n\})$

<u>Dowód</u>

1° Dla dowolnie małego δ spełniającego nierówność $\delta < \varrho(\{\alpha_n\}) - 1$, obieramy $q = \varrho(\{\alpha_n\}) - \delta$. Z (4) wynika, że

$$\exists N \ \forall n > N \ \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^q} < \delta \Rightarrow \alpha_{N+k} < \delta^{1+q+\ldots+q^{k-1}} \alpha_N^{q^k}, \quad \alpha_N < 1$$

$$\alpha_{N+k}^{\frac{1}{q^{N+k}}} < \delta^{\frac{1}{q^{N+k}} + \ldots + \frac{1}{q^{N+1}}} \alpha_N^{\frac{1}{q^N}} \xrightarrow{k\to\infty} \delta^{\frac{1}{q^N(q-1)}} \alpha_N^{\frac{1}{q^N}} < 1$$

czyli $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n^{q^{-n}} < 1$. Korzystając teraz z (5) i przechodząc z δ do zera otrzymujemy $\mu(\{\alpha_n\}) \geqslant \varrho(\{\alpha_n\})$.

2^0 Równość $\rho(\{\alpha_n\}) = p$ wynika z (4). Z uwagi na punkt 1^0 wystarczy udowodnić nierówność $\mu(\{\alpha_n\}) \leq \rho(\{\alpha_n\})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^p} = K, \quad K \neq 0 \Rightarrow \exists N: \alpha_{N+k} > \left(\frac{K}{2}\right)^{1+p+\ldots+p^{k-1}} \alpha_N^{p^k}$$

dla $k > 0$. Załóżmy, że $q > p$ i zbadajmy granicę wyrażenia

$$\left[\left(\frac{K}{2}\right)^{1+p+\ldots+p^{k-1}} \alpha_N^{p^k}\right]^{\frac{1}{q^{N+k}}} \quad \text{dla} \quad k \to \infty$$

$$\frac{1+p+\ldots+p^{k-1}}{q^{N+k}} = \frac{p^k - 1}{q^{n+k}(p-1)} = \frac{1}{q^N(p-1)}\left[\left(\frac{p}{q}\right)^k - \frac{1}{q^k}\right] \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

także $\frac{p^k}{q^{N+k}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, skąd wynika $\liminf\limits_{k\to\infty} \alpha_{N+k} \geq 1$.

Łatwo stąd wywnioskować, że $\mu(\{\alpha_n\}) \leq p$.

3^0 Dla danego $\delta > 0$ obieramy N tak duże, by dla $n > N$ było $\alpha_n^{p^{-n}} < \delta$, gdzie $p = \mu(\{\alpha_n\}) - \delta$, czyli $\alpha_n < \delta^{p^n}$ dla $n > N$. Jeżeli teraz zdefiniujemy ciąg $\{\beta_n\}$ wzorem

$$\beta_n = \begin{cases} \alpha_n & \text{dla} \quad n \leq N \\ \delta^{p^n} & \text{dla} \quad n > N, \end{cases}$$

to będzie on spełniał oczywiście warunki punktu 3^0.

W pracy [2] podany jest efektywny wzór, pozwalający obliczyć wykładnik zbieżności ρ. Mianowicie

$$\rho(\{\alpha_n\}) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln \alpha_{n+1}}{\ln \alpha_n} \tag{6}$$

Stosując podobne rozumowanie można pokazać, że $\mu(\{\alpha_n\})$ zdefiniowane wzorem (3) można wyliczyć przy pomocy wzoru

$$\mu(\{\alpha_n\}) = \exp\left\{\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \ln \frac{1}{\alpha_n}\right\} \tag{7}$$

(wzory (6) i (7) są prawdziwe dla wykładników ρ i μ większych od jedności)

Aby wykazać jego prawdziwość wystarczy pokazać, że jeżeli

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \ln \frac{1}{\alpha_n} = \ln p_0,$$

to

$$\limsup \alpha_n^{p^{-n}} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 1 \leqslant p < p_0 \\ 1 & \text{dla} \quad p_0 < p \end{cases}$$

Niech $p < p_0$. Wówczas istnieje $p_1 \in (p, p_0)$ takie, że dla dostatecznie dużych n

$$\ln \ln \frac{1}{\alpha_n} > n \ln p_1 \Rightarrow \alpha_n < e^{-p_1^n} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \alpha_n^{p^{-n}} \leqslant \lim e^{-\left(\frac{p_1}{p}\right)^n} = 0$$

Jeżeli natomiast $p > p_0$, to istnieje $p_2 \in (p_0, p)$ i istnieje podciąg $\{n_i\}_i$ taki, że

$$\ln \ln \frac{1}{\alpha_{n_i}} < n_i \ln p_2 \Rightarrow \alpha_{n_i} > e^{-p_2^{n_i}}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n^{p^{-n}} > \limsup_{i\to\infty} \alpha_{n_i}^{p^{-n_i}} > \lim_{n\to\infty} e^{-\left(\frac{p_2}{p}\right)^n} = 1$$

Wróćmy teraz do naszego ciągu danego wzorem (2)

$$\alpha_n = 10^{-2^{2\left[\frac{n}{2}\right]}} = e^{-2^{2\left[\frac{n}{2}\right]}\ln 10}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \ln \frac{1}{\alpha_n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \ln e^{2^{2\left[\frac{n}{2}\right]}\ln 10} =$$

$$\liminf_{\to\infty} \frac{1}{n} \ln(2^{2\left[\frac{n}{2}\right]} \ln 10) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} (2\left[\frac{n}{2}\right] \ln 2 + \ln \ln 10) = \ln 2.$$

Otrzymujemy, jak można było oczekiwać $\mu(\{\alpha_n\}) = 2$.

Czasami spotyka się inną metodę badania szybkości zbieżności ciągu iteracji $\{x_n\}$ do rozwiązania x^*. Zamiast oceny $\alpha_n = |x_n - x^*|$, która może być w pewnych wypadkach trudna ze względu na nieznajomość rozwiązania dokładnego x^*, bada się wielkość $\gamma_n = |x_{n+1} - x_n|$ (patrz [2]). W naszym przypadku problem sprowadza się do oceny szybkości zbieżności ciągu $\{\gamma_n\}$ spełniającego nierówność

$$|\alpha_n - \alpha_{n+1}| \leqslant |\gamma_n| \leqslant \alpha_n + \alpha_{n+1} \tag{8}$$

Można udowodnić

Twierdzenie 2

Dane są ciągi $\{\alpha_n\}$ i $\{\gamma_n\}$ o wyrazach nieujemnych spełniające nierówność (8). Jeżeli jeden z wykładników zbieżności $\mu(\{\alpha_n\})$ lub $\mu(\{\gamma_n\})$ jest większy od 1 to $\mu(\{\alpha_n\}) = \mu(\{\gamma_n\})$.

Dowód

$\gamma_n \leqslant \beta_n$, gdzie $\beta_n = 2\max\{\alpha_n, \alpha_{n+1}\}$ i $\mu(\{\beta_n\}) = \mu(\{\alpha_n\})$, skąd wynika $\mu(\{\gamma_n\}) \geqslant \mu(\{\alpha_n\})$.

Załóżmy teraz, że $\gamma_n < 2^{-\varrho^n}$ dla $n > N$. Z (8) wynika, że

$$|\alpha_{N+k} - \alpha_N| < \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{N+i} < \sum_{i=0}^{k-1} M(\varrho)\, 2^{-\varrho^N}.$$

Stąd mamy, że $\alpha_N - M(\varrho)\, 2^{-\varrho^N} < \alpha_{N+k}$, a ponieważ $\alpha_{N+k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ to $\alpha_N \leqslant M(\varrho) 2^{-\varrho^N}$ czyli

$$\mu(\{\alpha_n\}) \geqslant \varrho \tag{9}$$

Należy rozróżnić dwa przypadki

1° $\mu(\{\gamma_n\}) = \infty$. Wtedy dla dowolnie dużego ϱ istnieje N takie, że $\gamma_n < 2^{-\varrho^n}$ dla $n > N$, wykorzystując (9) otrzymujemy $\mu(\{\alpha_n\}) = \infty$.

2° $\mu(\{\gamma_n\}) = p < \infty$, na podstawie udowodnionej pierwszej części twierdzenia możemy założyć $p > 1$. Z twierdzenia 1 wynika, że

$$\forall \delta\ \exists N\ \gamma_n < 2^{-\varrho^n} \quad \text{dla} \quad n > N \quad \text{i} \quad |\varrho - p| < \delta .$$

Przechodząc z δ do zera we wzorze (9) otrzymujemy $\mu(\{\alpha_n\}) \geqslant p$.

Analogiczne twierdzenie w przypadku wykładnika ϱ nie jest prawdziwe. Jako kontrprzykład możemy znów skorzystać z ciągu $\{\alpha_n\}$ danego wzorem (2) i zdefiniować γ_n wzorem $\gamma_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$. Ponieważ $\gamma_{2k} = 0$ wzór (1) traci sens.

LITERATURA

[1] Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej. Warszawa 1975.

[2] Bartłomiejczyk R.: O pewnych własnościach ciągów związanych z rzędem zbieżności. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Seria Mat.-Fiz. z. 24, 1973, s.15-23.

[3] Ortega J.M., Rheinboldt W.C.: Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. New York, London, 1970.

О ПОКАЗАТЕЛЕ КОНВЕРГЕНЦИИ

Р е з ю м е

В работе была исследована мало-употребляемое определение показателя конвергенции. Классическим способом вводится это понятие при помощи формулы (1), мы займёмся формулой (3). Поданы две теоремы:

Теорема 1

Дано: $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \in R^+$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $1 < \varrho(\{\alpha_n\}) < \infty$, тогда

1° $\mu(\{\alpha_n\}) \geqslant \varrho(\{\alpha_n\})$

2° $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = K$, $K \neq 0 \Rightarrow \mu(\{\alpha_n\}) = \varrho(\{\alpha_n\}) = p$

3° Если $\mu(\{\alpha_n\}) < \infty$, то $\forall \delta > 0 \ \exists \{\beta_n\}$ $\alpha_n \leqslant \beta_n$ $n=1,2,\ldots$

$\mu(\{\beta_n\}) = \varrho(\{\beta_n\})$ $\mu(\{\alpha_n\}) - \delta \leqslant \mu(\{\beta_n\}) \leqslant \mu(\{\alpha_n\})$

Теорема 2

Дано $\{\alpha_n\}$, $\{\gamma_n\}$ о значениях неотрицательных, становящие неравенство (8) Если один из показателей конвергенции $\mu(\{\alpha_n\})$ или $\mu(\{\beta_n\})$ есть больше 1, то $\mu(\{\alpha_n\}) = \mu(\{\gamma_n\})$.

Подана также формула (7) позволяющая на рассчёт показателя конвергенции μ.

ON THE ORDER CONVERGENCE

S u m m a r y

In the work there has been examined the little used definition of the order of convergence. The classical definition is derived by formula (1), whereas we shall explore the order defined by formula (3).

Two theorems are given:

Theorem 1

Assume that there is given sequence $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \in R^+$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $1 < \varrho(\{\alpha_n\}) < \infty$. Then:

1° $\mu(\{\alpha_n\}) \geqslant \varrho(\{\alpha_n\})$

2° $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = K$, $K \neq 0 \Rightarrow \mu(\{\alpha_n\}) = \varrho(\{\alpha_n\}) = p$

3° If $\mu(\{\alpha_n\}) < \infty$, then $\forall \delta > 0$ $\exists \{\beta_n\}$ $\alpha_n < \beta_n$ $n = 1,2,\ldots$

$\mu(\{\beta_n\}) = \varrho(\{\beta_n\})$ $\mu(\{\alpha_n\}) - \delta < \mu(\{\beta_n\}) < \mu(\{\alpha_n\})$

Theorem 2

Assume that there are given sequences $\{\alpha_n\}$, $\{\gamma_n\}$ of nonnegative numbers satis - fying the inequality (8). If one of the orders of convergence $\mu(\{\alpha_n\})$ or $\mu(\{\gamma_n\})$ is greater than 1, than $\mu(\{\alpha_n\}) = \mu(\{\gamma_n\})$.

There is also given formula (7) which allows the calculation of the order of convergence μ.