ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 30 Nr kol. 560

Kazimierz JAKUBCZYK
Ośrodek Elektronicznej Techniki Obliczeniowej
Politechnika Śląska

INTERPOLACJA WIELOMIANOWYMI FUNKCJAMI SKLEJANYMI DRUGIEGO STOPNIA

Streszczenie. W pracy rozważa się zagadnienie interpolacji funkcji wielomianowymi funkcjami sklejanymi drugiego stopnia. Określa się wybór węzłów interpolacji, zapewniający zgodność wypukłości funkcji interpolowanej i interpolującej. Przedstawia się także iteracyjne postępowanie służące do pewnej optymalizacji aproksymującej funkcji sklejanej.

1. WPROWADZENIE

Przedmiotem rozważań niniejszego artykułu jest zagadnienie interpolacji wielomianowymi funkcjami sklejanymi, zwanymi również funkcjami giętkowymi, giętkimi, giętymi lub też spline funkcjami drugiego stopnia. Praktyczne zastosowanie tych funkcji ma między innymi miejsce w sterowaniu niektórymi automatami [2], [4].

Definicja 1

Niech N będzie dowolnie ustaloną liczbę naturalną, $[a,b]$ przedziałem domkniętym i ograniczonym na prostej rzeczywistej, a Δ jego podziałem postaci

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b.$$

Oznaczmy przez π_n zbiór wielomianów stopnia co najwyżej n-tego ($n \geqslant 1$). Zbiór

$$Sp(n,\Delta) = \left\{ s \in C^{n-1}[a,b] : s(x) \in \pi_n \quad \text{dla} \quad x \in [x_k, x_{k+1}],\ k=0,1,\ldots,N-1 \right\}$$

stanowi n+N wymiarową podprzestrzeń liniową przestrzeni $C^{n-1}[a,b]$. Nazywamy ją przestrzenią wielomianowych funkcji sklejanych (przestrzenią funkcji giętkowych, giętkich, giętych, spline funkcji) stopnia n.

Definicja 2

Punkty $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ nazywamy punktami sklejenia funkcji sklejanej.

Rozważać będziemy zagadnienie interpolacji funkcjami przestrzeni $Sp(2,\Delta)$ dla podziału parzystego

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2N} = b \qquad (N \geq 1) \qquad (1)$$

Problem interpolacji postawiony jest w sposób przypominający zagadnienie interpolacji prostej Hermite'a. Funkcję interpolującą wyznacza się na podstawie znanych jej wartości i wartości jej pierwszej pochodnej w punktach podziału (1) o wskaźnikach parzystych. Swoboda wyboru punktów sklejenia o numeracji nieparzystej pozwala na znalezienie aproksymującej funkcji sklejanej zachowującej wypukłość, a nawet i jej częściową optymalizację.

Istnieje literatura (np. [1], [3], [7]), dotycząca ogólnego zagadnienia interpolacji Hermite'a funkcjami przestrzeni $Sp(n,\Delta)$. Typowe dla interpolacji Hermite'a warunki, które powinna spełniać funkcja interpolująca, narzuca się tam we wszystkich punktach podziału Δ. Rozważania te dotyczą jednak przestrzeni funkcji sklejanych z wielomianów stopnia co najmniej trzeciego, a niejednokrotnie tylko $Sp(2n+1,\Delta)$ $(n \geq 1)$.

Interpolacją funkcjami klasy $Sp(2,\Delta)$ zajmowali się Kammerer, Reddien i Varga [5] oraz Mardsen [6], wyznaczając funkcję interpolującą z pewnego pasmowego układu równań liniowych, utworzonego na podstawie znanych jej wartości w końcach przedziału $[a,b]$ i w punktach $x_{k+1/2} = (x_k + x_{k+1})/2$. Niemożliwe jest jednak zabezpieczenie się przed niepożądanymi punktami przegięcia takiej funkcji interpolującej. Tymczasem w praktycznych zastosowaniach niezmiernie ważnym staje się często zagadnienie zachowania wypukłości funkcji interpolowanej przez funkcję interpolującą.

Oprócz podania globalnych oszacowań błędu interpolacji w pracy przeprowadzona została również analiza funkcji błędu w przypadku, gdy węzły interpolacji dzielą funkcję interpolowaną na odcinki o monotonicznej drugiej pochodnej. Analiza ta prowadzi do iteracyjnego sposobu postępowania służącego do otrzymania optymalnej aproksymującej funkcji sklejanej.

2. ISTNIENIE I JEDNOZNACZNOŚĆ ROZWIĄZANIA

Niech $f \in C^1[a,b]$. Dla ustalonego podziału (1) należy znaleźć $s \in Sp(2,\Delta)$ takie, ażeby dla $i = 0,1,\ldots,N$ zachodziły równości

$$\begin{aligned} s(x_{2i}) &= y_{2i} = f(x_{2i}), \\ s'(x_{2i}) &= y'_{2i} = f'(x_{2i}). \end{aligned} \qquad (2)$$

<u>Twierdzenie 1</u>

Dla danej funkcji $f \in C^1[a,b]$ i podziału (1) istnieje dokładnie jedna funkcja $s \in Sp(2,\Delta)$ spełniająca warunki (2).

<u>Dowód</u>

Nietrudno zauważyć, że można rozpatrywać zagadnienie osobno w każdym z przedziałów $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ $(i = 0,1,\ldots,N-1)$.

Dla ustalonego $i \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ szukamy zatem dwusegmentowej funkcji sklejanej postaci

$$s(x) = s(x;x_{2i+1}) = \begin{cases} \underline{P}_i(x), & \text{gdy } x \in [x_{2i}, x_{2i+1}] \\ \bar{P}_i(x), & \text{gdy } x \in [x_{2i+1}, x_{2i+2}], \end{cases}$$

gdzie $\underline{P}_i$ i $\bar{P}_i$ są pewnymi wielomianami stopnia co najwyżej drugiego. Ze względu na równości (2) dla pewnych $\underline{a}_i$ i $\bar{a}_i$ rzeczywistych wielomiany te dają się przedstawić w postaci

$$\underline{P}_i(x) = \underline{a}_i(x - x_{2i})^2 + y'_{2i}(x - x_{2i}) + y_{2i},$$

$$\bar{P}_i(x) = \bar{a}_i(x - x_{2i+2})^2 + y'_{2i+2}(x - x_{2i+2}) + y_{2i+2}.$$

Uwzględniając równości

$$\underline{P}_i(x_{2i+1}) = \bar{P}_i(x_{2i+1}), \quad \underline{P}'_i(x_{2i+1}) = \bar{P}'_i(x_{2i+1})$$

otrzymujemy

$$2\underline{a}_i = n_i + \frac{m_i}{x_{2i+1} - x_{2i}} \tag{3}$$

$$2\bar{a}_i = n_i - \frac{m_i}{x_{2i+2} - x_{2i+1}} \tag{4}$$

gdzie n_i i m_i nie zależą od wyboru punktu x_{2i+1} i wyrażają się wzorami

$$n_i = \frac{y'_{2i+2} - y'_{2i}}{x_{2i+2} - x_{2i}} \tag{5}$$

$$m_i = 2\,\frac{y_{2i+2} - y_{2i}}{x_{2i+2} - x_{2i}} - y'_{2i+2} - y'_{2i} \tag{6}$$

A zatem zagadnienie posiada jednoznaczne rozwiązanie.

Wniosek 1

Jeżeli $f \in Sp(2,\Delta)$ (w szczególności, gdy jest wielomianem stopnia co najwyżej drugiego), zaś s jest jej funkcją interpolującą względem podziału Δ, to $s \equiv f$.

3. DOKŁADNOŚĆ INTERPOLACJI

Ze wzoru Taylora i równości (2) wynika natychmiast następujące

Twierdzenie 2

Jeżeli $f \in C^1[x_{2i}, x_{2i+2}]$ posiada w przedziałach (x_{2i}, x_{2i+1}) i (x_{2i+1}, x_{2i+2}) drugą pochodną, a s jest jej funkcją interpolującą, to dla $x \in (x_{2i}, x_{2i+1}]$ istnieją $\underline{\xi}_i, \underline{\xi}'_i \in (x_{2i}, x)$ takie, że

$$f(x) - s(x) = \frac{(x - x_{2i})^2}{2}\left[f''(\underline{\xi}_i) - 2\underline{a}_i\right],$$

$$f'(x) - s'(x) = (x - x_{2i})\left[f''(\underline{\xi}'_i) - 2\underline{a}_i\right],$$

oraz dla $x \in [x_{2i+1}, x_{2i+2})$ istnieją $\bar{\xi}_i, \bar{\xi}'_i \in (x, x_{2i+2})$ takie, że

$$f(x) - s(x) = \frac{(x - x_{2i+2})^2}{2}\left[f''(\bar{\xi}_i) - 2\bar{a}_i\right],$$

$$f'(x) - s'(x) = (x - x_{2i+2})\left[f''(\bar{\xi}'_i) - 2\bar{a}_i\right].$$

Istnieją również oszacowania funkcji błędu i jej pierwszej i drugiej pochodnej niezależne od współczynników $\underline{a}_i$ i $\bar{a}_i$:

Twierdzenie 3

Jeżeli $f \in C^2[a,b]$, a s jest jej funkcją interpolującą w przedziale $[a,b]$ względem podziału (1), to dla $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1,2,\ldots,2N)$ zachodzą nierówności

$$|f(x) - s(x)| \le h_k(3h_k + \bar{\Delta})\omega(f'', h_k + \bar{\Delta})/4,$$

$$|f'(x) - s'(x)| \le (3h_k + \bar{\Delta})\omega(f'', h_k + \bar{\Delta})/2, \tag{7}$$

$$|f''(x) - s''(x)| \le (3h_k + \bar{\Delta})\omega(f'', h_k + \bar{\Delta})/(2h_k),$$

gdzie

$$h_k = x_k - x_{k-1}, \qquad \bar{\Delta} = \max_{j=1,\ldots,2N} h_j,$$

$$\omega(g,\delta) = \sup\left\{|g(x) - g(y)| : |x - y| \le \delta,\ x, y \in [a,b]\right\}.$$

Dowód

Niech $i \in \{0,1,\ldots,N-1\}$. Rozważmy przedział $[x_{2i}, x_{2i+2}]$. Na podstawie zależności (5) i wzoru Taylora istnieją punkty $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in (x_{2i}, x_{2i+2})$ takie, że

$$n_i = f''(\alpha_i) \tag{8}$$

oraz

$$y_{2i+2} = y_{2i} + y'_{2i}(x_{2i+2} - x_{2i}) + f''(\beta_i)\,\frac{(x_{2i+2} - x_{2i})^2}{2},$$

$$y_{2i} = y_{2i+2} - y'_{2i+2}(x_{2i+2} - x_{2i}) + f''(\gamma_i)\,\frac{(x_{2i+2} - x_{2i})^2}{2}.$$

Z ostatnich dwu równości i (6) otrzymujemy

$$m_i = \frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{2}\left[f''(\beta_i) - f''(\gamma_i)\right],$$

a stąd, (3) i (8) dla $\xi_i \in (x_{2i}, x_{2i+2})$ mamy

$$\left|f''(\xi_i) - 2\underline{a}_i\right| = \left|f''(\xi_i) - f''(\alpha_i) - \frac{1}{2}\,\frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{x_{2i+1} - x_{2i}}\left[f''(\beta_i) - f''(\gamma_i)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[2 + \frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{x_{2i+1} - x_{2i}}\right]\omega(f'', x_{2i+2} - x_{2i})/2 \leqslant$$

$$\leqslant (3h_{2i+1} + \bar{\Delta})\,\omega(f'', h_{2i+1} + \bar{\Delta})/(2h_{2i+1}).$$

Podobnie z uwagi na (4) zachodzi nierówność

$$\left|f''(\xi_i) - 2\bar{a}_i\right| \leqslant (3h_{2i+2} + \bar{\Delta})\,\omega(f'', h_{2i+2} + \bar{\Delta})/(2h_{2i+2}).$$

A stąd otrzymujemy już łatwo na podstawie twierdzenia 2, że oszacowania (7) są prawdziwe.

4. WŁASNOŚCI FUNKCJI INTERPOLUJĄCEJ

Następne dwa twierdzenia pokazuję, że w rozważanej metodzie interpolacji można łatwo zapewnić zgodność wypukłości funkcji interpolującej i interpolowanej. Osiąga się to przez odpowiedni wybór punktów sklejenia o wskaźnikach nieparzystych.

Przyjęte w tych twierdzeniach założenie $y'_{2i} < y'_{2i+2}$ jest, wobec przekształcenia $y \to -y$, ograniczeniem nieistotnym. Przy przekształceniu tym wypukłość przechodzi we wklęsłość, i na odwrót, natomiast m_i i n_i zmieniają znak.

Twierdzenie 4

Jeżeli styczne do funkcji f w końcach przedziału $[x_{2i},x_{2i+2}]$ przecinają się wewnątrz tego przedziału oraz $y'_{2i} < y'_{2i+2}$, to funkcja interpolująca s jest wypukła w przedziale $[x_{2i},x_{2i+2}]$ dla następującego doboru punktu x_{2i+1}:

$$1^\circ \quad x_{2i+1} \in \left(x_{2i} - \frac{m_i}{n_i},\ x_{2i+2}\right), \quad \text{gdy} \quad m_i < 0,$$

$$2^\circ \quad x_{2i+1} \in \left(x_{2i}, x_{2i+2} - \frac{m_i}{n_i}\right), \quad \text{gdy} \quad m_i > 0.$$

Dowód

Niech $m_i < 0$. Z uwagi na związek (5) i założenie $y'_{2i} < y'_{2i+2}$ mamy również $n_i > 0$. Z zależności (4) wynika, że wtedy $\bar{a}_i(x_{2i+1}) > 0$ dla każdego $x_{2i+1} \in (x_{2i},x_{2i+2})$. Oznacza to, że w przedziale $[x_{2i+1},x_{2i+2}]$ funkcja s jest wypukła.

Zajmijmy się więc współczynnikiem $\underline{a}_i$. W tym celu niech

$$x^o_{2i+1} = x_{2i} - \frac{m_i}{n_i}. \tag{9}$$

Mamy $x^o_{2i+1} > x_{2i}$ oraz $\underline{a}_i(x^o_{2i+1}) = 0$. Funkcja $2\underline{a}_i(x_{2i+1})$ jest przy $m_i<0$ rosnąca, a zatem wobec gładkości funkcji s wystarczy wykazać, że $x^o_{2i+1} < x_{2i+2}$.

Z zależności (5), (6) i (9) drogą prostych przekształceń dostajemy

$$x_{2i+2} - x^o_{2i+1} = \frac{2}{n_i}\left(\frac{y_{2i+2} - y_{2i}}{x_{2i+2} - x_{2i}} - y'_{2i}\right). \tag{10}$$

Styczne do f w końcach przedziału $[x_{2i},x_{2i+2}]$ przecinają się wewnątrz tego przedziału oraz $y'_{2i} < y'_{2i+2}$, zachodzi więc nierówność

$$y'_{2i} < \frac{y_{2i+2} - y_{2i}}{x_{2i+2} - x_{2i}} < y'_{2i+2}. \tag{11}$$

Pierwsza część tej nierówności i równość (10) kończą dowód punktu pierwszego twierdzenia.

Część drugą tezy dowodzi się analogicznie, korzystając z drugiej części nierówności (11).

Twierdzenie 5

Jeżeli styczne do funkcji f w końcach przedziału $[x_{2i},x_{2i+2}]$ są równoległe i nie pokrywają się, albo gdy styczne te przecinają się poza wnętrzem tego przedziału i $y'_{2i} < y'_{2i+2}$, to dla każdego wyboru punktu $x_{2i+1} \in (x_{2i}, x_{2i+2})$ funkcja interpolująca s jest

1° wklęsła w $[x_{2i}, x_{2i+1}]$ i wypukła w $[x_{2i+1}, x_{2i+2}]$, gdy $m_i < 0$,

2° wypukła w $[x_{2i}, x_{2i+1}]$ i wklęsła w $[x_{2i+1}, x_{2i+2}]$, gdy $m_i > 0$.

Dowód

Prawdziwość tezy w przypadku równoległości stycznych niepokrywających się wynika natychmiast z równości $n_i = 0$ i zależności (3) i (4).

Niech więc styczne przecinają się poza przedziałem (x_{2i}, x_{2i+2}). Zamiast nierówności (11), która teraz nie zachodzi, mamy

$$y'_{2i} \geq \frac{y_{2i+2} - y_{2i}}{x_{2i+2} - x_{2i}}, \quad \text{gdy} \quad m_i < 0 \tag{12}$$

lub

$$y'_{2i+2} \leq \frac{y_{2i+2} - y_{2i}}{x_{2i+2} - x_{2i}}, \quad \text{gdy} \quad m_i > 0 \tag{13}$$

Rozważmy przypadek $m_i < 0$. Wobec związku (4) i nierówności $n_i > 0$ dla każdego $x_{2i+1} \in (x_{2i}, x_{2i+2})$ jest $\bar{a}_i(x_{2i+1}) > 0$. A zatem s jest w przedziale $[x_{2i+1}, x_{2i+2}]$ funkcją wypukłą.

Funkcja $\underline{a}_i(x_{2i+1})$ jest dla $m_i < 0$ rosnąca oraz przy oznaczeniu (9) $\underline{a}_i(x^0_{2i+1}) = 0$. Na mocy równości (10) i nierówności (12) mamy $x_{2i+2} \leq x^0_{2i+1}$. A zatem $\underline{a}_i(x_{2i+1}) < 0$ dla każdego $x_{2i+1} \in (x_{2i}, x_{2i+2})$, co oznacza, że w przedziale $[x_{2i}, x_{2i+1}]$ s jest funkcją wklęsłą.

W oparciu o nierówność (13) część drugą tezy dowodzi się podobnie.

Znak m_i istotnie wpływa na charakter funkcji interpolującej s poprzez jej współczynniki $\underline{a}_i$ i $\bar{a}_i$. Związki (3) i (4) pokazują, że współczynniki te są funkcjami zmiennej x_{2i+1} jednocześnie rosnącymi, gdy $m_i < 0$, i malejącymi, gdy $m_i > 0$. Natomiast w przypadku $m_i = 0$ zachodzi $\underline{a}_i = \bar{a}_i = n_i/2$ i tym samym s jest w przedziale $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ wielomianem stopnia co najwyżej drugiego. Własność $m_i = 0$ jest znaną regułą trapezów, spełnianą przez wielomiany stopnia co najwyżej drugiego. Zachodzi ogólniejsze

Twierdzenie 6

Jeżeli $f \in C^1[x_{2i}, x_{2i+2}]$ posiada w przedziale $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ ciągłą drugą pochodną z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów oraz f'' jest w swoim zbiorze określoności funkcją monotoniczną, to

1° $m_i < 0 \Leftrightarrow f''$ jest niemalejąca oraz $f''(\underline{x}) < f''(\bar{x})$ dla pewnych $\underline{x}, \bar{x} \in [x_{2i}, x_{2i+2}]$ takich, że $\underline{x} < \bar{x}$,

2° $m_i = 0 \Leftrightarrow f'' \equiv \text{const}$,

3° $m_i > 0 \Leftrightarrow f''$ jest nierosnąca oraz $f''(\underline{x}) > f''(\bar{x})$ dla pewnych $\underline{x}, \bar{x} \in [x_{2i}, x_{2i+2}]$ takich, że $\underline{x} \leq \bar{x}$.

Dowód

Oznaczmy przez S_i całkę oznaczoną funkcji f' w przedziale $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, a przez T_i pole odpowiedniego trapezu prostoliniowego, dające przybliżoną wartość tej całki.

Mamy więc

$$S_i = \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f'(x)dx = y_{2i+2} - y_{2i}$$

oraz

$$T_i = \frac{1}{2}(x_{2i+2} - x_{2i})(y'_{2i+2} + y'_{2i})$$

Wobec zależności (6) oczywiste są następujące równoważności:

$$\begin{aligned} m_i < 0 &\Leftrightarrow S_i - T_i < 0, \\ m_i = 0 &\Leftrightarrow S_i - T_i = 0, \\ m_i > 0 &\Leftrightarrow S_i - T_i > 0. \end{aligned} \tag{14}$$

W celu wykazania implikacji "$\Leftarrow$" tezy twierdzenia niech l będzie prostą przechodzącą przez punkty (x_{2i}, y'_{2i}) i (x_{2i+2}, y'_{2i+2}), tj.

$$l(x) = y'_{2i} + \frac{y'_{2i+2} - y'_{2i}}{x_{2i+2} - x_{2i}}(x - x_{2i}), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Z uwagi na założenia o funkcji f'' dla $x \in (x_{2i}, x_{2i+2})$ mamy, odpowiednio, dla każdej z trzech części tezy: $f'(x) < l(x)$, $f'(x) = l(x)$, $f'(x) > l(x)$. Oznacza to, że dla każdej części tezy zachodzą związki znajdujące się po prawej stronie równoważności (14), a tym samym implikacje "$\Leftarrow$" są prawdziwe.

Prawdziwość implikacji "$\Rightarrow$" tezy twierdzenia łatwo wynika teraz nie wprost.

5. POPRAWIANIE PRZYBLIŻENIA

Zajmiemy się optymalnym względem f wyborem punktów podziału (1) o wskaźnikach nieparzystych. W tym celu niech $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Zagadnienie optymalnej aproksymacji w przedziale $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ jest następujące:

Dla danej funkcji $f \in C^1[x_{2i}, x_{2i+2}]$ należy znaleźć $x_{2i+1}^{opt} \in (x_{2i}, x_{2i+2})$ takie, że nierówność

$$\max_{x \in [x_{2i}, x_{2i+2}]} \left| f(x) - s(x; x_{2i+1}^{opt}) \right| \leqslant \max_{x \in [x_{2i}, x_{2i+2}]} \left| f(x) - s(x; x_{2i+1}) \right| \tag{15}$$

spełniona jest dla wszystkich $x_{2i+1} \in (x_{2i}, x_{2i+2})$. Mamy tu więc do czynienia z przypadkiem aproksymacji nieliniowej w sensie Czebyszewa.

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7

Jeżeli $f \in C^1[x_{2i}, x_{2i+2}]$ posiada w przedziale $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ ciągłą drugą pochodną z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów oraz f'' jest w swoim zbiorze określoności funkcją monotoniczną i niestałą, to istnieje dokładnie jeden punkt optymalny $x_{2i+1}^{opt} \in (x_{2i}, x_{2i+2})$. Punkt ten, a tym samym przybliżenie s odpowiadające mu, daje się wyznaczyć iteracyjnie.

Dowód

Należy zminimalizować względem x_{2i+1} funkcję błędu

$$\delta_i(x) = \delta_i(x; x_{2i+1}) = f(x) - s(x; x_{2i+1}), \quad x \in [x_{2i}, x_{2i+2}].$$

W tym celu niech

$$\underline{\delta}_i(x) = \underline{\delta}_i(x; x_{2i+1}) = \delta_i(x; x_{2i+1}), \quad x \in [x_{2i}, x_{2i+1}]$$

oraz

$$\bar{\delta}_i(x) = \bar{\delta}_i(x; x_{2i+1}) = \delta_i(x; x_{2i+1}), \quad x \in [x_{2i+1}, x_{2i+2}].$$

Mamy

$$\underline{\delta}_i'(x) = \underline{\delta}_i'(x; x_{2i+1}) = \int_{x_{2i}}^{x} \left[f''(t) - 2\underline{a}_i(x_{2i+1}) \right] dt \tag{16}$$

oraz

$$\bar{\delta}_i'(x) = \bar{\delta}_i'(x; x_{2i+1}) = \int_{x}^{x_{2i+2}} \left[2\bar{a}_i(x_{2i+1}) - f''(t) \right] dt. \tag{17}$$

Stosując, w razie potrzeby, odwzorowanie $y \to -y$ możemy przyjąć, że f'' jest funkcją niemalejącą. Zdefiniujmy w następujący sposób wielkości $f''(x_{2i})$, $f''_-(x_{2i+1})$, $f''_+(x_{2i+1})$, $f''(x_{2i+2})$:

$$f''(x_{2i}) = \inf\{f''(x) : x > x_{2i}\}, \quad f''_-(x_{2i+1}) = \sup\{f''(x) : x < x_{2i+1}\},$$

$$f''_+(x_{2i+1}) = \inf\{f''(x) : x > x_{2i+1}\}, \quad f''(x_{2i+2}) = \sup\{f''(x) : x < x_{2i+2}\}.$$

Oczywiście może się zdarzyć $f''(x_{2i}) = -\infty$, jak i również $f''(x_{2i+2}) = +\infty$.

Korzystając z własności całki (16) przy ustalonym x_{2i+1} i nie malejącej f'' oraz mając na uwadze równość $\underline{\delta}_i(x_{2i}) = \underline{\delta}_i'(x_{2i}) = 0$ otrzymujemy, że w przedziale $[x_{2i}, x_{2i+1}]$ albo $\underline{\delta}_i \equiv 0$, gdy $2\underline{a}_i = f''(x_{2i}) = f''_-(x_{2i+1})$, albo funkcja $\underline{\delta}_i$ jest

1° wypukła, gdy $2\underline{a}_i \leq f''(x_{2i})$, przy czym $\underline{\delta}_i'(x_{2i+1}) > 0$, $\underline{\delta}_i(x_{2i+1}) > 0$,

2° wklęsła, a następnie wypukła, gdy $f''(x_{2i}) < 2\underline{a}_i < f''_-(x_{2i+1})$, przy czym zachodzi jeden z przypadków:

a) $\underline{\delta}_i'(x_{2i+1}) > 0$, $\underline{\delta}_i(x_{2i+1}) > 0$,

b) $\underline{\delta}_i'(x_{2i+1}) > 0$, $\underline{\delta}_i(x_{2i+1}) \leq 0$,

c) $\underline{\delta}_i'(x_{2i+1}) \leq 0$, $\underline{\delta}_i(x_{2i+1}) < 0$,

3° wklęsła, gdy $2\underline{a}_i \geq f''_-(x_{2i+1})$, przy czym $\underline{\delta}_i'(x_{2i+1}) < 0$, $\underline{\delta}_i(x_{2i+1}) < 0$.

Podobnie, korzystając z własności całki (17) przy ustalonym x_{2i+1} i niemalejącej f'' oraz równości $\bar{\delta}_i(x_{2i+2}) = \bar{\delta}_i'(x_{2i+2}) = 0$, otrzymujemy, że w przedziale $[x_{2i+1}, x_{2i+2}]$ albo $\bar{\delta}_i \equiv 0$, gdy $2\bar{a}_i = f''_+(x_{2i+1}) = f''(x_{2i+2})$, albo funkcja $\bar{\delta}_i$ jest

4° wklęsła, gdy $2\bar{a}_i \geq f''(x_{2i+2})$, przy czym $\bar{\delta}_i'(x_{2i+1}) > 0$, $\bar{\delta}_i(x_{2i+1}) < 0$,

5° wklęsła, a następnie wypukła, gdy $f''_+(x_{2i+1}) < 2\bar{a}_i < f''(x_{2i+2})$, przy czym zachodzi jeden z przypadków:

a) $\bar{\delta}_i'(x_{2i+1}) > 0$, $\bar{\delta}_i(x_{2i+1}) \leq 0$,

b) $\bar{\delta}_i'(x_{2i+1}) > 0$, $\bar{\delta}_i(x_{2i+1}) > 0$,

c) $\bar{\delta}_i'(x_{2i+1}) \leq 0$, $\bar{\delta}_i(x_{2i+1}) > 0$,

6° wypukła, gdy $2\bar{a}_i \leq f''_+(x_{2i+1})$, przy czym $\bar{\delta}_i'(x_{2i+1}) < 0$, $\bar{\delta}_i(x_{2i+1}) > 0$.

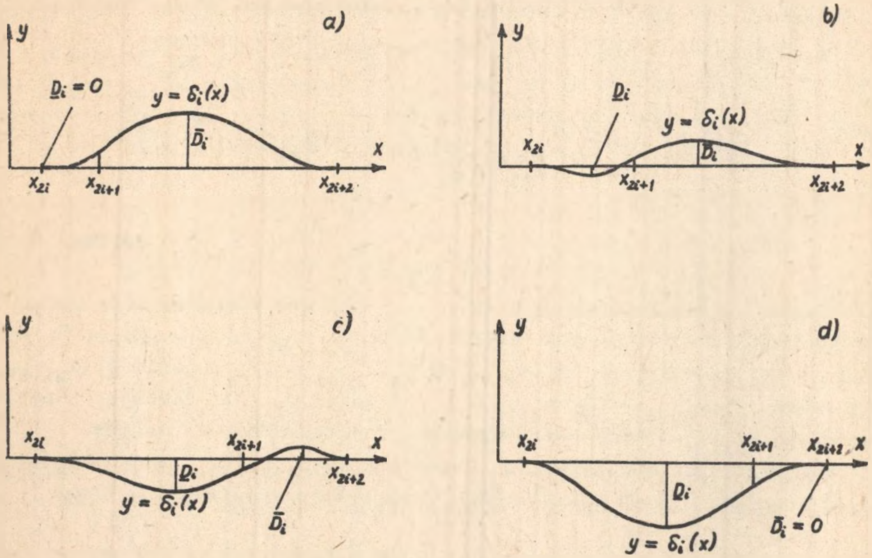
A zatem wobec równości

$$\underline{\delta}_i(x_{2i+1}) = \bar{\delta}_i(x_{2i+1}), \qquad \underline{\delta}_i'(x_{2i+1}) = \bar{\delta}_i'(x_{2i+1})$$

oraz założenia, że dla pewnych $\underline{x}$, $\bar{x} \in [x_{2i}, x_{2i+2}]$, $\underline{x} < \bar{x}$ jest $f''(\underline{x}) < f''(\bar{x})$, mamy jedną z dwóch sytuacji: albo $\delta_i \equiv 0$ w przedziale $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, gdy f jest tam dwusegmentową funkcją sklejaną drugiego stopnia o punkcie sklejenia równym x_{2i+1}, albo zachodzi nierówność $\delta_i'(x_{2i+1}; x_{2i+1}) > 0$ i ma miejsce jeden z czterech przypadków: 1-5b, 2a-5b, 2b-5a, 2b-4 (odpowiednio rys. 1a, 1b, 1c, 1d).

Jeżeli f jest w przedziale $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ dwusegmentową funkcją sklejaną drugiego stopnia o punkcie sklejenia różnym od x_{2i+1}, to zachodzi przypadek 1-5b (rys. 1a) albo 2b-4 (rys. 1d).

Jeżeli $f''(x_{2i}) = -\infty$, to przypadek 1-5b (rys. 1a) dla $x_{2i+1} \in (x_{2i}, x_{2i+2})$ nie występuje.



Rys. 1. Przebieg funkcji błędu δ

Podobnie nie zaistnieje przypadek 2b-4 (rys. 1d), gdy $f''(x_{2i+2}) = +\infty$. Niech

$$D_i = D_i(x_{2i+1}) = \max_{x \in [x_{2i}, x_{2i+2}]} |\delta_i(x; x_{2i+1})|.$$

Można zauważyć (patrz rys. 1), że $D_i = \max \{\underline{D}_i, \bar{D}_i\}$, gdzie

$$\underline{D}_i = \underline{D}_i(x_{2i+1}) = -\min_{x \in [x_{2i}, x_{2i+1}]} \underline{\delta}_i(x; x_{2i+1}) \geqslant 0 \tag{18}$$

oraz

$$\bar{D}_i = \bar{D}_i(x_{2i+1}) = \max_{x \in [x_{2i+1}, x_{2i+2}]} \bar{\delta}_i(x; x_{2i+1}) \geqslant 0 \tag{19}$$

Funkcje $\underline{D}_i$ i $\bar{D}_i$ zmiennej x_{2i+1} są ciągłe w przedziale (x_{2i}, x_{2i+2}) oraz

$$\lim_{x_{2i+1} \searrow x_{2i}} \underline{D}_i(x_{2i+1}) = \lim_{x_{2i+1} \nearrow x_{2i+2}} \bar{D}_i(x_{2i+1}) = 0.$$

Niech ε będzie dowolną liczbą z przedziału $(0, x_{2i+2}-x_{2i+1})$. Na mocy twierdzenia 6 mamy $m_i < 0$. Zachodzi zatem nierówność $2\underline{a}_i(x_{2i+1}) < 2\underline{a}_i(x_{2i+1}+\varepsilon)$, z której dla $x \in (x_{2i}, x_{2i+1}]$ otrzymujemy

$$\underline{\delta}_i(x;x_{2i+1}+\varepsilon) = \int_{x_{2i}}^{x}\left\{\int_{x_{2i}}^{u}\left[f''(t) - 2\underline{a}_i(x_{2i+1}+\varepsilon)\right]dt\right\}du <$$

$$< \int_{x_{2i}}^{x}\left\{\int_{x_{2i}}^{u}\left[f''(t) - 2\underline{a}_i(x_{2i+1})\right]dt\right\}du = \underline{\delta}_i(x;x_{2i+1}).$$

Stąd i (18) wynika, że $\underline{D}_i(x_{2i+1}) \leqslant \underline{D}_i(x_{2i+1}+\varepsilon)$, a jeśli $\underline{D}_i(x_{2i+1}) \neq 0$, to także $\underline{D}_i(x_{2i+1}) < \underline{D}_i(x_{2i+1}+\varepsilon)$. A zatem $\underline{D}_i$ jest funkcją niemalejącą zmiennej x_{2i+1}, a dla swoich wartości dodatnich nawet rosnącą.

Podobnie przy dowolnym ε z przedziału $(0, x_{2i+1}-x_{2i})$ mamy $2\bar{a}_i(x_{2i+1}-\varepsilon) < 2\bar{a}_i(x_{2i+1})$, a stąd dla $x \in [x_{2i+1}, x_{2i+2})$ otrzymujemy

$$\bar{\delta}_i(x;x_{2i+1}-\varepsilon) > \bar{\delta}_i(x;x_{2i+1}).$$

Na podstawie (19) dostajemy więc $\bar{D}_i(x_{2i+1}-\varepsilon) \geqslant \bar{D}_i(x_{2i+1})$, a jeśli $\bar{D}_i(x_{2i+1}) \neq 0$, to także $\bar{D}_i(x_{2i+1}-\varepsilon) > \bar{D}_i(x_{2i+1})$. A zatem $\bar{D}_i$ jest funkcją nierosnącą zmiennej x_{2i+1}, a dla swoich wartości dodatnich nawet malejącą.

Z rozważań tych wynika, że istnieje $x_{2i+1}^{opt} \in (x_{2i}, x_{2i+2})$ takie, że zachodzą równości

$$D_i(x_{2i+1}^{opt}) = \underline{D}_i(x_{2i+1}^{opt}) = \bar{D}_i(x_{2i+1}^{opt}) = \min_{x_{2i+1} \in (x_{2i}, x_{2i+2})} D_i(x_{2i+1}).$$

Dla punktu x_{2i+1}^{opt} spełniona jest zatem nierówność (15).

W celu wykazania jednoznaczności punktu x_{2i+1}^{opt} załóżmy, że istnieje punkt optymalny $\bar{x}_{2i+1}^{opt}$ różny od x_{2i+1}^{opt}. Stąd i własności $\underline{D}_i$ mamy

$$\underline{D}_i(x_{2i+1}^{opt}) = D_i(x_{2i+1}^{opt}) = D_i(\bar{x}_{2i+1}^{opt}) = \underline{D}_i(\bar{x}_{2i+1}^{opt}) = 0.$$

Równość $D_i(x_{2i+1}^{opt}) = D_i(\bar{x}_{2i+1}^{opt}) = 0$ oznacza, że dla $x \in [x_{2i}, x_{2i+2}]$

$$s(x;x_{2i+1}^{opt}) = s(x;\bar{x}_{2i+1}^{opt}) = f(x).$$

Sytuacja taka zachodzi przy $x_{2i+1}^{opt} \neq \bar{x}_{2i+1}^{opt}$ tylko wtedy, gdy f jest w przedziale $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ wielomianem stopnia co najwyżej drugiego. Mamy więc $f'' \equiv \text{const}$, a to jest sprzeczne z założeniami twierdzenia.

Monotoniczny charakter funkcji $\underline{D}_i$ i $\bar{D}_i$ zmiennej x_{2i+1} powoduje, że poszukiwania punktu x_{2i+1}^{opt} można prowadzić w sposób iteracyjny. Jako pierwsze przybliżenie x_{2i+1}^{opt} można przyjąć dowolny punkt x_{2i+1} wewnątrz przedziału $[x_{2i},x_{2i+2}]$, a następnie, np. metodą połowienia przedziału, tak go przesuwać, ażeby błąd $D_i(x_{2i+1})$ malał. Kierunek przesuwania punktu x_{2i+1} wynika natychmiast z porównania wielkości $\underline{D}_i(x_{2i+1})$ i $\bar{D}_i(x_{2i+1})$.

6. UWAGI KOŃCOWE

Z dowodu twierdzenia 7 wynika, że w przypadku niemalejącej i niestałej funkcji f''' współczynniki $\underline{a}_i$ i $\bar{a}_i$ przybliżenia optymalnego spełniają nierówności

$$f''(x_{2i}) = \inf\left\{f''(x): x>x_{2i}\right\} \leqslant 2\underline{a}_i \leqslant \sup\left\{f''(x): x<x_{2i+1}\right\},$$

$$\inf\left\{f''(x): x>x_{2i+1}\right\} \leqslant 2\bar{a}_i \leqslant \sup\left\{f''(x): x<x_{2i+2}\right\} = f'''(x_{2i+2}).$$

Stąd (3), (4), (5) i (6) otrzymujemy następujący

<u>Wniosek 2</u>

Jeżeli $f \in C^1[x_{2i},x_{2i+2}]$ posiada w przedziale $[x_{2i},x_{2i+2}]$ ciągłą drugą pochodną z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów oraz f'' jest w swoim zbiorze określoności funkcją monotoniczną i niestałą, to punkt sklejenia x_{2i+1} należy wybierać spośród spełniających nierówność

$$x_{2i} - \frac{m_i}{n_i - f''(x_{2i})} \leqslant x_{2i+1} \leqslant x_{2i+2} + \frac{m_i}{f''(x_{2i+2}) - n_i} \tag{20}$$

(przyjmujemy $\frac{m_i}{\pm\infty} = 0$).

W przypadku rezygnacji z poszukiwania przybliżenia optymalnego można zadowolić się przyjęciem x_{2i+1} w środku przedziału określonego nierównością (20).

Na mocy twierdzenia 2 otrzymujemy również następujący

<u>Wniosek 3</u>

Jeżeli $f \in C^2[a,b]$ oraz punkty przedziału (1) o wskaźnikach parzystych określone są tak, że f'' jest w przedziałach przez nie wyznaczonych funkcją monotoniczną, zaś punkty podziału (1) o wskaźnikach nieparzystych spełniają nierówność (20), to dla $x \in [x_{k-1},x_k]$ $(k = 1,2,\ldots,2N)$

$$|f(x) - s(x)| \leqslant \frac{h_k^2}{2}\omega(f'',h_k).$$

$$|f'(x) - s'(x)| \leq h_k \omega(f'', h_k),$$

$$|f''(x) - s''(x)| \leq \omega(f'', h_k).$$

LITERATURA

[1] Anselone P.M., Laurent P.J.: A general method for the construction of interpolating and smoothing spline functions, Num. Math. 12 (1968), 66-82.

[2] Bézier P.: Numerical Control - Mathematics and Applications, John Wiley & Sons, London - New York - Sydney - Toronto 1972.

[3] Jankowski M.: Interpolacja spline funkcjami, Sprawozdania IMM i ZON Uniwersytetu Warszawskiego 45 (1974).

[4] Juranek J.: ASTER - system przygotowawczo-sterujący w obróbce elementów konstrukcyjnych kadłuba okrętu. Informatyka 2(1971), 13-17.

[5] Kammerer W.J., Reddien G.W., Varga R.S.: Quadratic Interpolatory Splines, Num. Math. 22 (1974), 241-259.

[6] Marsden M.J.: Quadratic Spline Interpolation, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974).

[7] Schultz M.H., Varga R.S.: L - Splines, Num. Math. 10 (1967), 345-369.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Р е з ю м е

В работе рассматривается проблема интерполяции функции сплайнами второй степени. Определяется выбор узлов интерполяции гарантирующий согласованность выпуклости интерполированной и интерполирующей функции. Представляется тоже итерационный образ действия для одной оптимализации приближающего сплайна.

INTERPOLATION BY QUADRATIC SPLINES

S u m m a r y

In this paper the interpolation of function by quadratic splines is considered. The choice of interpolative knots quaranteeing an agreement of convexity of interpolated and interpolating function is given. The iterative procedure for some optimization of approximating spline is presented too.