ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 31 Nr kol. 608

Dorota CZAJA-POŚPIECH

O PEWNYCH REGUŁACH LOGIKI ROZMYTEJ

Streszczenie. Przedmiotem pracy jest uogólnienie pewnych reguł logiki rozmytej. Omówiony jest przypadek implikacji złożonej: "If A_1 then if A_2 then ... if A_{n-1} then A_n" oraz złożeniowa reguła wnioskowania, pozwalająca na znalezienie następnika tej implikacji, jeżeli dane są jej poprzedniki. Dowody poprawności uogólnionych reguł podają twierdzenia 1 i 2. Lemat 3 omawia złożone zdanie warunkowe typu: "If A_1 then B_1 else if A_2 then B_2 else ... if A_n then B_n" oraz warunki zamiany tego zdania na złożoną alternatywę prostych implikacji: "If A_1 then B_1 or ... or if A_n then B_n". Prezentowane reguły mogą znaleźć zastosowanie do analizy i opisu złożonych procesów przemysłowych.

1. Wstęp

Pojęcie rozmytości (fuzziness) L.A. ZADEH podał po raz pierwszy w 1965 roku w pracy [1]. Tam również zostały sformułowane podstawowe pojęcia dotyczące zbiorów rozmytych (fuzzy sets), na których opierają się reguły tzw. logiki rozmytej. Od tego czasu teoria zbiorów rozmytych znacznie się rozbudowała, w 1968 roku w pracy [2] ZADEH wprowadza pojęcie algorytmu rozmytego, a w roku 1970 wspólnie z BELLMANEM publikuje pracę [3] o podejmowaniu decyzji w warunkach rozmytych, m.in. poruszając problem: prawdopodobieństwo a rozmytość. W roku 1973 pojawia się praca [4] podająca podstawowe pojęcia i reguły logiki rozmytej. Takie były początki teorii, której szybki i wielotorowy rozwój nastąpił niebawem, czego przykładem mogą być: praca [5] o topologii indukowanej w zbiorach rozmytych, praca [6] o mierze w zbiorach rozmytych oraz praca [10] o strukturach algebraicznych. Podsumowaniem i uporządkowaniem wyników badań teoretycznych jest wydana w 1975 roku monografia [7]. Równocześnie ukazuje się wiele prac z zastosowań zbiorów rozmytych i logiki rozmytej w różnych dziedzinach nauk humanistycznych oraz technicznych, na przykład [8] i [9].

2. Podstawowe pojęcia, zapis i terminologia

Zakładając, że teoria zbiorów rozmytych jest znana, podamy jedynie najbardziej podstawowe pojęcia (występujące w tej pracy). Niech będzie dany zbiór podstawowy (nierozmyty) U, zwany dalej przestrzenią. Podzbiorem rozmytym A przestrzeni U nazywać będziemy zbiór

$$A = \left\{u/\mu_A(u) : u \in U\right\};$$

gdzie:

$\mu_A(u)$ - jest funkcją określoną na zbiorze U, przyjmującą wartości z przedziału $[0,1]$, $\mu_A(u)$: $U \to [0,1]$.

Funkcja $\mu_A(u)$ jest nazywana funkcją przynależności zbioru A, zaś jej wartość w punkcie u zwana jest stopniem przynależności elementu u do zbioru rozmytego A.

Dwa zbiory rozmyte są równe, jeżeli ich funkcje przynależności są w U identyczne:

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(u) = \mu_B(u).$$

Zawieranie się zbiorów rozmytych zachodzi, gdy

$$\mu_A(u) \leq \mu_B(u) \Leftrightarrow A \subset B.$$

Dopełnieniem zbioru rozmytego A jest zbiór rozmyty $\neg A$ taki, że

$$\mu_{\neg A}(u) = 1 - \mu_A(u). \tag{1}$$

Złącze (union) zbiorów rozmytych A i B jest zbiorem rozmytym $A \cup B$, zdefiniowanym poprzez

$$\mu_{A \cup B}(u) = \max\left[\mu_A(u), \mu_B(u)\right].$$

Przekrój (intersection) zbiorów rozmytych jest zbiorem rozmytym oznaczanym przez $A \cap B$ i zdefiniowanym przez:

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min\left[\mu_A(u), \mu_B(u)\right], \quad u \in U.$$

Iloczynem kartezjańskim zbioru rozmytego A z przestrzeni U przez zbiór rozmyty B z przestrzeni V jest zbiór rozmyty $A \times B$:

$$A \times B = \left\{(u,v)/\mu_{A \times B}(u,v) : u \in U,\ v \in V\right\},$$

gdzie

$$\mu_{A \times B}(u,v) = \min\left[\mu_A(u), \mu_B(v)\right]. \tag{2}$$

Zgodnie z definicją podaną w [4], implikacja:

$$A \Rightarrow B = A \times B. \tag{3}$$

P r z y k ł a d 1

Niech $U = \{1,2,3\}$ a $V = \{1,2\}$, zbiory rozmyte: A w przestrzeni U, B w przestrzeni V są następujące:

$$A = \{1/0{,}5,\ 2/0{,}7,\ 3/0{,}4\}, \quad B = \{1/0{,}6,\ 2/0{,}8\}.$$

Implikację $A \Rightarrow B$ reprezentuje w tym przypadku macierz $A \times B$, zaś funkcja przynależności zgodnie z wzorem (2) jest następująca:

$$\mu_{A \times B} = \begin{bmatrix} \min(0{,}5,\ 0{,}6), & \min(0{,}5,\ 0{,}8) \\ \min(0{,}7,\ 0{,}6), & \min(0{,}7,\ 0{,}8) \\ \min(0{,}4,\ 0{,}6), & \min(0{,}4,\ 0{,}8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5, & 0{,}5 \\ 0{,}6, & 0{,}7 \\ 0{,}4, & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

czyli:

$$A \times B = \{(1,1)/0{,}5,\ (1,2)/0{,}5,\ (2,1)/0{,}6,\ (2,2)/0{,}7,\ (3,1)/0{,}4,\ (3,2)/0{,}4\}$$

3. Implikacja złożona

Rozważmy przypadek implikacji złożonej w postaci:

"If A_1 then if A_2 then if A_3 then ... if A_{n-1} then A_n" $\Leftrightarrow$

$$A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow \ldots (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \ldots)) = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_{n-1} \times A_n, \tag{4}$$

(co można napisać bez nawiasów, gdyż iloczyn kartezjański jest nieprzemienny i podaną we wzorze (4) kolejność rozumieć będziemy tutaj zawsze tak jak podają nawiasy po lewej stronie wzoru). Zakładamy, że A_i to zbiory rozmyte przestrzeni $U_i (i = 1,2,\ldots,n)$.

T w i e r d z e n i e 1

Funkcja przynależności zbioru (4) reprezentującego implikację złożoną wyraża się wzorem:

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}(u_1, u_2, \ldots, u_n) =$$

$$= \min\left[\mu_{A_1}(u_1), \mu_{A_2}(u_2), \ldots, \mu_{A_{n-1}}(u_{n-1}), \mu_{A_n}(u_n)\right] \tag{5}$$

Dowód tego twierdzenia opiera się na definicji minimum zbioru skończonego. Jeśli

$$Z = \bigcup_{i=1} z_i = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$$

to

$$\min Z = \min\{z_1, z_2, \dots, z_n\} = a \Leftrightarrow a \in Z \text{ i } a \leqslant z_1 \text{ i}$$

$$a \leqslant z_2 \text{ i } \dots a \leqslant z_n. \tag{6}$$

Dowód wzoru (5) poprowadzimy przez indukcję ze względu na n.

1. Dla $n = 2$ podany wzór jest prawdziwy, zgodnie z definicją (2).
2. Krok indukcyjny:

Założenie ind./

$$\mu_{A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n}(u_2, u_3, \dots, u_n)$$

$$= \min\left[\mu_{A_2}(u_2), \mu_{A_3}(u_3), \dots, \mu_{A_n}(u_n)\right]$$

Teza ind./

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n}(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) =$$

$$= \min\left[\mu_{A_1}(u_1), \mu_{A_2}(u_2), \mu_{A_3}(u_3), \dots, \mu_{A_n}(u_n)\right]. \tag{5}$$

Dla dowodu oznaczmy

$$z = \min\left[\mu_{A_2}(u_2), \mu_{A_3}(u_3), \dots, \mu_{A_n}(u_n)\right] \tag{7}$$

Po lewej stronie wzoru (5) mamy więc

$$v = \min\left[\mu_{A_1}(u_1), z\right]$$

i z definicji (6):

$$v \in \{\mu_{A_1}(u_1), z\} \text{ i } v \leqslant \mu_{A_1}(u_1) \text{ i } v \leqslant z.$$

Ale zgodnie z oznaczeniem (7) i definicją (6) mamy:

$$v \leqslant \mu_{A_i}(u_i) \text{ bo } z \leqslant \mu_{A_i}(u_i) \text{ (dla i } 2,3,\dots,n)$$

oraz $v \in \left\{\mu_{A_1}(u_1), \mu_{A_2}(u_2), \ldots, \mu_{A_n}(u_n)\right\}$, co łącznie z nierównością poprzednią daje wzór:

$$v = \min\left[\mu_{A_1}(u_1), \mu_{A_2}(u_2), \ldots, \mu_{A_n}(u_n)\right],$$

co kończy dowód tezy indukcyjnej, a zarazem kończy dowód tw. 1.

Bezpośrednio z definicji (2) dla implikacji złożonej (4) otrzymujemy następującą funkcję przynależności:

$$\min\left[\mu_{A_1}(u_1), \min(\mu_{A_2}(u_2), \ldots, \min(\mu_{A_{n-1}}(u_{n-1}), \mu_{A_n}(u_n))\ldots)\right] =$$

$$= \mu_{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

Zatem z wykazanego twierdzenia wynika:

W n i o s e k:

Dla dowolnych zbiorów rozmytych $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mamy:

$$\min\left[\mu_{A_1}(u_1), \min(\mu_{A_2}(u_2), \ldots, \min(\mu_{A_{n-1}}(u_{n-1}), \mu_{A_n}(u_n))\ldots)\right] =$$

$$= \min\left[\mu_{A_1}(u_1), \mu_{A_2}(u_2), \ldots, \mu_{A_{n-1}}(u_{n-1}), \mu_{A_n}(u_n)\right].$$

4. Złożeniowa reguła wnioskowania

Przypuśćmy teraz, że dane są zbiory rozmyte A i B, odpowiednio z przestrzeni U i V. Niech będzie dana również relacja $R = A \Rightarrow B = A \times B$. Zadany jest także pewien podzbiór rozmyty $A' \subset A$. Rozważmy problem: jak znaleźć taki zbiór rozmyty B, ażeby $A' \Rightarrow B' \subset R$? Złożeniowa reguła wnioskowania podana przez ZADEHa w [4] dla relacji R definiuje zbiór B' w sposób następujący:

$$B' = A \circ R,$$

czyli

$$B' = A \circ (A \times B), \tag{9}$$

zaś

$$\mu_{B'}(v) = \max_{u \in U} \min\left[\mu_{A'}(u), \mu_R(u,v)\right] \tag{9'}$$

Ponieważ w naszym przypadku $R = A \times B$, więc zgodnie z (2):

$$\mu_R(u,v) = \mu_{A\times B}(u,v) = \min\left[\mu_A(u), \mu_B(v)\right].$$

LEMAT 1

Jeżeli dane jest relacja $A \times B$ reprezentująca implikację $A \Longrightarrow B$ i dany jest podzbiór $A' \in A$, to otrzymany przy pomocy złożeniowej reguły wnioskowania zbiór B' spełniający (9) jest podzbiorem zbioru B.

D o w ó d:

Z założenia $A' \subset A$, czyli $\mu_{A'}(u) \leqslant \mu_A(u)$ dla każdego $u \in U$. Z drugiej strony wiadomo, że

$$\min\left[\mu_A(u), \mu_B(v)\right] \leqslant \mu_B(v).$$

Oznaczmy:

$$L(u,v) = \min\left[\mu_{A'}(u), \min(\mu_A(u), \mu_B(v))\right].$$

Z twierdzenia 1 wynika, że

$$L(u,v) = \min\left[\mu_{A'}(u), \mu_A(u), \mu_B(v)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \min\left[\mu_A(u), \mu_B(v)\right] \leqslant \mu_B(v)$$

Wartość po prawej stronie nie zależy od u, więc

$$\mu_{B'}(v) = \max_u L(u,v) \leqslant \mu_B(v), \quad \text{tzn.} \quad B' \subset B, \quad \text{c.n.w.}$$

P r z y k ł a d 2

Weźmy tak jak w poprzednim przykładzie:

$$U = \{1, 2, 3\} \qquad A = \{1/0.5, 2/0.7, 3/0.4\}$$

$$V = \{1, 2\} \qquad B = \{1/0.6, 2/0.8\}$$

$$\mu_R = \mu_{A\times B} = \begin{bmatrix} 0.5, & 0.5 \\ 0.6, & 0.7 \\ 0.4, & 0.4 \end{bmatrix}$$

Dany jest zbiór $A' = \{1/0.5, 2/0.6, 3/0.1\}$, szukamy takiego zbioru B', ażeby $A' \times B'$ był podzbiorem zbioru R. Złożeniowa reguła wnioskowania (9) podaje, że B' oblicza się jako złożenie maksyminowe zbioru A' ze zbiorem R oraz z (9') mamy

$$\mu_{B'}(v) = \max_u \min \left[\mu_{A'}(u), \mu_R(u,v)\right],$$

$$\max \min \left[0{,}5,\ 0{,}6,\ 0{,}1\right] \circ \begin{bmatrix} 0{,}5, & 0{,}5 \\ 0{,}6, & 0{,}7 \\ 0{,}4, & 0{,}4 \end{bmatrix} = \left[0{,}6,\ 0{,}6\right]$$

Otrzymaliśmy zbiór $B' = \{1/0{,}6,\ 2/0{,}6\}$. Jak widać, $B' \subset B$.

P.J. KING i E.H. MANDANI w pracy [9] (wydanej w 1977 roku) podają dla podwójnej implikacji:

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

dla danych zbiorów rozmytych: A, B, C, A', B' i szukanego C złożeniową regułę postaci:

$$C' = A' \circ B' \circ (A \times B \times C),$$

co niestety jest błędne. Jak łatwo można zauważyć, w przypadku podwójnej implikacji, zbiór C' spełniający warunek $A' \times B' \times C' \subset R$, równa się:

$$C' = B' \circ \left[A' \circ (A \times B \times C)\right] \tag{10}$$

zań funkcja przynależności $u_{C'}$, dana jest wzorem (10), w lemacie 2.

LEMAT 2

Dana jest podwójna implikacja $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, którą reprezentuje podzbiór rozmyty $A \times B \times C = K$ (A jest zbiorem rozmytym w przestrzeni U, B jest zbiorem rozmytym z przestrzeni W, C zb. r. z V). Jeżeli $A' \subset A$ i $B' \subset B$, to zbiór C' spełniający podwójną implikację $A' \Rightarrow (B' \Rightarrow C)$ dany jest wzorem (10), czyli:

$$\mu_{C'}(v) = \max_w \min \left\{\mu_{B'}(w),\ \max_u \min\left\{\mu_{A'}u,\ \mu_K(u,w,v)\right\}\right\} \tag{10}$$

oraz tak otrzymany C' jest zawarty w C.

D o w ó d   l e m a t u:

Oznaczmy:

$$B \times C = D \tag{a}$$

Wtedy

$$K = A \times B \times C = A \times D,$$

oczywiście D jest podzbiorem rozmytym przestrzeni $W \times V$.

Dla danego zbioru $A' \subset A$, zgodnie z (9) otrzymujemy:

$$D' = A' \circ (A \times D) \tag{b}$$

$$\mu_{D'}(w,v) = \max_{u} \min\left[\mu_{A'}(u), \min(\mu_A(u), \mu_D(w,v)\right] \tag{b}$$

Z lematu 1 wynika, że $D' \subset D$, czyli zgodnie z (a) D' jest podzbiorem relacji $B \times C$.

W zbiorze D', "generowanym" w $B \times C$ przez podzbiór A', zastosujemy drugi raz regułę złożeniową (9), dla danego $B' \subset B$ poszukamy odpowiedniego C, takiego ażeby $B' \Rightarrow C'$

Zgodnie z (9) i (9'):

$$C' = B' \circ D', \qquad \mu_{C'}(v) = \max_{w} \min\left[\mu_B(w), \mu_{D'}(w,v)\right]$$

co uwzględniając (a) i (b) oraz (b'), daje:

$$C' = B' \circ (A' \circ (A \times B \times C)) \tag{10}$$

$$\mu_{C'}(v) = \max_{w} \min(\mu_{B'}(w), \max_{u} \min(\mu_{A'}(u), \min(\mu_A(u), \mu_B(w), \mu_C(v))))$$

Pozostaje udowodnić, że tak otrzymany zbiór C' jest podzbiorem zbioru C. W tym celu wystarczy pokazać, że $\mu_{C'}(v) \leqslant \mu_C(v)$.

Z lematu 1 otrzymujemy dla zbioru D' danego wzorem (b), że $D' \subset D$ czyli $\mu_{D'}(w,v) \leqslant \mu_D(w,v)$. $B' \subset B$, czyli $\mu_{B'}(w) \leqslant \mu_B(w)$.

$$\min\left[\mu_{B'}(w), \mu_{D'}(w,v)\right] \leqslant \min\left[\mu_{B'}(w), \mu_D(w,v)\right] =$$

$$\min\left[\mu_{B'}(w), \min(\mu_B(w), \mu_C(v))\right] \leqslant \min\left[\mu_B(w), \mu_C(v)\right] \leqslant \mu_C(v),$$

prawa strona nie zależy od w, a więc również maksimum po w z wyrażenia po lewej stronie spełnia powyższą nierówność:

$$\mu_{C'}(v) = \max_{w} \min\left[\mu_{B'}(w), \mu_{D'}(w,v)\right] \leqslant \mu_C(v),$$

czyli $C' \subset C$, co należało wykazać.

Niech będzie dana implikacja:

$$A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow \dots (A_n \Rightarrow B) \dots) = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times B = K, \tag{11}$$

gdzie:

A_i - są zbiorami rozmytymi w przestrzeni U_i $(i = 1,2,\dots,n)$,

B - jest zbiorem rozmytym w przestrzeni V.

Zgodnie z twierdzeniem 1:

$$\mu_K(u_1,u_2,\dots,u_n,v) = \min\left[\mu_{A_1}(u_1), \mu_{A_2}(u_2),\dots, \mu_{A_n}(u_n), \mu_B(v)\right] \tag{11}$$

Dane są podzbiory $A'_i \subset A_i$, tworzące n elementowy ciąg poprzedników w implikacji (11). Jak znaleźć zbiór B, będący następnikiem takiej implikacji? Opisuje i rozwiązuje ten problem tzw. 2.

T w i e r d z e n i e 2

Jeżeli na wejściu zadanego układu spełniającego (11) dane są podzbiory rozmyte A'_i zbiorów rozmytych A_i, $i = 1,2,\dots,n$ (czyli dane są poprzedniki implikacji (11)), to zbiór B' (następnik implikacji) otrzymany na wyjściu układu (11) wyraża się wzorem:

$$B' = A'_n \circ \left[A'_{n-1} \circ \dots \circ \left[A'_1 \circ (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times B)\right] \dots\right] \tag{12}$$

natomiast funkcja przynależności przyjmuje postać:

$$\mu_{B'}(v) = \max_{u_n} \min\left[\mu_{A'_n}(u_n), \max_{u_{n-1}} \min \min \dots \max_{u_1} \min \mu_{A_1}(u_1), \mu_K(u_1 \dots v) \dots\right]$$

gdzie: $\mu_K(u_1,u_2,\dots,u_n,v)$ dane jest wzorem (11').

Dowód poprowadzimy przez indukcję ze względu na "n".

1. Dla $n = 1$ mamy

$$A_1 \times B = K, \quad A'_1 \subset A_1$$

skąd zgodnie z regułami (9) i (9') otrzymujemy

$$B' = A'_1 \circ (A_1 \times B)$$

$$\mu_{B'}(v) = \max_{u \in U_1} \min\left[\mu_{A'_1}(u_1), \mu_K(u_1,v)\right],$$

co się pokrywa z tezą twierdzenia dla $n = 1$.

2. Wykonamy teraz krok indukcyjny

Założenie indukcyjne

Dane są zbiory rozmyte $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, C oraz $A_1', A_2', \ldots, A_{n-1}'$ odpowiednio w przestrzeni U_i $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ oraz C w Z.

Dana jest implikacja:

$$A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow C)\ldots) = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1} \times C.$$

Wtedy zbiór C' będący następnikiem powyższej implikacji, gdy $A_1', \ldots, A_{n-1}'$ są jej poprzednikami, dany jest wzorem:

$$C' = A_{n-1}' \circ \left[A_{n-2}' \circ \ldots \circ \left[A_1' \circ (A_1 \times A_2 \times \ldots A_{n-1} \times C)\right] \ldots\right] \tag{13}$$

$$\mu_{C'}(z) = \max_{u_{n-1}} \min \Big[\mu_{A_{n-1}'}(u_{n-1}, \max_{u_{n-2}} \min \Big[\mu_{A_{n-2}'}(u_{n-2}) \ldots$$

$$\ldots \max_{u_1} \min \Big[\mu_{A_1'}(u_1), \mu_{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1} \times C}(u_1, \ldots, u_{n-1}, z)\Big] \ldots\Big] \tag{13'}$$

Teza indukcyjna

Jeżeli dane są zbiory rozmyte A_i, $i = 1,2,\ldots,n-1,n$ oraz zbiór rozmyty B, odpowiednio z przestrzeni U_i oraz V oraz spełniona jest relacja R:

$$A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\ldots A_{n-1} \Rightarrow (A_n \Rightarrow B) = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times B = R$$

to dla danych A_i' A_i, $i = 1,2,\ldots,n$, zbiór $B' \subset B$ będący następnikiem implikacji, (w której A_i' są poprzednikami) dany jest wzorem

$$B' = A_n' \circ (A_{n-1}' \circ \ldots \circ (A_i' \circ R) \ldots) \tag{14}$$

$$\mu_{B'}(v) = \max_{u_n} \min \Big[\mu_{A_n}(u_n), \max_{u_{n-1}} \min \ldots \max_{u_i} \min \big[\mu_{A_1}(u_i), \mu_R(u_1 \ldots v)\big]\Big] \tag{14'}$$

Dowód tezy indukcyjnej

W iloczynie kartezjańskim $R = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1} \times A_n \times B$ wprowadźmy oznaczenie:

$$C = A_n \times B,$$

oczywiście C jest zbiorem rozmytym przestrzeni $U_n \times V$.

Dla relacji $R = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1} \times C$, z założenia indukcyjnego, dla danych $A_1', A_2', \ldots, A_{n-1}'$ otrzymujemy zbiór C' spełniający wzór (13) i (13'), $C' \subset C$. C' jest podzbiorem zbioru C "generowanym" przez $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Ale $C' \subset C = A_n \times B$, więc podobnie jak w lemacie 2 znajdujemy zbiór B' odpowiadający danemu $A_n' \in A_n$:

$$B' = A_n' \circ C', \tag{15}$$

$$\mu_{B'}(v) = \max_{u_n} \min\left[\mu_{A_n'}(u_n), \mu_{C'}(u_n, v)\right] \tag{15'}$$

Podstawiając (15) do (13) oraz (15') do (13') otrzymujemy wzory (14) i (14'), które są tezą części indukcyjnej.

Fakt, że tak otrzymany zbiór B' jest podzbiorem zbioru B, wynika bezpośrednio z lematu 2. Tym samym dowód twierdzenia 2 jest zakończony.

5. Uwagi na temat zdania warunkowego, zdefiniowanego w [4]

$$\text{"If } A \text{ then } B \text{ else } C\text{"} = A \times B \cup \neg A \times C$$

(jeżeli A to B, w przeciwnym razie C).

Naturalnym uogólnieniem powyższej definicji jest (zgodnie zresztą z ALGOLEM) zdanie waruniowe (16) reprezentowane przez następujący zbiór rozmyty E_n:

$$\text{"If } A_1 \text{ then } B_1 \text{ else if } A_2 \text{ then } B_2 \text{ else} \ldots \text{ else if } A_n \text{ then } B_n\text{"}$$

$$= A_1 \times B_1 \cup \neg A_1 \cap A_2 \times B_2 \cup \ldots \cup \neg A_1 \cap \ldots \cap \neg A_{n-1} \cap A_n \times B_n = E_n \tag{16}$$

Można udowodnić, że dla zbiorów rozmytych wzór (16) da się zapisać w prostszej postaci.

LEMAT 3

Jeżeli A_i są rozłącznymi, rozmytymi podzbiorami przestrzeni U, a B_i są rozmytymi (lub nie) podzbiorami przestrzeni V, to zbiór 16 wyraża się:

$$E_n = A_1 \times B_1 \cup A_2 \times B_2 \cup \ldots \cup A_n \times B_n \tag{17}$$

D o w ó d

Przyjmujemy następującą definicję rozłącznych zbiorów rozmytych: A_1 jest rozłączne z A_2, gdy $A_2 \subset \neg A_1$, dla każdego $u \in U$.

Przedstawmy zbiór E_n ze wzoru (16) w postaci złącza:

$$E_n = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \ldots \cup S_n,$$

gdzie:

$$S_1 = A_1 \times B_1$$

$$S_2 = \neg A_1 \cap A_2 \times B_2$$

$$S_3 = \neg A_1 \cap \neg A_2 \cap A_3 \times B_3$$

...

$$S_n = \neg A_1 \cap \neg A_2 \cap \neg A_3 \cap \ldots \cap \neg A_{n-1} \cap A_n \times B_n.$$

Z definicji złącza otrzymujemy:

$$\mu E_n = \max\left[\mu_{S_1}, \mu_{S_2}, \ldots, \mu_{S_n}\right]. \tag{18}$$

Z definicji iloczynu kartezjańskiego mamy:

$$\mu_{S_1}(u) = \min\left[\mu_{A_1}(u), \mu_{B_1}(v)\right]$$

Obliczymy funkcję przynależności zbioru $S_2 = \neg A_1 \times A_2 \times B_2$. Ponieważ $A_2 \subset \neg A_1$, więc $\mu_{A_2}(u) \leqslant \mu_{\neg A_1}(u)$,

$$\mu_{\neg A_1 \cap A_2}(u) = \min\left[\mu_{\neg A_1}(u), \mu_{A_2}(u)\right] = \mu_{A_2}(u),$$

z czego wynika, że przekrój zbiorów rozmytych $\neg A_1 \cap A_2 = A_2$, czyli zbiór $S_2 = A_2 \times B_2$.

Podobnie dla zbioru S_3:

$$A_3 \subset \neg A_1 \quad \text{i} \quad A_3 \subset \neg A_2, \quad \text{tzn.} \quad \mu_{A_3} \leqslant \mu_{A_1} \quad \text{i} \quad \mu_{A_3} \leqslant \mu_{A_2},$$

czyli:

$$\mu_{\neg A_1 \cap \neg A_2 \cap A_3}(u) = \min\left[\mu_{\neg A_1}(u), \mu_{\neg A_2}(u), \mu_{A_3}(u)\right] = \mu_{A_3}(u)$$

a z tego wynika, że $\neg A_1 \cap \neg A_2 \cap A_3 = A_3$.

Dla zbioru S_n z założenia są spełnione nierówności:

$$A_n \subset \neg A_i \quad \text{dla } i = 1,2,\dots,n-1, \quad \text{a więc } \mu_{A_n} \leq \mu_{\neg A_i}.$$

$$\mu_{\neg A_1 \cap \neg A_2 \cap \dots \neg A_{n-1} \cap A_n}(u) = \min\left[\mu_{\neg A_1}(u), \mu_{\neg A_2}(u), \dots, \mu_{A_n}(u)\right] = \mu_{A_n}(u),$$

czyli

$$\neg A_1 \cap \neg A_2 \cap \dots \cap \neg A_{n-1} \cap A_n = A_n,$$

a więc składnik $S_n = A_n \times B_n$.

Reasumując, zbiór E_n udało się przedstawić w postaci n członowej sumy iloczynów kartezjańskich (reprezentujących implikacje)

$$E_n = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = A_1 \times B_1 \cup A_2 \times B_2 \cup \dots \cup A_n \times B_n \tag{19}$$

zaś μ_{E_n} określona jest wzorem (18), co należało wykazać.

6. Wnioski końcowe

a. Z lematu 3 wynika, że implikacja (16): "If A_1 then B_1 else if A_2 then B_2 ... else if A_n then B_n" jest równoważna w przypadku zbiorów rozłącznych, rozmytych, alternatywnie prostych implikacji: "If A_1 then B_1 or if A_2 then B_2 or ... or if A_n then B_n".

b. Podane tutaj twierdzenia można uogólnić na dowolne L - zbiory, dla dowolnej zupełnej, rozdzielnej karty L, wystarczy tylko operacje "min" i "max" zastąpić wszędzie przez "inf" i "sup".

c. Według podanej w lemacie 3 definicji zbiorów rozmytych rozłącznych, jeżeli $A \subset \neg B$, to również $B \subset \neg A$, czyli relacja ta jest symetryczna. Dla zbiorów rozmytych rozłącznych A i B może się zdarzyć, że $A \subset B$. Niech przestrzenią U będzie przedział $[0,2]$, niech będą zadane podziory rozmyte A i B, zdefiniowane przez:

$$\mu_A(u) = \frac{1}{8}u \quad \text{oraz} \quad \mu_B(u) = \frac{1}{4}u, \quad u \in [0,2].$$

Oczywiście, w tym przypadku $A \subset B$. Dopełnienie zbioru B zgodnie z definicją (1) ma funkcję przynależności:

$$\mu_{\neg B}(u) = 1 - \frac{1}{4}u,$$

czyli dla każdego $u \in U$: $\mu_A(u) \leq \mu_{\neg B}(u)$, tzn. $A \subset \neg B$.

W tym przykładzie nawet $B \subset \neg B$, co oczywiście tylko "brzmi" paradoksalnie, bo przecież dla zbiorów rozmytych inna jest definicja relacji zawierania zbiorów).

Powyższy mały przykład pokazuje jak bardzo teoria zbiorów rozmytych - (będąca w pewnym sensie rozszerzeniem "tradycyjnej" teorii zbiorów, gdyż funkcje przynależności można intepretować [7] jako funkcję charakterystyczną zbioru, przyjmującą wartości z przedziału $[0,1]$, niekoniecznie tylko 0 albo 1) - jest różna od dotychczas znanych teorii zbiorów.

Szybki rozwój teorii zbiorów rozmytych oraz tzw. logiki rozmytej, jej rozległe i wciąż nowe zastosowania świadczą o ogromnej przydatności i potrzebie dalszego rozwijania tej teorii.

LITERATURA

[1] Zadeh L.A.: Fuzzy sets, Inform. Control, 8, 1965.

[2] Zadeh L.A.: Fuzzy algorithms, Inform. Control, 12, 1968.

[3] Bellman R.E., Zadeh L.A.: Decision - making in fuzzy enviroment, Management Science, 17, N.4, 1970.

[4] Zadeh L.A.: Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, IEEE Trans. Systems Man and Cybernetics SMC, 3 January 1973.

[5] Wiess M.D.: Fiseedpoints separation and induced topologies for fuzzy sets, J. of Math. Anal, and Appl. 1975 N.1.

[6] Knopfmacher J.: On measures of fuzziness, J. of Math.Anal. and Appl. 49, 1975.

[7] Negoită C.V., Ralescu D.A.: Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis, 1975, Birkhauser Verlag, Basel und Stuttgart.

[8] Kickert W.J.M., Van Nauta Lemke H.R.: Application of a fuzzy controller in a warm water plant, Automatica, Vol. 12, 1976.

[9] King P.I., Mandami E.H.: The application of fuzzy control systems to industrial processes, Automatica, Vol. 13, 1977.

[10] Koczy L.T., Hajnal M.: A new attempt to axiomatize fuzzy algebra with an application example, Problems of Control and Information Theory, Vol. 6 (1), 1977.

О НЕКОТОРЫХ ПРАВИЛАХ РАЗМЫТОЙ ЛОГИКИ

Р е з ю м е

Предметом работы является обобщение некоторых формул логики. Исследован случай импликации, состоящий: "if A_1 then if A_2 then... а также выводное правило сложения, позволяющее найти последующий член отношения. Этой импликации, если даны её предыдущие члены отношения. Доказательство правильности обобщающих формул дают теоремы 1 и 2. Лемма 3 определяет сложное условное предложение типа: "If A_1 then B_1 else if A_2 then B_2 else ...if A_n then B_n" а также условия замены этого предложения на сложную сумму простых имликаций:

"If A_1 then B_1 or ... or if A_n then B_n". Представленные формулы могут найти применение при анализе и описании сложных промышленных продессов.

EBAUD SOME RULES OF FUZZY LOGICS

S u m m a r y

The paper takes the greatest interest in generalizing ceratain principles of the fuzzy (multi-value) logics. The case of composite implication is discussed: "If A_1 then if A_2 then... if A_{n-1} then A_n", and the complex assumption inference rule allowing for finding the consequent of this implication if its antecedents are given. The proofs of correctness of the generalized rules are given by theorems 1 and 2. The lemma 3 discusses the coposite conditional sentence of the type: "If A_1 then B_1 else if A_2 then B_2 else ... if A_n then B_n" and the conditions of changing this sentence into the composite alternative of simple implications: "If A_1 then B_1 or ... or if A_n then B_n". The presented rules can be utilized in analysis and description of the complex technological processes.