ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI SLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 31 Nr kol. 608

Grażyna KOZŁOWSKA

APROKSYMACJA FUNKCJAMI CAŁKOWITYMI DWÓCH ZMIENNYCH W PRZESTRZENIACH $L_P(D)$, GDZIE $P = (p_1, p_2)$ I $0 < p_1 < 1$, $0 < p_2 \leqslant 1$

Część I

Streszczenie. W pracy pokazano, że przestrzeń $L_P(D)$ jest przestrzenią Frécheta. Zdefiniowane w niej moduły ω i ω_k zachowują klasyczne własności. Udowodniono w tej przestrzeni odpowiednik nierówności Bernsteina-Zygmunda.

Oznaczenia

$D = [a,b;c,d]$ prostokąt; może być niewłaściwy.

$P = (p_1, p_2)$, gdzie $0 < p_1 < 1$, $0 < p_2 \leqslant 1$.

$L_P(D)$ przestrzeń funkcji $f(x,y)$ określonych i mierzalnych w D, dla których $\int_c^d \left[\int_a^b |f(x,y)|^{p_1} dx\right]^{p_2} dy < \infty$

$$\|f\|_P = \int_c^d \left[\int_a^b |f(x,y)|^{p_1} dx\right]^{p_2} dy \quad \text{F - norma w } L_P(D).$$

Dla dodatnich u i v przyjmuje się

$$\omega(f;u,v)_P = \sup_{|h| \leqslant u,\ |k| \leqslant v} \|f(x+h,y+k) - f(x,y)\|_P$$

$$\omega_k(f;u,0)_P = \sup_{|h| \leqslant u} \left\| \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+ih,y) \right\|_P$$

$$\omega_k(f;0,v)_P = \sup_{|h| \leqslant v} \left\| \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x,y+ih) \right\|_P$$

$$G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{l=0}^{\infty} b_l y^l = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_k b_l x^k y^l$$

gdzie $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k!\,|a_k|} = \sigma_1 < \infty$

$\overline{\lim\limits_{l\to\infty}} \sqrt[l]{l!\,|b_l|} = \sigma_2 < \infty$

jest funkcją całkowitą typu σ_1 ze względu na zmienną x i σ_2 ze względu na y.

$$T_{m,n}(x,y) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} (a_k\cos kx + b_k\sin kx)(c_l\cos ly + d_l\sin ly).$$

$L_p(-\pi,\pi;-\pi,\pi)$ przestrzeń funkcji mierzalnych, okresowych o okresie 2π ze względu na każdą zmienną, określonych w kwadracie $[-\pi,\pi;-\pi,\pi]$ dla których

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}|f(x,y)|^{p_1}\,dx\right]^{p_2} dy < \infty$$

1. Przestrzenie $L_p[a,b;c,d]$, gdzie $P = (p_1,p_2)$ i $0<p_1<1$, $0<p_2\leq 1$

Niech $L_p[a,b;c,d] = L_p(D)$ będzie przestrzenią funkcji $f(x,y)$ określonych i mierzalnych w prostokącie $D = [a,b;c,d]$, dla których

$$\|f\|_p = \int_c^d\left[\int_a^b |f(x,y)|^{p_1}\,dx\right]^{p_2} dy \leq \infty\ ,\ \text{przy}\ \ 0<p_1<1,\ 0<p_2<1.$$

Jest to przestrzeń liniowa, gdyż dla $f\in L_p(D)$ i $g\in L_p(D)$ $f+g$ jest funkcją określoną i mierzalną w D i z nierówności 10.4 [2] str. 35

$$\int_c^d\left[\int_a^b |f+g|^{p_1}\,dx\right]^{p_2} dy \leq \int_c^d\left[\int_a^b |f|^{p_1}\,dx\right]^{p_2} dy + \int_c^d\left[\int_y^b |g|^{p_1}\,dx\right]^{p_2} dy < \infty$$

Funkcje f i g będzie uważało się za równe, $f = g$, jeśli ich wartości są równe prawie wszędzie w prostokącie D.

$\|f\|_p$ nie jest normą w $L_p(D)$, gdyż nie spełnia warunku jednorodności, jest natomiast $\|af\|_p = |a|^{p_1p_2}\|f\|_p$.

$\|f\|_p$ jest F - normą w przestrzeni $L_p(D)$, gdyż spełnia warunki:

1. $\|f\|_p = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x,y) = 0$ prawie wszędzie.

D o w ó d

Niech

$$g(y) = \left[\int_a^b |f(x,y)|^{p_1}\, dx\right]^{p_2}$$

Ponieważ $g(y) \geqslant 0$, więc równość $\|f\|_p = \int_c^d g(y)dy = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $g(y) = 0$ prawie wszędzie ([1] str. 213).

Podobnie $\int_a^b |f(x,y)|^{p_1}\, dx = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x,y) = 0$ dla prawie wszystkich x.

Można wykazać, że jeśli

$$\exists_{\substack{B \\ |B|=0}} \ \forall_{y \in B} \ \exists_{\substack{A \\ |A_y|=0}} \ \forall_{x \in A'_y} \ f(x,y) = 0, \text{ to } f(x,y) = 0 \text{ prawie wszędzie w } D.$$

Wystarczy wykazać, że $\iint_D |f(x,y)|\, dx\, dy = 0$.

Ponieważ

$$\int_a^b \left[\int_c^d |f(x,y)|\, dy\right] dx = \int_a^b \left[\int_B |f|\, dy + \int_{B'} |f|\, dy\right] dy =$$

$$= \int_{A_y} \left[\int_{B'} |f|\, dy\right] dx + \int_{A'_y} \left[\int_{B'} |f|\, dy\right] dy = \int_{A'_y} \left[\int_{B'} |f|\, dy\right] dx = 0,$$

więc $f(x,y) = 0$ prawie wszędzie w D.

Zatem $\|f(x,y)\|_p = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x,y) = 0$ prawie wszędzie.

2. $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Dowód wynika z nierówności 10.4 [2] str. 35.

3. $\|af\|_p = \|f\|_p$, gdy $a \in R$ i $|a| = 1$.

4. Jeśli $a_k \to a$ i $\|f_k - f\|_p \to 0$, gdzie $a_k, a \in R$ i $f_k, f \in L_p(D)$, to $\|a_k f_k - af\|_p \leqslant |a_k - a|^{p_1 p_2} \|f_k\|_p + |a|^{p_1 p_2} \|f_k - f\|_p \to 0$.

Ponieważ przestrzeń $L_p(D)$ jest liniowa i $\|f\|_p$ jest F - normą w tej przestrzeni, zatem para $< L_p(D), \|f\|_p >$ jest F^* przestrzenią.

Oczywiście $d_p(f,g) = \|f - g\|_p$ jest metryką w $L_p(D)$, czyli $\langle L_p(D), d_p\rangle$ jest przestrzenią metryczną.

Tak określona przestrzeń $\langle L_p(D), d_p\rangle$ jest przestrzenią zupełną.

D o w ó d

Zgodnie z twierdzeniem 1.2 str. 104 [1] wystarczy wykazać, że jeśli $f_n \in L_p(D)$ i $\|f_n\|_p < 2^{-n}$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny w $L_p(D)$.

Niech

$$S_n(x,y) = f_1 + \ldots + f_n,$$

$$U_n(x,y) = |f_1| + \ldots + |f|_n .$$

Wtedy

$$\|U_n(x,y)\|_p = \||f_1| + \ldots + |f_n|\|_p \leq \|f_1\|_p + \ldots + \|f_n\|_p < \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1.$$

Ponieważ

$$\int_c^d \left[\int_a^b |U_n(x,y)|^{p_1} dx\right]^{p_2} dy < 1,$$

więc

$$\varphi_n(y) = \left[\int_a^b |U_n(x,y)|^{p_1} dx\right]^{p_2}$$

jest niemalejącym ciągiem nieujemnych funkcji całkowalnych prawie wszędzie w $[c,d]$ i $\int_c^d \varphi_n(y)dy < 1$, więc z twierdzenia 1.2.3 [3] str. 17 prawie wszędzie w $[c,d]$ istnieje $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y)$, a zatem również skończona dla prawie wszystkich y granica $\lim_{h\to\infty} \int_a^b |U_n(x,y)|^{p_i} dx$.

Ponieważ $|U_n(x,y)|^{p_1}$ jest ciągiem niemalejącym funkcji mierzalnych, nieujemnych, to z twierdzenia Beppo-Leviego dla ciągów [5] str. 38

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |U_n(x,y)|^{p_1} dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} |U_n(x,y)|^{p_1} dx, \qquad (*)$$

a więc również $\lim_{n\to\infty} |U_n(x,y)|^{p_1}$ istnieje i jest skończona prawie wszę-

Zatem istnieje również $\lim_{n\to\infty} U_n(x,y)$ prawie wszędzie w D.

Zbieżny jest zatem prawie wszędzie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$, a więc i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Niech $f(x,y)$ oznacza jego sumę. Dla $n \leqslant m$ jest

$$\|S_n - S_m\|_P = \|f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_m\|_P < \frac{1}{2^n}.$$

Jest również z nierówności 8.2 [2] str. 31 i (*)

$$|S_n - S_m|^{p_1} \leqslant |U_n|^{p_1} + |U_m|^{p_1} \leqslant 2 \lim_{m\to\infty} |U_m|^{p_1} = 2\left[U(x,y)\right]^{p_1}.$$

Ponieważ $S_m \to f$ prawie wszędzie, więc ciąg $|S_n - S_m|^{p_1}$ rozpatrywany ze względu na m jest ciągiem funkcji całkowalnych ze względu na x dla prawie wszystkich y zbieżnym do $|S_n - f|^{p_1}$ prawie wszędzie i prawie wszędzie $|S_n - S_m|^{p_1} \leqslant 2\left[U(x,y)\right]$, gdzie $2\left[U(x,y)\right]^{p_1}$ jest z (*) funkcją całkowalną.

Z 8.9 [1] str. 41 dla prawie wszystkich $y \in [c,d]$

$$\int_a^b |S_n - f|^{p_1}\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_a^b |S_n - S_m|^{p_1}\, dx.$$

Zatem

$$\lim_{m\to\infty} \left[\int_a^b |S_n - S_m|^{p_1}\, dx\right]^{p_2} = \left[\int_a^b |S_n - f|^{p_1}\, dx\right]^{p_2}.$$

$\varphi_m(y) = \left[\int_a^b |S_n - S_m|^{p_1}\, dx\right]^{p_2}$ jest ciągiem nieujemnych funkcji mierzalnych zbieżnym prawie wszędzie do $\left[\int_a^b |S_n - f|^{p_1}\, dx\right]^{p_2}$, a zatem z lematu Fatou [1] str. 41

$$\int_c^d \left[\int_a^b |S_n - f|^{p_1}\, dx\right]^{p_2} dy \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \int_c^d \left[\int_a^b |S_n - S_m|^{p_1}\, dx\right]^{p_2} dy < \frac{1}{2^n}.$$

Zatem

$$S_n - f \in L_p(D).$$

Stąd też

$$f = S_n - (S_n - f) \in L_p(D),$$

oraz $\|S_n - f\|_p \to 0$ przy $n \to \infty$, co kończy dowód.

Ponieważ przestrzeń $\langle L_p(D), d_p \rangle$ jest przestrzenią zupełną, więc przestrzeń $\langle L_p(D), \| \ \|_p \rangle$ jest przestrzenią Frècheta (F - przestrzenią) [5] str. 52.

2. Własności modułów ω i ω_k

Można udowodnić prawdziwość następujących własności:

1. $\omega(f;u,v)_p$ jest funkcją niemalejącą ze względu na u i v.
2. $\omega(f;u_1+u_2, v_1+v_2)_p \leqslant \omega(f;u_1,v_1)_p + \omega(f;u_2,v_2)_p$.

Stąd przy naturalnym n

3. $\omega(f;nu,nv)_p \leqslant n\,\omega(f;u,v)_p$,

a przy λ rzeczywistych

4. $\omega(f;\lambda u,\lambda v)_p \leqslant (\lambda+1)\,\omega(f;u,v)_p$,

oraz dla α, β rzeczywistych

5. $\omega(f;\alpha u,\beta v)_p \leqslant \left[\max(\alpha,\beta)+1\right]\omega(f;u,v)_p$.

Jeśli $D = (-\infty,\infty;-\infty,\infty)$, to prawdziwe są własności 6,7,8.

6. $\|f(x+at,y)\|_p = \|f(x,y)\|_p$ a = const. t - parametr

Dla dowodu wystarczy przyjąć $x + at = z$

7. $\omega_k(f;\lambda u,0)_p \leqslant (1+\lambda)^k\ \omega_k(f;u,0)_p$.

D o w ó d

Jeśli n jest liczbą naturalną, to w oparciu o związek (5), str. 116 [6] i z własności 6

$$\omega_k(f;nu,0)_p = \sup_{|nt|\leqslant nu} \Big\|\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(x+int,y)\Big\|_p =$$

$$= \sup_{|t|\leqslant u} \Big\| \sum_{i_1=0}^{n-1} \dots \sum_{i_k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(x+i_1t+\dots+i_kt+it,y)\Big\|_p.$$

Stąd w oparciu o nierówność 10.4 str. 35 [2]

$$\omega_k(f;nu,0)_p \leqslant \sum_{i_1=0}^{n-1} \dots \sum_{i_k=0}^{n-1} \sup_{|t|\leqslant u} \left\| \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(x+(i_1+\dots+i_k)t+it,y) \right\|_p =$$

$$= n^k \omega_k(f;u,0)_p.$$

Niech $n \leqslant \lambda < n+1$, wtedy

$$\omega_k(f;\lambda u,0)_p \leqslant \omega_k(f;(n+1)u,0)_p \leqslant (n+1)^k \omega_k(f;u,0)_p \leqslant$$

$$\leqslant (\lambda+1)^k \omega_k(f;u,0)_p.$$

8. $\omega_k(f;0,\lambda v)_p \leqslant (\lambda+1)^k \omega_k(f;0,v)_p.$

Analogicznie można wykazać, że własności 6, 7, 8 prawdziwe są również dla funkcji $f \in L_p[-\pi,\pi;-\pi,\pi]$.

3. Nierówność S.N. Bernsteina, A. Zygmunda w przestrzeniach $L_p(-\infty,\infty;-\infty,\infty)$

Jeśli $G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) \subset L_p(-\infty,\infty;-\infty;\infty)$ jest funkcją ograniczoną na całej płaszczyźnie, to dla $0<p_1<1$, $0<p_2\leqslant 1$ i $k,l = 1,2,\dots$

$$\left\| \frac{\partial^{k+l} G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)}{\partial x^k \partial y^l} \right\|_p \leqslant C(p_1,p_2,\sigma_1^k \sigma_2^l)^{p_1 p_2} \| G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)\|_p.$$

D o w ó d

Ze związku (11) str. 220 [6] dla całkowitych $r \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G'_{\sigma_1}(x)|^{p_1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| C_r \sigma_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_1}(x+t) h_{r,\sigma_1}(t) \left(\frac{\sin\sigma_1 t}{\sigma_1 t}\right)^{2r+2} dt \right|^{p_1} dx, \quad (1)$$

gdzie $|h_{r,\sigma_1}(t)| \leqslant 1$.

Funkcja $G_{\sigma_1}(x+t)\left(\frac{\sin\sigma_1 t}{\sigma_1 t}\right)^{2r+2}$ jest ze względu na zmienną t funkcją całkowitą stopnia $\leqslant (2r+3)\sigma_1$.

Korzystając z nierówności (29) str. 248 [6] otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty}|G_\sigma(x)|^{q'}\,dx \leqslant \left(\frac{q_0\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{q'-q}{q}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|G_\sigma(x)|^{q}\,dx\right\}^{q'/q},$$

gdzie q - dowolna liczba dodatnia i $q' \geqslant q$; q_0 najmniejsza liczba parzysta większa lub równa q.

Przyjmując $q' = 1$ i $q = p_1$ otrzymujemy stąd i z (1)

$$\int_{-\infty}^{\infty}|G'_{\sigma_1}(x)|^{p_1}\,dx \leqslant \left(C_r\sigma_1^2\right)^{p_1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|G_{\sigma_1}(x+t)|\left|\frac{\sin\sigma_1 t}{\sigma_1 t}\right|^{2r+2}dt\right]^{p_1}dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(C_r\sigma_1^2\right)^{p_1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{2(2r+3)\sigma_1}{2\pi}\right)^{\frac{1-p_1}{p_1}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|G_{\sigma_1}(x+t)|^{p_1}\left|\frac{\sin\sigma_1 t}{\sigma_1 t}\right|^{(2r+2)p_1}dt\right\}^{1/p_1}\right]^{p_1}dx =$$

$$= C_r^{p_1}\left(\frac{2r+3}{\pi}\right)^{1-p_1}\sigma_1^{p_1}\int_{-\infty}^{\infty}|G_{\sigma_1}(x)|^{p_1}\,dx\;\sigma_1\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\sigma_1 t}{\sigma_1 t}\right|^{(2r+2)p_1}dt.$$

Jeśli przyjąć r tak, by $(r+1)p_1$ była całkowitą i $(r+1)\,p_1 \geqslant 2$, to z (12) str. 225 [6]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\sigma_1 t}{\sigma_1 t}\right|^{(2r+2)p_1}dt = \frac{C_{p_1}}{\sigma_1},$$

a zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty}|G'_{\sigma_1}(x)|^{p_1}\,dx \leqslant C(p_1)\sigma_1^{p_1}\int_{-\infty}^{\infty}|G_{\sigma_1}(x)|^{p_1}\,dx. \tag{2}$$

Analogicznie jeśli r_2 jest tak dobrane, by $(r_2+1)p_2$ była całkowitą i $(r_2+1)p_2 \geqslant 2$, to

$$\int_{-\infty}^{\infty}|G'_{\sigma_2}(y)|^{p_2}\,dy \leqslant C(p_2)\,\sigma_2^{p_2}\int_{-\infty}^{\infty}|G_{\sigma_2}(y)|^{p_2}\,dy. \tag{3}$$

z (2) i (3) wynika

$$\left\| \frac{\partial^2 G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)}{\partial x\,\partial y} \right\|_p = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^2 G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)}{\partial x\,\partial y} \right|^{p_1} dx \right]^{p_2} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| G'_{\sigma_2}(y) \right|^{p_1 p_2} dy \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| G'_{\sigma_1}(x) \right|^{p_1} dx \right]^{p_2} \leqslant$$

$$\leqslant C_1(p_1,p_2)\,\sigma_2^{p_1 p_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| G_{\sigma_2}(y) \right|^{p_1 p_2} dy \left[C_2(p_1)\,\sigma_1^{p_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left| G_{\sigma_1}(x) \right|^{p_1} dx \right]^{p_2} =$$

$$= C(p_1,p_2)(\sigma_1\sigma_2)^{p_1 p_2} \left\| G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) \right\|_p . \tag{4}$$

Analogicznie

$$\left\| \frac{\partial G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)}{\partial x} \right\|_p \leqslant C(p_1,p_2)\,\sigma_1^{p_1 p_2} \left\| G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) \right\|_p \tag{5}$$

i

$$\left\| \frac{\partial G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)}{\partial y} \right\|_p \leqslant C(p_1,p_2)\,\sigma_2^{p_1 p_2} \left\| G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) \right\|_p . \tag{6}$$

Z (4), (5) i (6) wynika nierówność

$$\left\| \frac{\partial^{k+l} G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y)}{\partial x^k\,\partial y^l} \right\|_p \leqslant C(p_1,p_2)(\sigma_1^k\,\sigma_2^l)^{p_1 p_2} \left\| G_{\sigma_1,\sigma_2}(x,y) \right\|_p .$$

<u>Wniosek</u>

Jeśli $T_{m,n}(x,y) \in L_p(-\pi,\pi;-\pi,\pi)$ jest wielomianem trygonometrycznym stopnia m ze względu na x i n ze względu na y, to dla

$$0 < p_1 < 1, \quad 0 < p_2 \leqslant 1 \quad \text{i} \quad k,l = 1,2,\ldots$$

$$\left\| \frac{\partial^{k+l} T_{m,n}(x,y)}{\partial x^k\,\partial y^l} \right\|_p \leqslant C(p_1,p_2)\,m^k n^l \left\| T_{m,n}(x,y) \right\|_p .$$

Panu Profesorowi Julianowi Musielakowi dziękuję za życzliwe uwagi dotyczące tej pracy.

LITERATURA

[1] Alexiewicz A.: Analiza funkcjonalna. Warszawa 1969.
[2] Bari N.K.: Trigonometriczeskije rjady. Moskwa 1961.
[3] Kaczmarz S., Steinhaus G.: Teorija ortogonalnych rjadow. Moskwa 1958.
[4] Kozłowska G.: Praca doktorska. UAM, Poznań 1974.
[5] Musielak J.: Wstęp do analizy funkcjonalnej. Warszawa 1976.
[6] Timan A.F.: Teorija pribliżenija funkcjij diejstwietielnogo pieriemiennogo. Moskwa 1960.

АППРОКСИМАЦИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНОТВАХ $L_P(D)$ ГДЕ $P = (p_1, p_2)$ И $0 < p_1 < 1$, $0 < p_2 < 1$

Р е з ю м е

В работе показано, что $L_P(D)$ является пространством фрешета. Определены в нём модули ω и ω_k обладают классическими свойствами. В этом пространстве доказан аналог неравенства Бернштейна - Зигмунда.

APPPROXIMATION BY ENTIERE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES IN THE $L_P(D)$ SPACES IF $P = (p_1, p_2)$ AND $0 < p_1 < 1$, $0 < p_2 \leq 1$

S u m m a r y

In this paper it is proved that $L_P(D)$ is Fréchet's space. Moduli ω and ω_k defined in this space posses the classical properties. Also, there is proved in $L_P(D)$ an analogy of the Bernstein-Zygmund inequality.