ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 31 Nr kol. 608

Maciej KULAWIK

ROZWIĄZANIA PÓŁCIĄGŁE I CIĄGŁE PEWNEGO RÓWNANIA FUNKCYJNEGO

Streszczenie. W niniejszej pracy rozważa się równanie funkcyjne:

$$\varphi(x) = h[x, \varphi[f(x)]],$$

gdzie h i f są to funkcje dane, zaś φ jest funkcją szukaną. W oparciu o twierdzenie A. Pelczara [2] o punkcie stałym, dowodzi się istnienia największego rozwiązania półciągłego z dołu oraz najmniejszego rozwiązania półciągłego z góry. Następnie wykazuje się istnienie i jednoznaczność rozwiązania ciągłego.
Dowód istnienia rozwiązania ciągłego przeprowadza się na nieco innej drodze, niż to było uzyskane w pracy K. Barona [1].

1. Analiza własności równania funkcyjnego $\varphi(x) = h[x, \varphi[f(x)]]$

Rozważmy przestrzeń X wszystkich funkcji rzeczywistych określonych w przedziale $I \subset R$. W przestrzeni tej wprowadza się relację:

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \Leftrightarrow \bigvee_{x \in I} \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$$

Jest to relacja częściowego porządku tzn. posiada następujące własności:

1. $\varphi \leqslant \varphi$ dla każdego $\varphi \in X$
2. Jeśli $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ i $\varphi_2 \leqslant \varphi_1$ to $\varphi_1 = \varphi_2$
3. Jeśli $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ i $\varphi_2 \leqslant \varphi_3$ to $\varphi_1 \leqslant \varphi_3$

Przy tak zdefiniowanej relacji częściowego porządku w przestrzeni X zachodzi następujące twierdzenie:

T w i e r d z e n i e 1 (zob. [2])[1]

Jeśli X jest przestrzenią częściowo uporządkowaną, $T: X \to X$ jest odwzorowaniem rosnącym (tzn. $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \Rightarrow T\varphi_1 \leqslant T\varphi_2$) oraz zbiór $V_1 = \{\varphi \in X : \varphi \leqslant T\varphi\}$ jest niepusty i ma kres górny $\bar{\varphi} \in X$ to $\bar{\varphi}$ spełnia równanie $T\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$.

D o w ó d

Udowodnimy najpierw, że

$$T(V_1) \subset V_1 \tag{1}$$

Niech $\varphi_1 \in T(V_1)$. Wtedy istnieje $\varphi \in V_1$ takie, że $\varphi_1 = T\varphi$. Z definicji V_1 element φ spełnia nierówność $\varphi \leqslant T\varphi$. Odwzorowanie T jest rosnące, więc $\varphi_1 = T\varphi \leqslant T(T\varphi) = T\varphi_1$. Stąd $\varphi_1 \in V_1$. W ten sposób inkluzja (1) została udowodniona.

Obecnie wykażemy, że:

$$\bar{\varphi} = \sup V_1 \in V_1 \tag{2}$$

Z definicji kresu górnego, dla każdego $\varphi \in V_1$, $\varphi \leqslant \bar{\varphi}$ zatem dla każdego $\varphi \in V_1$, mamy $\varphi \leqslant T\varphi \leqslant T\bar{\varphi}$. Wobec tego, że $\bar{\varphi} = \sup V_1$, nierówność $\varphi \leqslant T\bar{\varphi}$ dla każdego $\varphi \in V_1$ implikuje nierówność:

$$\bar{\varphi} \leqslant T\bar{\varphi} \tag{3}$$

Oznacza ona, że zachodzi warunek (2). Warunki (1), (2) implikują, że $T\bar{\varphi} \in V_1$ skąd

$$T\bar{\varphi} \leqslant \bar{\varphi} \tag{4}$$

Z (3) i (4) otrzymujemy $T\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$

cbdo.

Analogicznie dowodzi się następującego twierdzenia [2].

T w i e r d z e n i e 2

Jeśli X jest przestrzenią częściowo uporządkowaną $T : X \to X$ jest odwzorowaniem rosnącym oraz zbiór

$$V_2 = \left\{ \varphi \in X \quad \varphi \geqslant T\varphi \right\}$$

jest niepusty i ma kres dolny $\underline{\varphi} \in X$, to $\underline{\varphi}$ spełnia równanie $T\underline{\varphi} = \underline{\varphi}$.

Jeśli dla funkcji rzeczywistej φ_1 określonej w przedziale $I \subset R$ zachodzi w punkcie $x_o \in I$ nierówność

$$\liminf_{x \to x_o} \varphi_1(x) \geqslant \varphi_1(x_o) \tag{5}$$

to jest ona półciągła z dołu w x_o.

Jeśli zaś dla funkcji rzeczywistej φ_2 określonej w przedziale $I \subset R$ zachodzi w punkcie $x_o \in I$ nierówność

$$\limsup_{x \to x_o} \varphi_2(x) \leqslant \varphi_2(x_o) \quad , \tag{6}$$

to jest ona półciągła z góry w x_o.

Za Łojasiewiczem [3] podaje się następujące definicje:

Obwiednią górną rodziny F nazywamy funkcję $h(x) = \sup_{g \in F} g(x)$

Obwiednią dolną rodziny F nazywamy funkcję $l(x) = \inf_{g \in F} g(x)$

Jak łatwo sprawdzić, warunek (5) jest równoważny następującemu warunkowi:

Jeśli $x_n \to x_o$, to $\liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geq f(x_o)$

zaś warunek (6) jest równoważny warunkowi:

Jeśli $x_n \to x_o$ to $\limsup_{n \to \infty} f(x_n) \leq f(x_o)$

Dla funkcji półciągłych zachodzą następujące dwa twierdzenia: (zob. [3])

T w i e r d z e n i e 3

Odwiednia górna rodziny funkcji półciągłych z dołu w punkcie x_o jest funkcją połciągłą z dołu w punkcie x_o.

T w i e r d z e n i e 4

Obwiednia dolna rodziny funkcji półciągłych z góry w punkcie x_o jest funkcja półciągłą z góry w punkcie x_o.

T w i e r d z e n i e 5

Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x_o \in I \subset R$ a funkcja $\varphi_1(y)$ jest półciągła z dołu w punkcie $y_o = f(x_o)$, to $\varphi_1[f(x)]$ jest funkcją półciągłą z dołu w punkcie $x_o \in I$.

D o w ó d

Z definicji funkcji półciągłej z dołu wynika, że

$$\liminf_{y \to y_o} \varphi_1(y) \geq \varphi_1(y_o)$$

Wybierzmy ciąg $\{x_n\}$ zbieżny do x_o, wtedy

$$y_n = f(x_n) \to f(x_o) = y_o$$

Zatem

$$\liminf_{n \to \infty} \varphi_1[f(x_n)] = \liminf_{n \to \infty} \varphi_1(y_n) \geq \varphi_1(y_o) = \varphi_1[f(x_o)]$$

cbdo

Jeśli Ω jest obszarem zawartym w R^2 to możemy określić zbiory:

$$I_\Omega = \left\{x \in R : \exists_{y \in R} (x,y) \in \Omega\right\}$$

i

$$\Omega_x = \left\{ y \in R : (x,y) \in \Omega \right\}$$

Ponieważ Ω jest obszarem, więc I_Ω jest przedziałem.

T w i e r d z e n i e 6

Przypuśćmy, że $\Omega \in R^2$ jest obszarem ograniczonym, takim że, dla każdego $x \in \bar{I}_\Omega$ zbiór $\bar{\Omega}_x$ jest przedziałem i niech $J \in I_\Omega$ będzie przedziałem. Jeśli $h(x,y)$ jest funkcją ciągła i określoną w $\bar{\Omega}$ oraz rosnącą ze względu na drugą zmienną, zaś $\varphi_1(x)$ jest funkcją określoną dla $x \in J$ i półciągłą z dołu w punkcie $x_o \in J$ taką, że $\varphi_1(x) \in \bar{\Omega}_x$ (co oznacza, że wykres funkcji φ_1 leży w $\bar{\Omega}$) to $h(x,\varphi_1(x))$ jest funkcją półciągłą z dołu w punkcie x_o.

D o w ó d

Z definicji funkcji półciągłej z dołu mamy:

$$\varphi_{1o} = \liminf_{x \to x_o} \varphi_1(x) \geqslant \varphi_1(x_o)$$

Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem takim, że $x_n \in J$ $(n \in N)$, $x_n \to x_o \in J$ oraz ciąg $\{\varphi_1(x_n)\}$ jest zbieżny.
Oznaczmy przez φ_1^* granicę tego ciągu, wtedy $(x_n, \varphi_1(x_n)) \in \bar{\Omega}$ oraz

$$(x_n, \varphi_1(x_n)) \to (x_o, \varphi_1^*)$$

Z domkniętości $\bar{\Omega}$ mamy $(x_o, \varphi_1^*) \in \bar{\Omega}$
Ponieważ $\bar{\Omega}_{x_o}$ jest przedziałem domkniętym, $\varphi_1(x_o), \varphi_1^* \in \bar{\Omega}_{x_o}$ to z nierówności

$$\varphi_1(x_o) \leqslant \varphi_{10} \leqslant \varphi_1^*$$

wynika, że $\varphi_{10} \in \bar{\Omega}_{x_o}$

Stąd jako wniosek otrzymujemy, że

$$(x_o, \varphi_{10}) \in \bar{\Omega} \tag{7}$$

Niech teraz $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem takim, że $x_n \in J$, $x_n \to x_o \in J$ i ciąg $\{h(x_n, \varphi_1(x_n))\}$ jest zbieżny.
Oznaczmy granicę tego ciągu przez h_o. Z ciągu $\{x_n\}$ wybieramy podciąg $\{x_{n_k}\}$ taki, że ciąg $\{\varphi_1(x_{n_k})\}$ jest zbieżny. Wtedy granica φ_{11} tego ciągu ma następujące własności:

$$\varphi_{11} \geqslant \varphi_{0}, \tag{8}$$

$$(x_0, \varphi_{11}) \in \bar{\Omega} \tag{9}$$

Z (7), (8), (9) wobec tego, że h jest ciągła i rosnąca względu na drugą zmienną otrzymuje się:

$$h_0 = \lim_{k \to \infty} h(x_{n_k}, \varphi_1(x_{n_k})) = h(x_0, \varphi_{11}) \geqslant h(x_0, \varphi_{10})$$

Ponieważ

$$\varphi_{10} \geqslant \varphi_1(x_0),$$

więc

$$h_0 \geqslant h(x_0, \varphi_1(x_0)).$$

Liczba h_0 jest dowolną granicą częściową funkcji $h(x, \varphi_1(x))$ w punkcie x_0.
Zatem

$$\liminf_{x \to x_0} h(x, \varphi_1(x)) \geqslant h(x_0, \varphi_1(x_0)).$$

Pokazaliśmy, że funkcja $h(x, \varphi_1(x))$ jest półciągła z dołu.

cbdo.

Analogiczne (do twierdzeń 5 i 6) twierdzenia zachodzą dla funkcji półciągłych z góry. Dowody tych twierdzeń pomijamy.

T w i e r d z e n i e 7

Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in I \subset R$ a funkcja $\varphi_1(y)$ jest półciągła z góry w punkcie $y_0 = f(x_0)$ to $\varphi_1[f(x)]$ jest funkcją półciągłą z góry w punkcie $x_0 \in I$.

T w i e r d z e n i e 8

Przypuśćmy, że $\Omega \subset R^2$ jest obszarem ograniczonym, takim że, dla każdego $x \in I$, zbiór $\bar{\Omega}_x$ jest przedziałem i niech $J \subset I_\Omega$ będzie przedziałem. Jeśli $h(x, y)$ jest funkcją ciągłą i określoną w $\bar{\Omega}$ oraz rosnącą ze względu na drugą zmienną zaś $\varphi_2(x)$ jest funkcją określoną dla $x \in J$ i półciągłą z góry w punkcie $x_0 \in J$ oraz $\varphi_2(x) \in \bar{\Omega}_x$ (co oznacza, że wykres funkcji φ_2 leży w Ω) to $h(x, \varphi_1(x))$ jest funkcją półciągłą z góry w punkcie x_0.

2. Wykazanie istnienia największego rozwiązania półciągłego z dołu

Wprowadźmy następujące założenia:

Z1) $\Omega \subset R^2$ - jest obszarem ograniczonym,

$J \subset I$ - dowolny przedział,

$x \in \bar{I}_{\Omega}$, Ω_x - jest przedziałem

(Z2) Funkcja $f(x)$ rzeczywista, ciągła i określona dla $x \subset J$. Istnieje $\xi \in J$ takie, że

$$0 < \frac{f(x) - \xi}{x - \xi} < 1 \text{ dla } x \in J \quad x \neq \xi$$

Wprowadzamy definicję [4]

$$f^n(x) = \begin{cases} f\left[f^{n-1}(x)\right] & n = 1,2,\ldots \\ x & n = 0 \end{cases}$$

(Z3) $h(x,y)$ jest funkcją ciągłą i określoną w $\Omega \subset R^2$, rosnącą ze względu na drugą zmienną oraz $h(f(x), \bar{\Omega}_{f(x)}) \subset \Omega_x$ dla $x \in \bar{I}_{\Omega}$

(Z4) Nierówność

$$\varphi_1(x) \leqslant h(x, \varphi_1[f(x)])$$

ma rozwiązanie φ_1^* w klasie X_1 funkcji półciągłych z dołu w J, takich, że $\varphi_1[f(x)] \in \bar{\Omega}_x$

(Z5) Nierówność

$$\varphi_2(x) \geqslant h(x, \varphi_2[f(x)])$$

ma rozwiązanie φ_2^* w klasie X_2 funkcji półciągłych z góry w J takich, że $\varphi_2[f(x)] \in \bar{\Omega}_x$

(Z6) Rozwiązania φ_1^* i φ_2^* spełniają nierówność $\varphi_1^* \leqslant \varphi_2^*$

T w i e r d z e n i e 9 ([4] str. 21)

Jeśli J jest dowolnym przedziałem zaś funkcja $f(x)$ spełnia założenia (Z2) w J to

1^o $f(J) \subset J$,

2^o $\lim_{n \to \infty} f^n(x) = \xi$ dla $x \in J$

D o w ó d

1° Ponieważ $\xi \in J$,

więc gdy $\xi < y \in f(J)$

tzn. $\exists_{x \in J} \; y = f(x)$

z założenia (Z2)

$$\xi < y < x \quad \text{tzn.} \quad y \in J,$$

zaś gdy $y < \xi$ i $y \in f(J)$

to znaczy

$$\exists_{x \in J} \; y = f(x)$$

z założenia wynika

$$x < y < \xi \quad \text{tzn.} \quad y \in J$$

zatem $f(J) \subset J$

2° Dla $x = \xi$ $f^n(x) = \xi$

Wykażemy, że

$$f^n(\xi) = \xi$$

dla $n = 1,2,3,\ldots$

Dowód przeprowadzimy metodą indukcji

dla $n = 1$ z (Z2) wynika

$$f(\xi) = \xi$$

Załóżmy teraz, że dla pewnego k zachodzi

$$f^k(\xi) = \xi$$

Sprawdzimy, że równość ta zachodzi dla $k+1$

$$f^{k+1}(\xi) = f(f^k(\xi)) = f(\xi) = \xi$$

Zatem $f^n(\xi) = \xi$ dla każdego naturalnego n.

Przypuśćmy teraz, że $x_o > \xi$ (dla $x_o < \xi$ dowód jest analogiczny).

Wykażemy, że:

$$\xi < f^n(x_o) < x_o \quad \text{oraz} \quad f^n(x_o) < f^{n-1}(x_o)$$

dla $n = 1,2,3$

Dowód przeprowadzimy metodą indukcji

dla $n = 1$ z założeń wynika, że

$$\xi < f(x_o) < x_o \quad \text{i} \quad f(x_o) < x_o$$

Załóżmy teraz, że dla pewnego k zachodzi

$$\xi < f^k(x_0) < x_0 \quad \text{i} \quad f^k(x_0) < f^{k-1}(x_0) \tag{9a}$$

Sprawdzimy, że nierówności te zachodzą dla $k+1$
Z (Z2) i (9a) wynikają nierówności

$$\xi < f\left[f^k(x_0)\right] = f^{k+1}(x_0) \quad ,$$

i

$$f^{k+1}(x_0) = f\left[f^k(x_0)\right] < x_0$$

oraz

$$f^{k+1}(x_0) = f\left[f^k(x_0)\right] < f^k(x_0)$$

Wynika stąd, że nierówności $\xi < f^n(x_0) < x_0$ i $f^n(x_0) < f^{n-1}(x_0)$ zachodzą dla każdego naturalnego n.
Zatem ciąg $f^n(x_0)$ jest silnie malejący i ograniczony, a więc zbieżny.
Niech $g = \lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0)$
Z ciągłości funkcji f mamy:

$$f(g) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = g$$

Ponieważ $f(x) \neq x$ dla $x \in (\xi, x_0) \subset J$, zatem

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \xi$$

cbdo.

T w i e r d z e n i e 10
Jeśli funkcje f i h spełniają założenia (Z1)-(Z4) to równanie

$$\varphi(x) = h(x, \varphi\left[f(x)\right]) \tag{10}$$

ma w przedziale J największe rozwiązanie $\overline{\varphi}_1$ półciągłe z dołu.

D o w ó d
Niech $T\varphi_1 = \psi_1$,
gdzie

$$\psi_1(x) = h(x, \varphi_1\left[f(x)\right])$$

odwzorowanie T jest rosnące ponieważ dla $\varphi'_1 \leqslant \varphi''_1$ mamy $\varphi'_1(x) \leqslant \varphi''_1(x)$ dla każdego $x \in J$.

Z twierdzenia 9 wynika, że $f(x) \in J$ jeśli $x \in J$. Ponieważ funkcja h jest rosnąca względem drugiej zmiennej to

$$\varphi'_1\left[f(x)\right] \leqslant \varphi''_1\left[f(x)\right] \quad \text{dla} \quad x \in J$$

stąd wynika następująca nierówność:

$$\phi_1(x) = h(x,\varphi'_1\left[f(x)\right]) \leqslant h(x,\varphi''_1\left[f(x)\right]) = \phi_2(x)$$

co oznacza, że

$$T\varphi'_1 \leqslant T\varphi''_1$$

Z twierdzeń 5, 6 i Z3 wynika, że $T : X_1 \to X_1$.

Funkcja φ^*_1 występująca w założeniu Z4 spełnia nierówność

$$\varphi^*_1 \leqslant T\varphi^*_1$$

Zatem zbiór

$$V_1 = \left\{\varphi_1 \in X_1 : \varphi_1 \leqslant T\varphi_1\right\}$$

jest niepusty.

Funkcja $\bar{\varphi}_1 = \sup V_1$ jest półciąga z dołu (tw. 3) i skończona. Ponadto $\bar{\varphi}_1$ spełnia równanie (10) (tw. 1)

cbda

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla funkcji półciągłych z góry.

T w i e r d z e n i e 11

Jeśli funkcje f i h spełniają założenia (Z1), (Z2), (Z3), (Z5) to równanie (10) ma w przedziale J najmniejsze rozwiązanie $\underline{\varphi}_2$ półciągłe z góry.

Dowód analogiczny do dowodu twierdzenia 10 pomijamy.

3. Wykazanie istnienia i jednoznaczności rozwiązania ciągłego

T w i e r d z e n i e 12

Jeśli funkcje f i h spełniają założenia (Z1), (Z2), (Z3), (Z4), (Z5), (Z6) oraz jeśli funkcja h spełnia warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną

$$\left|h(x,y_1) - h(x,y_2)\right| \leqslant \left|y_1-y_2\right|$$

oraz niech $(\xi,\eta) \in \bar{\Omega}$

Jeśli w $\bar{\Omega}$ równanie

$$\eta = h(\xi, \eta) \tag{11}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, to równanie funkcyjne (10) $\varphi_1^* \leq \varphi_1 \leq \varphi_2^*$ i $\varphi_1^* \leq \underline{\varphi}_2 \leq \varphi_2^*$

$$\varphi(x) = h(x, \varphi[f(x)]) \tag{10}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie ciągłe dla $x \in J$ takie, że $\varphi(\xi) = \eta$

D o w ó d

Z twierdzeń (10), (11) i założeń wynika, że równanie (10) ma największe rozwiązanie półciągłe z dołu $\bar{\varphi}_1$ i najmniejsze półciągłe z góry $\underline{\varphi}_2$ dla $x \in J$; $\varphi_1^* \leqslant \bar{\varphi}_1 \leqslant \varphi_2^*$, $\varphi_1 \leqslant \underline{\varphi}_2 \leqslant \varphi_2^*$.

Dla $x = \xi$

$$\bar{\varphi}_1(\xi) = h(\xi, \bar{\varphi}_1[f(\xi)]) = h(\xi, \bar{\varphi}_1(\xi))$$

$$\underline{\varphi}_2(\xi) = h(\xi, \varphi_2[f(\xi)]) = h(\xi, \underline{\varphi}_2(\xi))$$

Ponieważ równanie (11) ma w $\bar{\Omega}$ dokładnie 1 rozwiązanie, zatem

$$\bar{\varphi}_1(\xi) = \underline{\varphi}_2(\xi) = \eta$$

Wykażemy teraz, że funkcje $\bar{\varphi}_1(x)$, $\underline{\varphi}_2(x)$ są ciągłe dla $x = \xi$. W tym celu pokażemy, że:

$$\limsup_{x \to \xi} \bar{\varphi}_1(x) \leqslant \bar{\varphi}_1(\xi) = \eta \tag{12}$$

$$\liminf_{x \to \xi} \underline{\varphi}_2(x) \geqslant \varphi_2(\xi) = \eta \tag{13}$$

Najpierw pokażemy słuszność nierówności (12).

Niech

$$\limsup_{x \to \xi} \bar{\varphi}_1(x) = a_o$$

Jest oczywiste, że

$$a_o \in \langle \varphi_1^*[f(\xi)], \varphi_2^*[f(\xi)] \rangle$$

Istnieje więc ciąg $\{x_n\}$, $x_n \in \bar{I}_\Omega$ taki, e

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi \quad \text{i} \quad \lim_{n \to \infty} \varphi_1(x_n) = a_o$$

Z ciągu $\left\{\varphi_1\left[f(x_n)\right]\right\}$ można wybrać zbieżny podciąg $\left\{\varphi_1\left[f(x_{n_k})\right]\right\}$.

Ponieważ $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \xi$, to $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_1\left[f(x_{n_k})\right] = b \leqslant a_0$,

gdzie $b \in \langle\varphi_1^*\left[f(\xi)\right], \varphi_2^*\left[f(\xi)\right]\rangle$

Zbudujmy ciąg $\left\{a_n\right\}$

$$a_{n+1} = h(\xi, a_n)\ldots \quad n = 0,1,\ldots \tag{14}$$

Ponieważ $a_0 = h(\xi, b) \leqslant h(\xi, a_0) = a_1$ to ciąg a_n jest rosnący i ograniczony z góry, ponieważ

$$a_n \in \langle\varphi_1^*(\xi), \varphi_2^*(\xi)\rangle \quad \text{dla} \quad n = 0,1,\ldots$$

Zatem ciąg $\left\{a_n\right\}$ jest zbieżny.
Oznaczmy jego granicę przez g.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

$$g \in \langle\varphi_1^*(\xi), \varphi_2^*(\xi)\rangle \tag{15}$$

Granica g spełnia równanie (11) zatem $g = \eta$
Z monotoniczności ciągu $\left\{a_n\right\}$ mamy

$$\limsup_{x\to\xi} \bar{\varphi}_1(x) = a_0 \leqslant g = \eta \tag{16}$$

Rozwiązanie $\bar{\varphi}_1(x)$ jest więc półciągłe z góry w punkcie $x = \xi$. Jest więc ciągłe w punkcie $x = \xi$ jako półciągłe równocześnie z dołu i z góry. Analogicznie dowodzi się ciągłości $\underline{\varphi}_2(x)$ w punkcie $x = \xi$. W dalszym ciągu z warunku Lipschitza i twierdzenia 9 mamy

$$\left|\bar{\varphi}_1(x) - \underline{\varphi}_2(x)\right| = \left|h(x, \bar{\varphi}_1\left[f(x)\right]) - h(x, \underline{\varphi}_2\left[f(x)\right])\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\bar{\varphi}_1\left[f(x)\right] - \varphi_2\left[f(x)\right]\right|$$

Przez indukcję otrzymujemy następującą nierówność

$$\left|\bar{\varphi}_1(x) - \underline{\varphi}_2(x)\right| \leqslant \left|\bar{\varphi}_1\left[f^n(x)\right] - \underline{\varphi}_2\left[f^n(x)\right]\right| \to 0$$

Zatem $\overline{\varphi}_1(x) = \underline{\varphi}_2(x) = \overline{\varphi}(x)$ dla $x \in J$

$$\overline{\varphi}(x) = h(x, \overline{\varphi}[f(x)]) \tag{17}$$

$\overline{\varphi}(x)$ jest funkcją półciągłą z dołu i z góry równocześnie, jest więc funkcją ciągłą dla $x \in J$, spełnia przy tym równanie (17).

cbdo

4. Podsumowanie

W twierdzeniach 5, 6 wykazano podstawowe własności funkcji $\varphi_1[f(x)]$ oraz $h[x, \varphi_1(x)]$ jeśli funkcja $\varphi_1(y)$ jest półciągła z dołu. W twierdzeniach 7, 8 wykazano podstawowe własności funkcji $\varphi_1[f(x)]$ oraz $h[x, \varphi_1(x)]$ jeśli funkcja $\varphi_1(y)$ jest półciągła z góry. W twierdzeniu 10 wykazano istnienie największego rozwiązania półciągłego z dołu, a w twierdzeniu 11 wykazano istnienie najmniejszego rozwiązania półciągłego z góry. W twierdzeniu 12 wykazano istnienie i jednoznaczność rozwiązania ciągłego.

LITERATURA

[1] Baron K.: On the continuous solutions of a nonlinear functional equation of the first order. Annales Polonici Mathematici XXVIII (1973).

[2] Pelczar A.: On invariant points of monotonic transformations in partially ordered spaces. Annales Polonici Mathematici XVIII (1965).

[3] Łojasiewicz S.: Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych, PWN, Warszawa 1973.

[4] Kuczma M.: Functional equations in a single variable. Monografie matematyczne 46, Warszawa 1968.

НЕПРЕРЫВНЫЕ И ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЕ РЕЛИЕНИЯ НЕКОТОРОГО УРОВНЕНИЯ ФУНКЦИИ

Р е з ю м е

В настоящей работе рассматривается уравнение функции:

$$\Phi(x) = h(x, \Phi[f(x)],$$

где h и f являются заданными функциями, а Φ функцией искаемой. На основании формулы А. Пельчара (2) о постоянной точке, доказывается наличие самого длинного решения снизу, а также самого малого решени сверху.

Затем доказывается наличие и однозначность непрерывного решения. Доказательство наличия непрерывного решения проводится иным путём, чем это было сделано в работе К. Барона (1).

OF A CONTINUONS AND SEMI-CONTINUONS SOLUTIONS OF A FUNCTIONAL EQUATIONS

S u m m a r y

The paper considers the following functional equation:

$$\varphi(x) = h(x,\varphi\left[f(x)\right]$$

where h and f are the functions that are given, and φ is the function that is searched for. Basing on A. Pelczar's theorem of the con-semi fixed point (2), the greatest semi-continuous solution from below is proved and the least solution from above (semi-continuous). Then, the existence and explicitness of the continous solution is proved.

The proof of existence of the continuous solution is demonstrated in the slightly altered way than in K. Baron's research (1).