ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 31 Nr kol. 608

Andrzej WAWRZYNEK

WARIACYJNE UJĘCIE NIELINIOWEGO PROBLEMU ZGINANIA PŁYT Z UWZGLĘDNIENIEM WPŁYWU TEMPERATURY

(Komunikat)

Streszczenie. Określono funkcjonał Reissnera dla płyty poddanej odkształceniom skończonym, z uwzględnieniem wpływu temperatury. Z warunków koniecznych na jego minimum uzyskano równania Kármána wraz z kompletem warunków brzegowych.

1. Wstęp

W niniejszej pracy określono funkcjonał Reissnera dla płyty cienkiej, geometrycznie nieliniowej, izotropowej, jednorodnej z uwzględnieniem wpływu temperatury. W tym przypadku funkcjonał Reissnera redukuje się do całkowitej energii potencjalnej płyty. Założono, że:

1° ze względu na niewielką grubość h płyty w porównaniu z wymiarami poprzecznymi, rozkład temperatury wzdłuż grubości jest liniowy; wobec tego temperaturę określimy w sposób następujący

$$\tau(x,y,z) = \tau_{śr}(x,y) + z\,\tau_1(x,y);$$

2° wszystkie wielkości określone będą w prostokątnym układzie współrzędnych, oznaczonych, jak i litery wskaźnikowe małymi literami por. [1].

2. Funkcjonał Reissnera dla płyty z uwzględnieniem temperatury

Funkcjonał Reissnera uogólniony na zagadnienia nieliniowe geometrycznie ma postać, zgodnie z [3], następującą

$$J_R = \int_V \left[e_{ij}e_{ij} - f_c(e_{ij},\tau) - X_i u_i\right]dx - \int_{\partial\hat{V}} \hat{X}_i \hat{u}_i dx - \int_{\partial\hat{V}} \hat{s}_{ij} n_j (u_i - \hat{u}_i)dx, \tag{2.1}$$

gdzie

$$2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}$$

$$f_c(s_{ij},\tau) = s_{ij}e_{ij} - f(e_{ij},\tau). \tag{2.2}$$

W przypadku określonym na wstępie wzór (2.1) przyjmie postać

$$J_R = \int_{-h/2}^{h/2} dz \iint_\Gamma \Big[\mu(e_{xx}e_{xx} + e_{yy}e_{yy} + 2e_{xy}e_{xy}) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}(e_{xx} + e_{yy})^2 - 3K\alpha_T\tau(e_{xx} + e_{yy})\Big]dxdy -$$

$$- \iint_\Gamma (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w)dxdy + \int_{\partial\Gamma}\Big[m(s)\frac{\partial w}{\partial n} - p(s)w -$$

$$- X(s)u - Y(s)c\Big]ds, \tag{2.3}$$

gdzie

$m(s)$ - moment zginający określony na brzegu płyty;

$p(s)$ - siła Kirchhoffa,

$X(s)$, $Y(s)$ - siły brzegowe działające w płaszczyźnie płyty w kierunku osi x i y; $\bar{X} = \int_{-h/2}^{h/2} X\,dz$; $\bar{Y} = \int_{-h/2}^{h/2} Y\,dz$; $\bar{Z} = q = \int_{-h/2}^{h/2} Z\,dz$.

Wprowadzając (2.2) do (2.3), uwzględniając założenia Funga [2] i całkując otrzymujemy

$$J_R = \iint_\Gamma \Bigg\{\frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{1}{2}\Big[u_x^2 + u_xw_x^2 + \frac{1}{4}w_x^4 + v_y^2 + v_yw_y^2 +$$

$$+ \frac{1}{4}w_x^4 + 2\nu(u_xv_y + \frac{1}{2}u_xw_y^2 + \frac{1}{2}w_yw_x^2 + \frac{1}{4}w_x^2w_y^2) +$$

$$+ 2(1-\nu)(u_y^2 + v_x^2 + w_x^2w_y^2 + 2u_yv_x + 2u_yw_xw_y +$$

$$+ 2v_xw_xw_y\Big] + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Big[\frac{1}{2}(w_{xx}^2 + 2\nu w_{xx}w_{yy} + w_{yy}^2) +$$

$$+ (1-\nu)w_{xy}^2\Big] - \alpha_2\tau_{śr}(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + v_y + \frac{1}{2}w_y^2) -$$

$$- \alpha_1 \tau_1 (w_{xx} + w_{yy})\Big\} dxdy - \iint_\Gamma (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dxdy +$$

$$+ \int_{\partial\Gamma} \Big[m(s) \frac{\partial w}{\partial n} - p(s)w - X(s)u - Y(s)v \Big] ds. \tag{2.4}$$

Pierwsza wariacja funkcjonału (2.4) ma postać

$$\delta J_R = \delta V - \delta U,$$

gdzie

$$\delta V = \iint_\Gamma \Big\{ \delta u_x (N_1 - \alpha_2 \tau_{śr}) + \delta v_y (N_2 - \alpha_2 \tau_{śr}) + \delta w_x (N_1 w_x +$$

$$+ S w_y - \alpha_2 \tau_{śr} w_x) + \delta w_y (N_2 w_y + S w_x - \alpha_2 \tau_{śr} w_y) +$$

$$+ \delta u_y S + \delta v_x S + \delta w_{xx} \Big[D(w_{xx} + \vartheta w_{yy}) + \alpha_1 \tau_1 \Big] +$$

$$+ \delta w_{yy} \Big[D(w_{yy} + \vartheta w_{xx}) + \alpha_1 \tau_1 \Big] + \delta w_{xy} \Big[2D(1 - \vartheta) w_{xy} \Big] \Big\} dxdy;$$

$$\delta U = \iint_\Gamma (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v + q\delta w) dydy - \int_{\partial\Gamma} \Big[m(s) \frac{\partial \delta w}{\partial n} - p(s)\partial w +$$

$$+ X(s)\delta u + Y(s)\delta v \Big] dx;$$

$$N_1 = \frac{Eh}{1 - \vartheta^2} (u_x + \vartheta v_y + \frac{1}{2} w_x^2 + \frac{\vartheta}{2} w_y^2);$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1 - \vartheta^2} (v_y + \vartheta u_x + \frac{1}{2} w_y^2 + \frac{\vartheta}{2} w_x^2);$$

$$S = G(u_y + v_x + w_x w_y); \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \vartheta^2)}.$$

Po wykonaniu całkowania przez części otrzymamy ostatecznie

$$\delta J_R = \iint_\Gamma \Big[D\nabla^2\nabla^2 w - q - N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} -$$

$$- \alpha_2 \tau_{śr} \nabla^2 w + \nabla^2 (\alpha_1 \tau_1) + \frac{\partial w}{\partial x} \Big(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial (\alpha_1 \tau_1)}{\partial x} \Big) +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial y} \Big(\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial (\alpha_1 \tau_1)}{\partial y} \Big) \Big] \delta w dxdy + R(x,y) = 0, \tag{2.5}$$

gdzie

$$R(x,y) = \int_{\partial\Gamma} \Bigg\{ D \Bigg\{ (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin\alpha\cos\alpha - \right.$$

$$\left. - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) \right] - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos\alpha -$$

$$- \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \sin\alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \left[(N_1 - \alpha_2 \tau_{śr}) \cos\alpha + S \sin\alpha \right] +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial y} \left[(N_2 - \alpha_2 \tau_{śr}) \sin\alpha + S \cos\alpha \right] \Bigg\} + \frac{\partial(\alpha_1 \tau_1)}{\partial x} \cos\alpha -$$

$$- \frac{\partial(\alpha_1 \tau_1)}{\partial y} \sin\alpha - p(s) \Bigg\} \delta w \, ds + \int_{\partial\Gamma} \Bigg\{ \Bigg\{ D \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2\alpha + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2\alpha + \nu \nabla^2 w \right] \Bigg\} + \alpha_1 \tau_1 +$$

$$+ m(s) \Bigg\} \frac{\partial \delta w}{\partial n} \, ds.$$

Ponieważ wariacje δu, δv, δw i $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$ są dowolne otrzymujemy równania problemu

$$1^o \quad \nabla^2\nabla^2 w = \frac{1}{D}\Big(q + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \alpha_2 \tau_{śr} \nabla^2 w + \nabla^2(\alpha_1 \tau_1) - \bar{X} \frac{\partial w}{\partial x} - \bar{Y} \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad (x,y) \in \Gamma$$

$$2^o \quad \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = \bar{X} + \frac{\partial(\alpha_2 \tau_{śr})}{\partial x}, \qquad (x,y) \in \Gamma \tag{2.6}$$

$$3^o \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \bar{Y} + \frac{\partial(\alpha_2 \tau_{śr})}{\partial y}, \qquad (x,y) \in \Gamma$$

oraz warunki brzegowe dla funkcji u, v, w

$$1^o \quad p(s) - X(s) \frac{\partial w}{\partial x} - Y(s) \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial(\alpha_1 \tau_1)}{\partial x} \cos\alpha - \frac{\partial(\alpha_1 \tau_1)}{\partial y} \sin\alpha +$$

$$1^\circ \quad \left\{ (1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\sin^2\alpha - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \cos^2\alpha\right] - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)\cos\alpha - \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\sin\alpha \right\}, \quad (x,y)\in\partial\hat{\Gamma} \tag{2.7}$$

$$2^\circ \quad m(s) + \alpha_1\tau_1 + D\left[(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\sin\alpha\cos\alpha + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\alpha\right) + \nu\nabla^2 w\right] = 0, \qquad (x,y)\in\partial\hat{\Gamma}$$

$$3^\circ \quad (N_1 - \alpha_2\tau_{sr})\cos\alpha + S\sin\alpha = X(s), \qquad (x,y)\in\partial\hat{\Gamma}$$

$$4^\circ \quad (N_2 - \alpha_2\tau_{sr})\sin\alpha + S\cos\alpha = Y(s), \qquad (x,y)\in\partial\hat{\Gamma}$$

Uzyskane w pracy, przez minimalizację funkcjonału całkowitej energii potencjalnej, rownania (2.5) zostały podane w literaturze przez T.V. Kármána; w konsekwentnym zapisie we współrzędnych Lagrange'a równania te wyprowadził Fung, por. [2]; tutaj dodatkowo uzyskaliśmy komplet warunków brzegowych (2.6) oraz uwzględnienie wpływów termicznych.

LITERATURA

[1] Borkowski Sz.: Mechanika osrodków ciągłych. T. I, Gliwice 1975.

[2] Fung Y.C.: Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN, Warszawa 1969.

[3] Wawrzynek A.: Uogólnienie zasady Reissnera na termosprężystosc geometrycznie nieliniową, Zeszyt Naukowy Pol. Śl., w druku.

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ИСГИБА ПЛИТ С УЧЁТОМ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

(Коммюнике)

Р е з ю м е

В докладе определяется функционал Райснера для плиты подвергаемой остаточным деформациям с учётом влияния температуры. С условий необходимых для её минимума получено уравнение Кармана вместе с комплетом краевых условий.

VARIATIONAL PRESENTING OF NON-LINEAR PROBLEM OF PLATE BEMDING TAKING INTO CONFIDERATION THE INFLUENCE OF TEMPERATURE

S u m m a r y

Reissner functional has been defined for the plate subjected to the finite deformations, with regard to the influence of temperature. From the conditions which are necessary for its minimum, Kármán equations together with a set of boundary conditions have been achieved.