ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 31 Nr kol. 608

Małgorzata BIEDROŃSKA, Anna LASKOWSKA

PORÓWNANIE WSKAŹNIKA EFEKTYWNOŚCI DLA PEWNEJ KLASY METOD ITERACYJNYCH

Streszczenie. W poniższej pracy przedstawiamy algorytmy wyznaczenia jednej iteracji metod Königa i Schrödera rzędu $k+1$ dla wielomianu stopnia n, przy zastosowaniu algorytmu S-T (patrz [1]) do obliczenia wszystkich "znormalizowanych" pochodnych wielomianu. Podajemy także liczbę działań potrzebną do wykonania jednej iteracji oraz liczbę k, dla której wskaźnik efektywności metody, przy ustalonym stopniu wielomianu, jest największy.

1. Algorytm S-T

Przedstawiamy algorytm S-T do obliczenia wartości wielomianu i jego k pierwszych znormalizowanych pochodnych w danym punkcie x, $x \neq 0$, $k \leq n$, (patrz [1]).

Niech

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, x^k$$

będzie wielomianem stopnia n.

Niech

$$n + 1 = p \cdot q$$

dla pewnych liczb naturalnych p i q.

Definiujemy dwie funkcje

$$s(j) = (n-j) \bmod q$$

$$r(j) = \begin{cases} q & \text{dla} \quad j \bmod q = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad j \bmod q \neq 0 \end{cases} \qquad j = 0,1,\dots,n$$

Algorytm S-T

$$T_i^{-1} = a_{i+1}\, x^{s(i+1)} \qquad i = 0,1,\dots,n-1$$

$$T_j^j = a_0 x^{s(0)} \qquad j = 0,1,\dots,k$$

$$T_i^j = T_{i-1}^{j-1} + T_{i-1}^j\, x^{r(i-j)}, \qquad j = 0,1,\dots,k, \quad i = j+1,j+2,\dots,n$$

$$T_n^j = \frac{P^{(j)}(x)}{j!}\, x^j \bmod q$$

Jeśli za parametr q podstawimy różne wartości, otrzymamy warianty algorytmu S-T różniące się ilością mnożeń i dzieleń.

Dla $q = n+1$ algorytm S-T jest algorytmem o najmniejszej znanej ilości działań arytmetycznych i wymaga $(k+1)(n - \frac{1}{2}k)$ dodawań, $2n-1$ mnożeń i k dzieleń. W tym przypadku algorytm ten przyjmuje postać

$$T_i^{-1} = a_{i+1}\, x^{n-i+1} \qquad i = 0,1,\dots,n-1$$

$$T_j^j = a_0 x^n \qquad j = 0,1,\dots,k$$

$$T_i^j = T_{i-1}^{j-1} + T_{i-1}^j \qquad j = 0,1,\dots,k, \quad i = j+1,\dots,n$$

$$T_n^j = \frac{P^{(j)}(x)}{j!}\, x^j \qquad j = 0,1,\dots,k$$

2. Metoda Königa i Schrödera

Dla wielomianu stopnia n, $P(x)$ metoda Königa rzędu $k+1$ przyjmuje postać

$$\varphi_k = x - \frac{b_0 u_{k-1}}{u_k}, \tag{1}$$

gdzie:

$$u_k = \begin{bmatrix} b_1 & b_0 & & & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & & \\ \dots & & & & \\ b_k & b_{k-1} & b_{k-2} & \dots & b_1 \end{bmatrix} \qquad k = 1,2,\dots$$

$$u_0 = 1$$

$$b_i = \frac{P^{(i)}(x)}{i!} \qquad i = 0,1,\dots,k$$

$$u_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} b_i u_{k-1} b_0^{i-1}$$

Metodę Königa można także uzyskać stosując linearyzację wzoru Taylora (patrz [4]). Wtedy

$$\varphi_k = x + d_k,$$

gdzie:

d_k - jest wyznaczone z układu

$$b_0 + b_1 d_1 = 0$$
$$b_0 + b_1 d_2 + b_2 d_2 d_1 = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$b_0 + b_1 d_k + b_2 d_k d_{k-1} + \dots + b_k d_k d_{k-1} \dots d_1 = 0$$

(patrz [4]).

Metoda Schrödera otrzymana z linearyzacji wzoru Taylora przyjmuje postać

$$\varphi_k = x + d_k$$

a wielkości d_k wyznacza układ

$$\begin{aligned} & b_0 + b_1 d_1 = 0 \\ & b_0 + b_1 d_2 + b_2 d_1^2 = 0 \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & b_0 + b_1 d_k + b_2 d_{k-1}^2 + \dots + b_k d_{k-1}^k = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Wykładnik zbieżności przedstawionych metod jest $k+1$.

3. Do metody Königa i Schrödera zastosujemy algorytm S-T

T w i e r d z e n i e:

$$\varphi_k = x - \frac{b_0 \tilde{u}_{k-1}\, x}{\tilde{u}_k}, \tag{4}$$

gdzie

$$\tilde{u}_k = \begin{bmatrix} T_n^1 & T_n^0 & & & \\ T_n^2 & T_n^1 & T_n^0 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ T_n^k & T_n^{k-1} & T_n^{k-2} & \cdots & T_n^1 \end{bmatrix} \qquad k = 1,2,\ldots$$

$$\tilde{u}_0 = 1$$

$$T_n^j = \frac{P^{(j)}(x)}{j!}\, x^j \qquad j = 0,1,\ldots,k$$

D o w ó d

Udowodnimy indukcyjnie, że

$$\tilde{u}_j = x^j u_j \qquad j = 0,1,\ldots,k$$

$$j = 0 \qquad \tilde{u}_0 = 1 = u_0$$

$$\tilde{u}_{j+1} = \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^{i+1}\, T_n^i (T_n^0)^{i-1}\, \tilde{u}_{j+1-i}$$

$$T_n^i = x^i b_i$$

$$\tilde{u}_{j+1-i} = x^{j+1-i}\, u_{j+1-i}$$

$$\tilde{u}_{j+1} = \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^{i+1}\, x^i b_i b_0^{i-1}\, x^{j+1-i}\, u_{j+1-i} =$$

$$= x^{j+1} \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^{i+1}\, b_i b_0^{i-1}\, u_{j+1-i} = x^{j+1} u_{j+1}$$

A więc

$$\varphi_k = x - \frac{b_0 \frac{\tilde{u}_{k-1}}{x^{k-1}}}{\frac{\tilde{u}_k}{x^k}} = x - \frac{b_0 \tilde{u}_{k-1} x}{\tilde{u}_k}$$

co kończy dowód.

Zamiast wyznaczać $b_0, b_1, \ldots, b_k$ kosztem 2n-1 mnożeń i k dzieleń, będziemy wyznaczać $T_n^0, T_n^1, \ldots, T_n^k$ kosztem jedynie 2n-1 mnożeń. W sposób podobny można pokazać, że zamiast schematu (2) można stosować następujący:

$$\varphi_k = x(1 + \tilde{d}_k)$$

gdzie:

$\tilde{d}_k$ - są wyznaczane dla metody Königa z układu

$$\begin{aligned} &T_0 + T_1\tilde{d}_1 = 0 \\ &T_0 + T_1\tilde{d}_2 + T_2\tilde{d}_2\tilde{d}_1 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &T_0 + T_1\tilde{d}_k + T_2\tilde{d}_k\tilde{d}_{k-1} + \ldots + T_k\tilde{d}_k\tilde{d}_{k-1}\ldots\tilde{d}_1 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

a dla metody Schrödera zamiast (3)

$$\begin{aligned} &\varphi_k = x(1 + \tilde{d}_k) \\ &T_0 = T_1\tilde{d}_1 = 0 \\ &T_0 + T_1\tilde{d}_2 + T_2\tilde{d}_1^2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &T_0 + T_1\tilde{d}_k + T_2\tilde{d}_{k-1}^2 + \ldots + T_k\tilde{d}_{k-1}^k = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

4. Podajemy algorytmy i programy na wyznaczanie jednej iteracji metod Königa i Schrödera rzędu k+1, przy danych x, T_n^0, T_n^1,...,T_n^k (będziemy oznaczać teraz $T_0, T_1, \ldots, T_k$)

Dla schematu (4):

```
begin
integer k,j,i,b;
real x,y,fika;
real array T,c,u[0;k];
u[0] = 1;
y = 1;
for i=2 step 1 until k do
  begin
     y= y  T[0];
     c[i] = T[i]*y;
  end;
  u[1] = T[1];
  for i=2 step 1 until k do
     begin
       u[i] = T[1] u[i-1];
       b = -1;
       for j=2 step 1 until i do
         begin
           u[i] = u[i] + b * c[j]* u[i-j];
           b = -b;
         end;
     end;
fika = x - x* T[0]*u[k-1]/u[k];
end;
```

Dla schematu (5):

```
begin
  integer i,l,k;
  real x, fika;
```

```
        real array  T[0;k], d[1;k];
        for  i=1  step  1  until  k  do
           begin
        d[i] = T[i];
        for  l=1  step  1  until  i-1  do
        d[i] = d[l] d[i] + T[i-l];
        d[i] = -T[0]/d[i];
    end;
  fika: = x * (1 + d[k]);
end;
```

Dla schematu (6)

```
        begin
        integer  i,k,l;
        real x, fika;
        real array  T[0;k], d[1 : k];
           d[1] = -T[0]/T[1];
           d[2] = -(T[2]*d[1]*d[1] + T[0])/T[1];
           for  i=3  step  1  until  k  do
              begin
                d[i] = T[i-1] + d[i-1]*T[i];
                for  l=2  step  1  until  i-2  do
                  d[i] = T[i-l] + d[i-l]*d[i];
           d[i]= -(T[0] + d[i-1]*d[i-1]*d[i])/T[1];
        end;
     fika = x * (1 + d[k]);
end;
```

5. Policzymy ilość działań potrzebną do wykonania jednej iteracji

Oznaczać będziemy przez α ilość mnożeń i dzieleń, a przez β ilość dodawań i odejmowań.

T w i e r d z e n i e:

$$\alpha(\vec{u}_0) = \alpha(\vec{u}_1) = 0$$

$$\alpha(\vec{u}_k) = 2 + \frac{(k+5)(k-2)}{2} \qquad k = 2,3,\ldots$$

D o w ó d: indukcyjnie

$$k = 2 \qquad \alpha(\vec{u}_2) = 2$$

$$\vec{u}_{k+1} = T_1\vec{u}_k - T_2T_0\,\vec{u}_{k-1} + \ldots + (-1)^k\, T_{k+1}\,T_0^k$$

$$\alpha(\vec{u}_{k+1}) = \alpha(\vec{u}_k) + k + w =$$

$$= 2 + \frac{(k+5)(k-2)}{2} + k+2 = 2 + \frac{(k+6)(k-1)}{2}$$

co kończy dowód.

Tak więc dla schematu (4)

$$\alpha(\varphi_k) = \alpha(T_0, T_1, \ldots, T_k) + \alpha(\vec{u}_k) + 3 =$$

$$= 2n + 4 + \frac{(k+5)(k-2)}{2}$$

$$\beta(\varphi_k) = \beta(T_0, T_1, \ldots, T_k) + \beta(\vec{u}_k) + 1 =$$

$$= n(k+1) - k+1$$

Jak łatwo pokazać, dla schematu (5) ilość działań przedstawia się następująco

$$\alpha(\vec{d}_k) = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\alpha(\varphi_k) = \alpha(T_0, T_1, \ldots, T_k) + \alpha(\vec{d}_k) + 1 =$$

$$= 2n + \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\beta(\vec{d}_k) = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\beta(\varphi_k) = \beta(T_0, T_1, \ldots, T_k) + \beta(\vec{d}_k) + 1 =$$

$$= n(k+1) - k+1$$

Jak więc widać schemat (5) wymaga mniejszej ilości mnożeń niż (4).

Jeśli rozpatrzymy ilość działań w metodzie Schrödera, zauważymy, że

$$\alpha(\vec{d}_k) = 1 + \frac{(k-1)(k+4)}{2}$$

$$\alpha(\varphi_k) = 2n + 1 + \frac{(k-1)(k+4)}{2}$$

$$\beta(\tilde{d}_k) = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\beta(\varphi_k) = n(k+1) - k+1$$

Te trzy schematy wymagają takiej samej ilości dodawań, a (4) i (6) takiej samej ilości mnożeń.

6. Wskaźnikiem efektywności metody iteracyjnej nazywamy

$$\mathcal{E} = \frac{\ln\mu}{p},$$

gdzie μ oznacza sykładnik zbieżności metody, a p ilość działań potrzebną do wykonania jednej iteracji. W naszym przypadku mamy:

dla schematów (4), (6)

$$\mathcal{E}_1 = \frac{2\ \ln(k+1)}{k^2 + k(2n+1) + 6n}$$

dla schematu (5)

$$\mathcal{E}_2 = \frac{2\ \ln(k+1)}{k^2 + k(2n-1) + 6n+2}$$

Przy ustalonym stopniu n wielomianu można wybrać k tak, aby wskaźnik efektywności był największy.

W poniższej tabelce przedstawiamy wyniki otrzymane numerycznie

$\mathcal{E}_1$		$\mathcal{E}_2$	
n	k	n	k
1	1		
2-7	2	1-4	2
8 i więcej	3	5 i więcej	3

LITERATURA

[1] Woźniakowski H.: Analiza numeryczna algorytmów obliczania wartości wielomianów i ich pochodnych, Matematyka Stosowana 3 (1974), s. 79-92.
[2] Хаусхолдер А.С.: Основы численного анализа, Москва 1956.
[3] Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej, Warszawa 1971.
[4] Collatz L.: Funkcionální analýza a numerická matematika, Praha 1970.

СРАВНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ИТЕРАЦИЙНЫХ МЕТОД

Р е з ю м е

Кенига
В данной работе представлены алгоритмы одной итерации метод Кинга и Шродера ряда k+1 многочлена степени n при применении алгоритма S-T (см. 1) для расчюта всех нормализированных производных многочлена.

Представлены также числа действий, необходимых для выполнения одной итерации, а также сисло k, для которого показатель эффективности метода при назначенной степени многочлена является наибольшим.

THE COMPARISON OF EFFICIENCY INDEX FOR A CERTAIN CLASS OF ITERATION METHODS

S u m m a r y

The paper presents the algorithms of defining of one iteration of König and Schröder methods of k+1 order for a polynomial of n order, using the S-T algorithm (see (1)) in calculating all "normalized" derivatives of the multinominal.

The paper also gives the number of operations indispensable to perform one iteration, and the k number, at which the method efficiency index, assuming that the order of a multinominal is defined, is the greatest in value.