ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 31 Nr kol. 608

Lucjan MERES

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH ZBIORÓW TYPU G_δ W PRZESTRZENI EUKLIDESA DWUWYMIAROWEJ

Streszczenie. W pracy udowodniono zależności (4)-(15) odnoszące się do zbiorów typu G_δ. Rezultaty te stanowią uogólnienie na przestrzeń dwuwymiarową E_2 analogicznego wyniku dla przestrzeni E_1, znanego od 1946 roku i należącego do Zygmunta Zahorskiego. Cytowany tu wynik Z. Zahorskiego jest częścią obszerniejszej pracy [1]. Udowodnione twierdzenie może znaleźć zastosowanie przy rozwiązywaniu problemu analogicznego jak w pracy [1], a dotyczącego funkcji dwu zmiennych.

Oznaczenia:

E_2 - przestrzeń Euklidesa dwuwymiarowa (z układem współrzędnych Oxy),

$\bar{A}$ - domknięcie zbioru A,

$\varrho(p,q)$ - odległość punktów p i q,

$\varrho(p,A) = \inf\limits_{a\in A} \varrho(p,a)$,

$\varrho(A,B) = \inf\limits_{a\in A, b\in B} \varrho(a,b)$

Φ - zbiór pusty.

Niech G będzie dowolnym zbiorem typu G_δ leżącym w E_2. Jak wiadomo zbiór G można przedstawić w postaci iloczynu

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \tag{1}$$

zbiorów otwartych G_n (n = 1,2,3,...) takich, że

$$G_{n+1} \subset G_n \tag{2}$$

Każdy ze zbiorów otwartych G_n jest sumą

$$G_n = \bigcup_{l=1}^{\infty} P_{n,l} \tag{3}$$

kwadratów domkniętych $P_{n,l}$ $(n = 1,2,3,\dots)$ o rozłącznych wnętrznach i mających boki równoległe do osi x i y układu współrzędnych.

W niniejszej pracy udowodnimy następujące

T w i e r d z e n i e

Dla dowolnego zbioru G typu G_δ w E_2 i dla każdej pary n,l liczb naturalnych istnieje

a) zbiór domknięty nigdzie gęsty Φ_n,

b) zbiory domknięte B_n i T_n rozłączne, przy czym T_n jest sumą skończonej liczby kwadratów domkniętych o rozłącznych wnętrzach i mających boki równoległe do osi x i y układu współrzędnych albo jest pusty,

c) liczby naturalne m_n, k_n, d_n

takie, że wraz z warunkami (1), (2), (3) spełnione są warunki:

$$\bar{G} - G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n, \tag{4}$$

$$\Phi_n \subset \Phi_{n+1}, \tag{5}$$

$$\varrho(P_{n,l}, \Phi_n) > 0, \tag{6}$$

ciąg

$$P_{m_1,k_1}, P_{m_2,k_2}, P_{m_3,k_3}, \dots \tag{7}$$

zawiera wszystkie kwadraty $P_{n,l}$ odpowiadające rozkładom (3)

$$m_n \leqslant n, \tag{8}$$

$$\left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\} \supset P_{m_n,k_n}, \tag{9}$$

$$d_{n+1} > d_n, \tag{10}$$

$$\Phi_{n+1} \subset B_n \subset \left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\}, \tag{11}$$

$$\bar{G} \cap B_n = \bar{G} \cap \left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\}, \tag{12}$$

$$T_n \subset \left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\}, \tag{13}$$

$$T_n \subset T_{n+1}, \tag{14}$$

$$E_2 - \bar{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n. \tag{15}$$

Analogiczne twierdzenie udowodniono w pracy [1], dla przypadku przestrzeni E_1.

D o w ó d

Załóżmy najpierw, że $G \neq \Phi$. Weźmy pod uwagę wszystkie ciągi kwadratów występujących w rozkładach (3). Każdy wyraz $P_{n,1}$, każdego z tych ciągów spełnia warunek

$$\varrho(P_{n,1}, E_2 - G_n) > 0, \tag{16}$$

bo zbiory $P_{n,1}$ i $E_2 - G_n$, są przy każdym n domknięte i rozłączne, ponadto $P_{n,1}$ jest ograniczony.

Zbudujmy macierz nieskończoną

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} & P_{1,4} & \cdots \\ P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} & P_{2,4} & \cdots \\ P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} & P_{3,4} & \cdots \\ P_{4,1} & P_{4,2} & P_{4,3} & P_{4,4} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} & \begin{array}{l} n = 1 \\ n = 2 \\ n = 3 \\ n = 4 \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{17}$$

której wierszami są ciągi kwadratów występujących w rozkładach (3), $n = 1, 2, \ldots$ Elementy macierzy (17) ustawmy w ciąg przekątniowy, to znaczy taki, że na pierwszym miejscu stoi $P_{1,1}$, a następnie by suma wskaźników $n + l$ była niemalejąca i żeby w grupach kwadratów, w których $n + l = \text{const.}$ rósł wskaźnik l.

Otrzymamy w ten sposób ciąg

$$P_{1,1},\ P_{2,1},\ P_{1,2},\ P_{3,1},\ P_{2,2},\ P_{1,3},\ P_{4,1}, \ldots, P_{1,4},\ P_{5,1} \tag{18}$$

Definiujemy liczby m_n jako pierwsze wskaźniki wyrazów ciągu (18), natomiast k_n jako drugie wskaźniki wyrazów tego ciągu, tak więc

$$m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ m_3 = 1,\ m_4 = 3,\ m_5 = 2,\ m_6 = 1,\ m_7 = 4,\ldots$$

$$k_1 = 1,\ k_2 = 1,\ k_3 = 2,\ k_4 = 1,\ k_5 = 2,\ k_6 = 3,\ k_7 = 1,\ldots$$

Jest oczywiste, że $m_n \leqslant n$. W ciągu (18) leżą wszystkie kwadraty $P_{n,l}$ odpowiadające rozkładom (3). Udowodniliśmy zatem (7) i (8). Określimy teraz liczby naturalne d_n.

Niech d_1 będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że

$$\left\{(x,y):\ -d_1 \leqslant x \leqslant d_1,\ -d_1 \leqslant y \leqslant d_1\right\} \supset P_{m_1,k_1} = P_{1,1}.$$

Liczba d_1 istnieje bo P_{m_1,k_1} jest zbiorem ograniczonym. d_2 niech będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $d_2 > d_1$ i

$$\left\{(x,y):\ -d_2 \leqslant x \leqslant d_2,\ -d_2 \leqslant y \leqslant d_2\right\} \supset P_{m_2,k_2}.$$

Liczba d_2 istnieje bo zbiór P_{m_2,k_2} jest ograniczony. Przypuśćmy, że mamy już zdefiniowane liczby naturalne

$$d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$$

takie, że $d_i > d_{i-1}$ oraz

$$\left\{(x,y):\ -d_i \leqslant x \leqslant d_i,\ -d_i \leqslant y \leqslant d_i\right\} \supset P_{m_i,k_i}$$

dla $i = 1,2,\ldots,n-1$.

Niech d_n będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $d_n > d_{n-1}$ oraz

$$\left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\} \supset P_{m_n,k_n}.$$

Liczba d_n istnieje bo zbiór P_{m_n,k_n} jest ograniczony.

W ten sposób indukcyjnie określiliśmy ciąg $\{d_n\}$ liczb naturalnych d_n, które przy każdym $n \geqslant 1$ spełniają warunki (9) i (10).

Rozważmy ciąg

$$H_1, H_2, H_3, \ldots \tag{19}$$

pokryć zbioru $\bar{G}$ takich, że H_n jest sumą kwadratów otwartych K_q, mających środki w punktach $q = (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{G}$ i boki równoległe do osi układu współrzędnych, których długości wynoszą $\frac{1}{n}$, to znaczy

$$H_n = \bigcup_{q\in\bar{G}} K_q, \tag{20}$$

gdzie

$$K_q = \left\{(x,y):\ \bar{x} - \frac{1}{2n} < x < \bar{x} + \frac{1}{2n},\ \bar{y} - \frac{1}{2n} < y < \bar{y} + \frac{1}{2n}\right\} \tag{21}$$

Zbiory H_n są oczywiście otwarte i spełniają warunki

$$\bar{G} \subset H_{n+1} \subset H_n. \tag{22}$$

Zbiór

$$H_n \cap \left\{(x,y):\ -d_n < x < d_n,\ -d_n < y < d_n\right\} \tag{23}$$

jest otwarty jako iloczyn zbiorów otwartych (może być pusty).

Przyjmijmy

$$B_n = \overline{H_n \cap \left\{(x,y):\ -d_n < x < d_n,\ -d_n < y < d_n\right\}} \tag{24}$$

Zbiór B_n jest domknięty (być może jest pusty) i na podstawie własności operacji domknięcia $(\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B})$ spełnia warunek

$$B_n \subset \overline{\left\{(x,y):\ -d_n < x < d_n,\ -d_n < y < d_n\right\}} \cap \bar{H}_n \subset$$

$$\subset \left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\}. \tag{25}$$

Mamy więc prawą część relacji (11).

Udowodnimy teraz (12).

Wiadomo, że dla dowolnego zbioru A i dowolnego zbioru otwartego B ma miejsce relacja

$$\overline{B \cap A} \supset B \cap \bar{A}. \tag{26}$$

Dzięki (26) i definicji (24) zboru B_n, a także temu, że zbiór H_n jest otwarty możemy napisać

$$B_n \supset H_n \cap \left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\}. \tag{27}$$

Mnożąc obydwie strony (27) przez $\bar{G}$ i uwzględniając (22) dostajemy

$$B_n \cap \bar{G} \supset \bar{G} \cap H_n \cap \left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\} =$$

$$= (\bar{G} \cap H_n) \cap \left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\} =$$

$$= \bar{G} \cap \left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\}.$$

Aby uzyskać zawieranie w drugą stronę, wystarczy pomnożyć sobie strony (25) przez zbiór $\bar{G}$. Warunek (12) został więc udowodniony. Zdefiniujemy teraz zbiory Φ_n i wykażemy (4), (5), (6) i lewą część (11).

Niech

$$\Phi_1 = \bar{G} \cap B_1 - G_1, \tag{28}$$

$$\Phi_n = \bar{G} \cap B_{n-1} - G_n \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2. \tag{29}$$

Przede wszystkim zbiory Φ_n są domknięte (jako różnice zbioru domkniętego i otwartego).

Ponadto

$$\Phi_{n+1} = \bar{G} \cap B_n - G_{n+1} \subset \bar{G} \cap B_n \subset B_n,$$

a więc mamy lewą część (11). Wcześniej udowodniliśmy prawą część, czyli (11) jest wykazana.

Na podstawie (2) jest $G_2 \subset G_1$, więc

$$\bar{G} \cap B_1 - G_1 \subset \bar{G} \cap B_1 - G_2,$$

czyli

$$\Phi_1 \subset \Phi_2.$$

Niech będzie $n \geqslant 2$.

Z udowodnionej już (12) oraz (2) i (10) wynika, że

$$\Phi_n = \bar{G} \cap B_{n-1} - G_n = \bar{G} \cap \left\{(x,y):\ -d_{n-1} \leqslant x \leqslant d_{n-1},\ -d_{n-1} \leqslant y \leqslant d_{n-1}\right\} -$$

$$- G_n \subset \bar{G} \cap \left\{(x,y):\ -d_{n-1} \leqslant x \leqslant d_{n-1},\ -d_{n-1} \leqslant y \leqslant d_{n-1}\right\} - G_{n+1} \subset$$

$$\subset \bar{G} \cap \left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\} - G_{n+1} =$$

$$= \bar{G} \cap B_n - G_{n+1} = \Phi_{n+1}.$$

Relacja (5) jest więc wykazana.

Z (28) i (29) widać, że dla każdego n jest

$$\Phi_n \subset E_2 - G_n.$$

Wobec tego i (16) mamy

$$\varrho(P_{n,1}, \Phi_n) \geqslant \varrho(P_{n,1}, E_2 - G_n) > 0,$$

czyli ma miejsce (6).

Dla $n \geqslant 2$ mamy

$$\Phi_n = \bar{G} \cap B_{n-1} - G_n = \bar{G} \cap B_{n-1} \cap (E_2 - G_n) \subset \bar{G} \cap (E_2 - G_n) \subset$$

$$\subset \bar{G} \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_2 - G_n) = \bar{G} \cap (E_2 - \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) = \bar{G} \cap (E_2 - G) =$$

$$= \bar{G} - G.$$

Analogicznie pokazuje się, że

$$\Phi_1 \subset \bar{G} - G.$$

Tak więc

$$\Phi_n \subset \bar{G} - G, \quad \text{dla} \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{30}$$

Wobec tego jest też

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n \subset \bar{G} - G. \tag{31}$$

Jeżeli $\bar{G} - G = \Phi$, to ma miejsce także inkluzja przeciwna.
Załóżmy, że $\bar{G} - G \neq \Phi$.
Niech

$$q \in \bar{G} - G, \quad \text{wtedy} \quad q \in \bar{G} \quad \text{i} \quad q \notin G.$$

Z drugiego warunku wynika, że $q \notin G_n$, dla pewnego $n = \bar{n}(q)$.
W związku z tym i (2)

$$q \notin G_n \tag{32}$$

dla wszystkich $n > \bar{n}(q)$.

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} d_n = +\infty$, bo ciąg $\{d_n\}$ liczb naturalnych d_n jest wobez (10) rosnący, więc musi istnieć liczba $\bar{\bar{n}}(q)$ taka, że dla $n > \bar{\bar{n}}(q)$ jest

$$q \in \left\{(x,y):\ -d_{n-1} \leqslant x \leqslant d_{n-1},\ -d_{n-1} \leqslant y \leqslant d_{n-1}\right\}. \tag{33}$$

Dla $n > \max(\bar{n}(q), \bar{\bar{n}}(q))$ zajdą równocześnie relacje (32) i (33), a to w połączeniu z faktem iż $q \subset \bar{G}$ oznacza, że

$$q \in \bar{G} \cap \left\{(x,y):\ -d_{n-1} \leqslant x \leqslant d_{n-1},\ -d_{n-1} \leqslant y \leqslant d_{n-1}\right\} - G_n,$$

czyli wobec (12)

$$q \in \bar{G} \cap B_{n-1} - G_n = \Phi_n$$

dla pewnego $n > \max(\bar{n}(q), \bar{\bar{n}}(q))$ (i oczywiście wszystkich następnych). Ma więc miejsce relacja

$$\bar{G} - G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n, \tag{34}$$

która wraz z (31) daje (4).

Trzeba jeszcze pokazać, że zbiory Φ_n są nigdziegęste. Zauważmy w tym celu, że zbiór $\bar{G} - G$ jest zbiorem brzegowym. Istotnie, gdyby tak nie było, to byłby punkt $p \in \bar{G} - G$ niebędący punktem brzegowym tego zbioru. W takim razie istnieje otoczenie (kołowe) $U(p,r)$ punktu p o środku w tym punkcie i promieniu $r > 0$, w którym nie ma punktów zbioru $E_2 - (\bar{G} - G)$. Znaczy to, że

$$U(p,r) \subset \bar{G} - G. \tag{a}$$

Musi być

$$U(p,r) \cap G = \Phi, \tag{b}$$

bo inaczej (a) nie zachodzi.

Ponieważ $p \in \bar{G} - G$, więc $p \in \bar{G}$, co oznacza, że w zbiorze G istnieje ciąg $\{p_n\}$ zbieżny do punktu $p \in U(p,r)$, $r > 0$.

W takim razie dla dostatecznie dużych n musi być

$$p_n \in U(p,r),$$

czyli $p_n \in G$ i $p_n \in U(p,r)$ dla $n > N$. Przeczy to warunkowi (b).

Tak więc zbiór $\bar{G} - G$ jest zbiorem brzegowym.

W związku z relacją (30) każdy ze zbiorów Φ_n, jako podzbiór zbioru brzegowego, sam jest brzegowy, a ponieważ jest domknięty, więc jest nigdziegęsty, czyli taki jak trzeba.
(Zbiór $\bar{G} - G$ jest w związku z powyższym zbiorem typu F_σ pierwszej kategorii).

Określimy teraz zbiory T_n i udowodnimy (13), (14) i (15).
Jeżeli w (25) zachodzi równość, to przyjmujemy $T_n = \Phi$.
Jeżeli w (25) równość nie zachodzi, to znaczy

$$B_n \subset \left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\}$$

w sensie właściwym, to zbiór ograniczony

$$A_n = \left\{(x,y):\ -d_n < x < d_n,\ -d_n < y < d_n\right\} - B_n \tag{35}$$

jest niepusty i otwarty (jako różnica zbioru otwartego i domkniętego). Łatwo zauważyć, że dla każdego n zachodzi relacja

$$A_n \subset A_{n+1}. \tag{36}$$

Jeżeli w (25) zachodzi równość dla każdego n, to ponieważ $d_n \to +\infty$, musi być $\bar{G} = E_2$ i wtedy $E_2 - \bar{G} = \Phi$. Jak już powiedzieliśmy $T_n = \Phi$ przy każdym n. Jasne jest, że w tym przypadku spełnione są warunki (13), (14) i (15).

Załóżmy, że w (25) równość ma miejsce nie dla wszystkich n. Niech n_0 będzie pierwszą liczbą naturalną, dla której w (25) mamy zawieranie właściwe. Wówczas zbiór otwarty A_{n_0}, określony wzorem (35) jest niepusty, a wobec (36) niepuste muszą być też zbiory

$$A_{n_0+1},\ A_{n_0+2},\ldots$$

Rozważmy dwie rodziny prostych równoległych, przecinających osie x i y w punktach o współrzędnych całkowitych. W ten sposób całą płaszczyznę E_2 podzieliliśmy na kwadraty o bokach długości 1, równoległych do osi układu. Otrzymaną w ten sposób siatkę nazywamy siatką rzędu zerowego. Prowadząc symetralne boków kwadratów siatki rzędu zerowego otrzymamy siatkę rzędu pierwszego. Prowadząc symetralne boków kwadratów siatki rzędu pierwszego otrzymamy siatkę rzędu drugiego itd. Po $s+1$ krokach otrzymamy siatkę rzędu s-tego, której "oczkami" są kwadraty o bokach równoległych do osi układu współrzędnych i długości $\frac{1}{2^s}$.

Niech l będzie rzędem siatki mającej tę własność, że przynajmniej jeden jej kwadrat (domknięty) leży całkowicie w zbiorze A_{n_0}. Takie l musi się znaleźć, bo A_{n_o} jest niepustym zbiorem otwartym. Gdy $n_o > 1$, to zgodnie z przyjętą wyżej umową kładziemy

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_{n_o-1} = \Phi .$$

Niech T_{n_o} będzie sumą tych wszystkich i tylko tych kwadratów domkniętych z siatki rzędu l-tego, które całkowicie leżą w zbiorze A_{n_o}.

Niech T_{n_o+1} będzie sumą tych wszystkich i tylko tych kwadratów domkniętych, wziętych z siatki rzędu l+1, które całkowicie leżą w zbiorze A_{n_o+1}. Ogólnie, niech T_{n_o+m} będzie sumą tych wszystkich i tylko tych kwadratów domkniętych z siatki rzędu l+m, które całkowicie leżą w zbiorze A_{n_o+m} itd.

W ten sposób dla każdego n mamy określone zbiory T_n, które są domknięte (bo albo są puste albo są sumami skończonej ilości kwadratów domkniętych) w każdej siatce długość boków kwadratów jest stała i dodatnia, więc z uwagi na rozłączność wnętrz tych kwadratów, może w zbiorze ograniczonym A_{n_o+m} zmieścić się skończona ich ilość. Zbiory T_n spełniają oczywiście warunek

$$T_n \subset A_n \tag{37}$$

dla każdego n, a więc też

$$T_n \cap B_n = \Phi ,$$

czyli tak jak trzeba.
Ponadto z (37) wynika oczywiście (13).
Ponieważ

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ \ldots ,$$

więc ze sposobu budowy siatek i definicji zbiorów T_n wynika od razu, że $T_n \subset T_{n+1}$, a więc jest (14).
Pozostaje udowodnić (15).
Ponieważ $\bar{G} \cap B_n \subset B_n$, więc z udowodnionej już (12) wynika, że dla każdego n jest

$$B_n \supset \bar{G} \cap \left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\}.$$

Wobec tego

$$E_2 - B_n \subset E_2 - \left(\bar{G} \cap \left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\}\right).$$

Dzięki temu i tożsamości

$$E_2 - (A \cap B) = (E_2 - A) \cup (E_2 - B),$$

dostajemy

$$T_n \subset A_n = \left\{(x,y):\ -d_n < x < d_n,\ -d_n < y < d_n\right\} - B_n =$$

$$= \left\{(x,y):\ -d_n < x < d_n,\ -d_n < y < d_n\right\} \cap (E_2 - B_n) \subset$$

$$\subset \left[\left\{(x,y):\ -d_n < x < d_n,\ -d_n < y < d_n\right\} \cap (E_2 - \bar{G})\right] \cup$$

$$\cup \left[\left\{(x,y):\ -d_n < x < d_n,\ -d_n < y < d_n\right\} \cap\right.$$

$$\left.\cap \left(E_2 - \left\{(x,y):\ -d_n \leqslant x \leqslant d_n,\ -d_n \leqslant y \leqslant d_n\right\}\right)\right] =$$

$$= \left[\left\{(x,y):\ -d_n < x < d_n,\ -d_n < y < d_n\right\} \cap \left(E_2 - \bar{G}\right)\right] \cup \Phi \subset E_2 - \bar{G}.$$

Tak więc dla każdego n mamy

$$T_n \subset E_2 - \bar{G}. \tag{38}$$

W takim razie również

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \subset E_2 - \bar{G}. \tag{39}$$

Jeżeli $E_2 - \bar{G} = \Phi$, to mamy również zawieranie w drugą stronę i ma miejsce (15).

Załóżmy zatem, że $E_2 - \bar{G} \neq \Phi$.

Niech

$$q \in E_2 - \bar{G}.$$

Ponieważ $E_2 - \bar{G}$ jest zbiorem otwartym, więc istnieje otoczenie $U(q,\delta)$ punktu q, o promieniu $\delta > 0$ takie, że

$$U(q,\delta) \subset E_2 - \bar{G}.$$

W takim razie liczba

$$\delta_q = \rho(q,\bar{G}) \geqslant \delta > 0. \tag{i}$$

Niech $n_1(q)$ będzie liczbą naturalną spełniającą warunek $n_1(q) \geqslant \frac{1}{\delta_q}$. Wtedy dzięki (22) mamy

$$\bar{G} \subset H_n \subset H_{n_1} \subset \bigcup_{(\bar{x},\bar{y})\in\bar{G}} \left\{(x,y):\ \bar{x} - \frac{\delta_q}{2} < x < \bar{x} + \frac{\delta_q}{2},\ \bar{y} - \frac{\delta_q}{2} < y < \bar{y} + \frac{\delta_q}{2}\right\}$$

dla każdego $n > n_1(q)$.

Od środka $(\bar{x},\bar{y}) \in \bar{G}$ każdego kwadratu, w powyższej sumie, do jego brzegu jest odległość nie większa niż $\frac{\sqrt{2}}{2}\delta_q$ (połowa długości przekątnej). Odległość punktu q od każdego kwadratu, a więc i od ich sumy jest niemniejsza niż $\frac{\delta_q}{4}$. Gdyby bowiem tak nie było, to przy pewnym $(\bar{x},\bar{y}) \in \bar{G}$, będącym równocześnie środkiem pewnego kwadratu mielibyśmy

$$\rho(q,\bar{G}) \leqslant \rho(q,(\bar{x},\bar{y})) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_q + \frac{\delta_q}{4} < \delta_q,$$

co przeczy (i).

W takim razie dzięki (i) możemy napisać

$$\rho(q,H_n) \geqslant \rho\left(q, \bigcup_{(\bar{x},\bar{y})\in\bar{G}} \left\{(x,y):\ \bar{x} - \frac{\delta_q}{2} < x < \bar{x} + \frac{\delta_q}{2},\ \bar{y} - \frac{\delta_q}{2} < y < \bar{y} + \frac{\delta_q}{2}\right\}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\delta_q}{4} > 0.$$

Jak wiadomo, warunki $a \in \bar{A}$ i $\rho(a,A) = 0$ są równoważne. Wynika stąd i powyższej nierówności, że przy każdym $n > n_1(q) \geqslant \frac{1}{\delta_q}$ spełniony jest warunek $q \notin \bar{A}_n$.

Ponieważ

$$B_n \subset \bar{A}_n \cap \overline{\{(x,y):\ -d_n < x < d_n,\ -d_n < y < d_n\}}$$

więc przy każdym $n > n_1(q)$ jest

$$q \notin B_n. \tag{ii}$$

Z (10) wiemy, że $\lim_{n\to\infty} d_n = +\infty$. Istnieje wobec tego liczba $n_2(q)$ taka, że dla $n > n_2(q)$ będzie

$$q \in \left\{(x,y):\ -d_n < x < d_n,\ -d_n < y < d_n\right\}. \tag{iii}$$

Dla $n \geqslant \bar{n}_0 > \max n_1(q),\ n_2(q)$ zajdą równocześnie relacje (iii) i (ii) a to oznacza, że

$$q \in A_{\bar{n}_0}.$$

Dzięki temu i (36) wnioskujemy, że punkt q należy do każdego ze zbiorów

$$A_m,\ A_{m+1},\ A_{m+2},\ldots,$$

gdzie

$$m \geqslant \max(\bar{n}_0,\ n_0).$$

Ponieważ zbiór A_m jest otwarty, więc wraz z punktem q w zbiorze A_m i następnych leży pewne otoczenie $U(q,r)$, z punktu q o dodatnim promieniu r.

Jeżeli

$$m \geqslant -1 - 1 + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{r}\right),$$

to

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2^{1+m}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{1+m}}\right)^2} \leqslant 2r.$$

Oznacza to, że kwadrat domknięty K, o środku w punkcie q i równoległych do osi układu współrzędnych bokach długości

$$\frac{1}{2^{1+m_0}},$$

gdzie m_0 jest liczbą naturalną większą niż część całkowita liczby

$$-1 - 1 + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{r}\right)$$

leży w otoczeniu $U(q,r)$, a więc też w zbiorze A_{m_0} (i następnych). Jeżeli jest to kwadrat siatki rzędu $1+m_0$, to leży on w zbiorze T_{m_0} (zgodnie z definicją zbioru T_{m_0}), czyli $q \in T_{m_0}$.

Jeżeli nim nie jest, to ma on punkty wspólne z co najwyżej czterema kwadratami, których suma jest kwadratem siatki rzędu $1+m_0 - 1$. Biorąc te-

raz siatkę rzędu o 1 wyższego, to znaczy siatkę rzędu $1+m_o + 1$, znajdziemy w niej przynajmniej jeden kwadrat domknięty K_o zawierający punkt q i leżący w kwadracie K, a więc w zbiorze A_{m_o} i tym bardziej w A_{m_o+1}, czyli w zbiorze T_{m_o+1}.
Oznacza to, że

$$q \in T_{m_o+1}.$$

Pokazaliśmy zatem, że z $q \in E_2 - \bar{G}$ wynika iż $q \in T_n$, dla

$$n > \max(n_o, \bar{n}_o, m_o),$$

czyli

$$E_2 - \bar{G} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n. \tag{40}$$

(39) i (40) dają łącznie (15).

Twierdzenie zostało udowodnione, gdy zbiór G jest niepusty. Jeżeli G jest pusty, to przyjmujemy zbiory G_n jako wnętrza kół o promieniach $r_n = \frac{1}{n}$ i wspólnym środku (np. początku współrzędnych) z wyłączeniem tego środka. Prostokąty $P_{n,1}$ i liczby m_n, k_n, d_n określamy jak poprzednio. Za zbiory B_n i Φ_n przyjmujemy zbiory puste.

$$T_n = (x,y): -d_n \leq x \leq d_n, -d_n \leq y \leq d_n.$$

Widać od razu, że wszystkie punkty tezy naszego twierdzenia są w tym przypadku spełnione.

Zapowiedziane twierdzenie zostało wykazane w zupełności.

LITERATURA

[1] Zahorski Z.: Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les derivées de tous les ordres, Fundamenta Mathematicae, t. XXXIV (1946).

[2] Sikorski R.: Funkcje rzeczywiste, t. I, PWN, Warszawa 1958.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОЖЕСТВ ТИПА G_δ В ДВУХМЕРНОМ ЭИКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Р е з ю м е

В работе доказаны зависимости (4)-(15), относящеся к собранио Типа G_δ Эти результаты становят обобщение на двухразмерное пространство E_2 анологичного результата для пространства E, известиного с 1946 г. и принадлежащего Зигмунту Захорскому. Представленный здесь результат Захорского является частью более крупной работы (1).

Решённое доказательство может найти применение при решении анологичной проблемы как в работе (7) а касающейся функции двух переменных.

EBAND SOME PROPERTIES OF G_δ TYPE SETS IN TWO-DIMENSIONAL ENCLIDES'ES SPACE

S u m m a r y

The paper proved the equations (dependencies) (4)-(15) pertinent to the sets of $G\delta$ type. These results consist the generalization ot the analogous result for the E_1 space, known since 1946 and belonging to Zygmunt Zahorski, onto the two-dimensional space. The quoted Zahorski's result is the part of a bigger research work (1). The proved theorem cna be utilized in solving the problem analogous to the one presented in paper (1), and pertinent to the function of two variables.