ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 31 Nr kol. 608

Andrzej WAWRZYNEK

UOGÓLNIENIE ZASADY REISSNERA NA TERMOSPRĘŻYSTOŚĆ GEOMETRYCZNIE NIELINIOWĄ

Streszczenie. Stosując opis pola odkształceń w konfiguracji pierwotnej (zmienne Lagrange'a) i wychodząc z zasad termodynamiki, określono funkcję zwaną energią swobodną. Następnie zbudowano funkcjonał Reissnera, a z warunków koniecznych na jego ekstremum uzyskano komplet równań termosprężystości geometrycznie nieliniowej.

1. Wstęp

W pracy określono energię swobodną wychodząc z I i II zasady termodynamiki, danych w postaci

$$du = dW + \delta Q; \qquad \delta Q = T\, ds;$$

gdzie oznaczono przez:

- du - zmianę energii wewnętrznej,
- dW - sumę zmiany pracy odkształcenia,
- δQ - zmianę ilości ciepła,
- T - temperaturę,
- ds - zmianę entropii.

Energię swobodną f określono jako różnicę $f = u - sT$. Następnie zbudowano funkcjonał Reissnera w postaci analogicznej jak dla ośrodka bez wpływów termicznych, por. [4], [5], określając go poprzez tensor odkształcenia Greena e_{ij} oraz tensor naprężenia Kirchhoffa-Trefftza s_{ij} (konfiguracja początkowa).

Zakładamy, że wszystkie wielkości stosowane w niniejszej pracy określone będą w prostokątnym układzie współrzędnych kartezjańskich, oznaczonych jak i wskaźniki literowe małymi literami, por. [1].

2. Energia odkształcenia ośrodka termosprężystego

Energię odkształcenia ośrodka termosprężystego wyznaczymy w sposób analogiczny jak dla teorii liniowej, por. [3] lub teorii fizykalnie nieliniowej, por. [2]; rozwijając funkcję $f(e_{ij},T)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu $(e_{ij},T) = (0,\overset{}{T_0})$, mamy

$$f(e_{ij},T) = f(0,T_0) + \frac{\partial f(0,T_0)}{\partial e_{ij}} e_{ij} + \frac{\partial f(0,T_0)}{\partial T}(T - T_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(0,T_0)}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}} e_{ij}e_{kl} + 2\frac{\partial^2 f(0,T_0)}{\partial e_{ij}\partial T}(T - T_0)e_{ij} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f(0,T_0)}{\partial T^2}(T - T_0)^2\right]. \tag{2.1}$$

Wprowadzamy pojęcie stanu naturalnego, dla którego, dla $e_{ij} = 0$, $T = T_0$, mamy

$$f(0,T_0) = \frac{\partial f(0,T_0)}{\partial e_{ij}} = 0. \tag{2.2}$$

Wprowadzamy w (2.1) następujące tensory

$$c_{ijkl} = \frac{\partial^2 f(0,T_0)}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}, \quad -\beta_{ij} = \frac{\partial^2 f(0,T_0)}{\partial e_{ij}\partial T}, \quad m = \frac{\partial^2 f(0,T_0)}{\partial T^2}.$$

Równanie określające energię swobodną przyjmuje postać

$$f(e_{ij},T) = \frac{1}{2} c_{ijkl}e_{ij}e_{kl} - \beta_{ij}\tau e_{ij} + \frac{1}{2} m\tau^2, \tag{2.3}$$

gdzie:

$\tau = T - T_0$.

Zwracamy uwagę na formalne podobieństwo równania (2.3) z równaniem teorii liniowej, jednak w naszym przypadku e_{ij} jest tensorem odkształceń skończonych $(2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})$, a nie tensorem odkształceń infinitesymalnych $(2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i})$.

Korzystając ze związku $s_{ij} = \left.\frac{\partial f}{\partial e_{ij}}\right|_T$ uzyskamy

$$s_{ij} = c_{ijkl}e_{kl} - \beta_{ij}\tau. \tag{2.4}$$

Dla materiału izotropowego i jednorodnego związek ma postać

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij}e_{kk} - \varkappa\delta_{ij}\tau, \qquad (2.5)$$

gdzie μ, λ są stałymi Lame'go, a stałe $\varkappa = 3K\alpha_T$, α_T - współczynnik rozszerzalności liniowej.

Ostatecznie energia swobodna przyjmuje postać

$$f(e_{ij},T) = \mu e_{ij}e_{ij} + \frac{\lambda}{2}e_{kk}^2 - 3K\alpha_T e_{kk}\tau + \frac{1}{2}m\tau^2. \qquad (2.6)$$

Wykorzystując zależność $f_c(s_{ij},T) = s_{ij}e_{ij} - f(e_{ij},T)$ otrzymujemy wzór określający dopełniającą energię odkształcenia

$$f_c(s_{ij},T) = \alpha s_{ij}s_{ij} + \frac{\beta}{2}s_{kk}^2 - 3\gamma\alpha_T s_{kk} + \frac{1}{2}m\tau^2, \qquad (2.7)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{1}{4\mu}, \quad \beta = -\frac{1}{4\mu K}, \quad \gamma = \lambda - K.$$

3. Funkcjonał Reissnera

Dla termosprzężystości niesprzężonej funkcjonał Reissnera zbudujemy w postaci analogicznej jak dla ośrodka bez wpływów termicznych, poz. [4][5]

$$J_R = \int_V \left[s_{ij}e_{ij} - f_c(s_{ij},\tau) - X_iu_i\right]dx - \int_{\partial\hat{V}} \hat{\mathfrak{X}}_i\hat{u}_i dx -$$

$$- \int_{\partial\tilde{V}} \tilde{s}_{ij}n_j(u_i - \mathring{u}_i)dx. \qquad (3.1)$$

W równaniu (3.1) oznaczono przez:

X_i - siły masowe; $\mathfrak{X}_i$ - siły powierzchniowe; v - obszar zajmowany przez ośrodek w stanie naturalnym, a przez $\partial\hat{V}$, $\partial\tilde{V}$ ($\partial\tilde{V} \wedge \partial\tilde{V} = \Phi$, $\partial\hat{V} \cup \partial\tilde{V} = \partial v$) te podzbiory brzegowe obszaru v, na których kolejno określone są naprężenia i przemieszczenia; $f_c(s_{ij},\tau)$ - określone jest wzorem (2.7).

Funkcjonał ten będzie stacjonarny tylko dla ośrodka spełniającego równania równowagi, określone warunki brzegowe oraz równania konstytutywne, co wykażemy niżej.

Wychylamy ośrodek z położenia równowagi, zmieniając pole przemieszczeń o wektor δu_i, wówczas

$$\delta_u J_R = \int_V \left[s_{kl} \frac{\partial e_{kl}}{\partial u_{i,j}} \partial u_{i,j} - X_i \partial u_i \right] dx - \int_{\partial \hat{V}} \hat{\mathfrak{X}}_i \delta \hat{u}_i dx -$$

$$- \int_{\partial \tilde{V}} \tilde{s}_{ij} n_j \delta \tilde{u}_i dx.$$

Całkując przez części otrzymamy

$$\delta_u J_R = \int_V \left[(s_{ij} X_{K,i} \delta_{Kk})_{,j} \delta u_k - X_k \delta u_k \right] dx -$$

$$- \int_{\partial V} s_{ij} n_j X_{K,i} \delta_{Kk} \delta u_k dx - \int_{\partial \hat{V}} \hat{\mathfrak{X}}_k \delta \hat{u}_k dx -$$

$$- \int_{\partial \tilde{V}} \tilde{s}_{ij} n_j \delta u_i dx = 0.$$

Ponieważ wariacje δu_i są dowolne, otrzymamy

$$(s_{ij} X_{K,i} \delta_{Kk})_{,j} + X_k = 0, \qquad x_i \in V,$$

$$n_j s_{ij} X_{K,i} \delta_{Kk} = \mathfrak{X}_k, \qquad x_i \in \delta \hat{V},$$

tj. równania równowagi i warunki brzegowe w naprężeniach. Zmieniając naprężenia o wartość δs_{ij}, uzyskamy

$$\delta_{s_{ij}} J_R = \int_V \left[e_{ij} \delta s_{ij} - (2\alpha s_{ij} + \beta_{ij} s_{kk} -\right.$$

$$\left. - 3\gamma \underset{T}{\alpha} \tau \delta_{ij}) \delta s_{ij} \right] dx - \int_{\partial \tilde{V}} \delta s_{ij} n_j (u_i - \mathring{u}_i) dx = 0.$$

Z warunku, że wariacje δs_{ij} są dowolne uzyskujemy

$$e_{ij} = 2\alpha s_{ij} + \beta \delta_{ij} s_{kk} - 3\gamma \underset{T}{\alpha} \tau \delta_{ij}, \qquad x_j \in V,$$

$$u_i = \mathring{u}_i, \qquad x_j \in \partial \tilde{V},$$

tj. równania konstytutywne oraz warunki brzegowe w przemieszczeniach.

Korzystając z zależności $s_{ij}e_{ij} - f_c(s_{ij},\tau) = f(e_{ij},\tau)$ oraz określenia tensora Greena otrzymamy funkcjonał Reissnera w przemieszczeniach

$$J_R = \int_V \Big[\frac{1}{4}\mu(u_{ij} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{l,i}u_{l,j}) + \frac{\lambda}{2}(2u_{k,k} + u_{k,l}u_{k,l})^2 - \frac{3}{2}\frac{K\alpha\tau}{T}(2u_{k,k} + u_{k,l}u_{k,l}) - X_iu_i\Big]dx - \int_{\partial\hat{V}} \hat{X}_iu_i ds - \int_{\partial\tilde{V}} \tilde{s}_{ij}n_j(u_j-\hat{u}_i)dx.$$

Za pomocą funkcjonału Reissnera można otrzymać równania problemu w przemieszczeniach, co w przypadku płyty pokazano w pracy [6].

LITERATURA

[1] Borkowski Sz.: Mechanika ośrodków ciągłych, t. I, Gliwice 1975.

[2] Borkowski Sz.: Dynamical equations of physically nonlinear thermoelasticity, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci techn., 9, 24 (1976), 655-662.

[3] Nowacki W.: Dynamiczne zagadnienia termosprzężystości, PWN, Warszawa 1966.

[4] Reissner E.: On a variational theorem for finite elastic deformations, J. Math. Phys., 2 3, 32 1953, 129-135.

[5] Washizu K.: Variational methods in elasticity and plasticity, Perg. Pres., Oxford - New York 1974.

[6] Wawrzynek A.: Wariacyjne ujęcie problemu zginania płyt, z uwzględnieniem wpływu temperatury, Zeszyt Naukowy Pol. Śl., w druku.

ОБОБЩЕНИЕ ПРИНЦИПА РАЙСНЕРА НА ТЕРМИЧЕСКУЮ УПРУГОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНУЮ

Р е з ю м е

Применяя описание площади в первичной деформации конфигурации (переменная Лангранжа) и исходя из принципов термодинамики была определена функция названная свободной энергией. Затем был построен функционал Раиснера, а из условий, необходимых для его экстремум, получено набор уравнений термической упругости геометрически нелинейной.

GENERALIZATION OF REISSNER'S RULE ON GEOMETRICALI NON LINEAR THERMAL ELASTICITY

S u m m a r y

Using the description of deformation area in the primary configuration (Lagrange variables) and basing on the thermodynamic principles, function called thermodynamic potential has been defined. Moreover, Reissner functional has been formed and set of equations of geometrically nonlinear thermoelasticity has been achieved.