ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 31 Nr kol. 608

Tomasz JĘKOT

POTENCJAŁ TERMOSPRĘŻYSTY ORAZ ISTNIENIE ROZWIĄZAŃ UOGÓLNIONYCH TERMOMECHANIKI POWŁOK MAŁOWYNIOSŁYCH

Streszczenie. W pracy podano funkcjonał będący całkowitą energią potencjalną w teorii powłok małowyniosłych, geometrycznie nieliniowych, poddanych wpływom termicznym. Warunki brzegowe oraz równania równowagi uzyskano z wariacji funkcjonału. Wprowadzono pojęcie rozwiązań uogólnionych problemu, a także wykazano ich istnienie i jednoznaczność.

1. Wstęp

W niniejszej pracy skonstruowano funkcjonał energetyczny dla nieliniowej teorii powłok małowyniosłych, o stałej grubości, jednorodnych, izotropowych, z uwzględnieniem wpływów termicznych, (funkcjonały dla płyt i powłok bez wpływów termicznych można znaleźć w pracach [3,4,5]). Równania równowagi i warunki brzegowe teorii powłok małowyniosłych w polu termicznym, uzyskano z warunków koniecznych na minimum podstawowego funkcjonału. Zdefiniowano przestrzenie, w których określono rozwiązania uogólnione,por. [8,9,10,11,12].

Udowodniono również istnienie oraz jednoznaczność rozwiązania uogólnionego dla powłok zamocowanej na brzegu przegubowo lub w sposób sztywny. Rozpatrzmy powłokę małowyniosłą, o stałej grubości h, której powierzchnia środkowa - w każdym punkcie - charakteryzuje się dodatnią krzywizną Gaussa.

Do rozważań przyjmijmy, że powłoka przedstawiać będzie wycinek, którego rzut na płaszczyznę XOY będzie zbiorem $\mathcal{D}$ o brzegu S.

Niech

$$\Gamma = S \times \langle -h/2 : h/2 \rangle, \quad \mathcal{V} = \mathcal{D} \times \langle -h/2 : h/2 \rangle,$$

2. Oznaczenia oraz założenia

(i) - $\mathcal{D}$ - zbiór spójny, domknięty.

(ii) - S - zbiór spójny, składający się ze skończonej ilości krzywych gładkich.

Niech na powłokę działają siły powierzchniowe X, Y, Z oraz brzegowe X_b, Y_b.

(iii) $X, Y, Z \in L^p(\mathcal{D})$,

(iv) $X_b, Y_b \in L^p(S)$.

Przez N_1, N_2, S oznaczymy siły wewnętrzne

(v) $N_1, N_2, S \in L^p(\mathcal{D})$.

Załóżmy, że powłoka znajduje się w polu termicznym i niech T_z będzie temperaturą dla $z = -h/2$, a T_w temperaturą dla $z = h/2$.

Przyjmijmy liniowy rozkład temperatury na elemencie do powierzchni środkowej powłoki. Niech $\bar{T} = 1/2(T_w - T_z)$ oraz $T = \frac{T_w - T_z}{h}$.

(vi) $T, \bar{T} \in L^p(\mathcal{D})$,

(vii) $p > 1$.

Oznaczmy przez (u,v,w) wektor przemieszczenia powierzchni środkowej powłoki, którego współrzędne w § 4, spełniają warunki

(viii) $u\big|_s = v\big|_s = w\big|_s = 0$;

a) $\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_s = 0$

lub

b) $\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_s \neq 0$

Wzory na odkształcenia powierzchni środkowej powłoki małowyniosłej - w teorii nieliniowej geometrycznie, por. [5], mają postać:

$$\varepsilon_1 = u_x + k_1 w + \frac{1}{2} w_x^2,$$

$$\varepsilon_2 = v_y + k_2 w + \frac{1}{2} w_y^2, \tag{2.1}$$

$$2\varepsilon_{12} = \gamma_1 = u_y + v_x + w_x w_y.$$

Przyjmując, że

$$\varkappa_1 = w_{xx},$$

$$\varkappa_2 = w_{yy}, \tag{2.2}$$

$$\varkappa_{12} = w_{xy}.$$

otrzymamy wzory na odkształcenia warstwy odległej o z od powierzchni środkowej

$$\varepsilon_1^{(z)} = - z\, w_{xx} = - z\varkappa_1,$$

$$\varepsilon_2^{(z)} = - z\, w_{yy} = - z\varkappa_2, \tag{2.3}$$

$$\gamma_1^{(z)} = - 2\, z\, w_{xy} = - 2\, z\varkappa_{12}.$$

3. Potencjał termosprężysty

Wykonując odpowiednie obliczenia oraz przyjmując podstawienie

$$X = \bar{U}_x, \quad Y = -\bar{U}_y, \quad N_1 = -\Phi_{yy} - \bar{U}, \quad N_2 = -\Phi_{xx} + \bar{U}, \quad S = \Phi_{xy}, \tag{3.1}$$

do wzoru określającego całkowitą energię potencjalną powłoki

$$V = V\left[u_i(x_j)\right] = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dx - 3K\alpha_T \int_V \Theta\varepsilon_{kk}dx +$$

$$- \int_V X_i u_i\, dx - \int_\Gamma \hat{X}_i u_i\, dx, \tag{3.2}$$

uzyskamy

$$V = \frac{1}{2} D \int_{\mathcal{D}} \left[L(w,w) + 2(1+\nu)\alpha_T T\Delta w\right] dp -$$

$$+ \frac{1}{2\,\bar{E}h} \int_{\mathcal{D}} \left\{ L(\Phi\Phi) - 2(\nu+1)\left[\bar{U}^2 + \bar{U}(\Phi_{xx} - \Phi_{yy})\right]\right\} dp +$$

$$- \alpha_T \int_{\mathcal{D}} \bar{T}(\Phi_{xx} + \Phi_{yy})dp - C(1+\nu)\alpha_T^2 \int_{\mathcal{D}} \bar{T}^2\, dp, \tag{3.3}$$

gdzie L jest operatorem, por. [5]

$$L(w,w) = (w_{xx}^2 + w_{yy}^2)^2 - 2(1-\nu)(w_{xx}^2 w_{yy}^2 - w_{xy}^2) \tag{3.4}$$

Obliczając wariację wyrażenia (1.3) otrzymamy

$$\delta V = \oint_S \left[(N_1\cos\alpha + S\sin\alpha - X_b)\delta u + (N_2\sin\alpha + S\cos\alpha - Y_b)\delta v\right] ds +$$

$$+ \oint_S \left[(N_1 \cos\alpha + S\sin\alpha - X_b) \frac{\partial w}{\partial x} + (N_2 \sin\alpha + S\cos\alpha - Y_b) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \delta w \, ds +$$

$$- \int_{\mathcal{D}} \left[\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + X \right) \delta u + \left(\frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} + Y \right) \delta v \right] dp +$$

$$+ \int_{\mathcal{D}} \left[D(\nabla w)^2 - \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial y} + N_1 (k_1 - \varkappa_1) + \right.$$

$$\left. + N_2 (k_2 - \varkappa_2) - 2 S \varkappa_{12} - Z + D(1 + \nu) \alpha_T \Delta T \right] \delta w \, dp +$$

$$+ D \oint_S (1 - \nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2\alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2\alpha + \right. \right.$$

$$\left. + \nu \Delta w + (1 + \nu) \alpha_T T \right] \frac{\partial \delta w}{\partial n} \, dx +$$

$$+ D \oint_S \left\{ (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin\alpha\cos\alpha + \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \right] - \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + (1 + \nu) \alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} \right] \cos\alpha +$$

$$\left. - \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (1 + \nu) \alpha_T \frac{\partial T}{\partial y} \right] \sin\alpha \right\} \delta w \, ds = 0. \tag{3.5}$$

Dopuszczając możliwe wariacje δu, δv, δw otrzymamy z dwóch pierwszych całek wzoru (3.5), warunki brzegowe na siły, a z trzeciej - warunku równowagi. Całki piąta i szósta wyrażają warunki brzegowe na momenty. Całka czwarta daje równanie przemieszczeniowe problemu.

4. Rozwiązania uogólnione

Przez A oznaczmy zbiór funkcji $w \in C^2(\mathcal{D})$ spełniających warunki brzegowe zadane dla w. W A, por. [8], wprowadzamy iloczyn skalarny w następujący sposób:

$$(w_1, w_2)_1 \equiv D \int_{\mathcal{D}} \left\{ \varkappa_1^{(1)} (\varkappa_1^{(2)} + \nu \varkappa_2^{(2)}) + \varkappa_2^{(1)} (\varkappa_2^{(2)} + \nu \varkappa_1^{(2)}) + 2(1-\nu) \varkappa_{12}^{(1)} \varkappa_{12}^{(2)} \right\} dp. \tag{4.1}$$

$\varkappa_1^{(i)}$, $\varkappa_2^{(i)}$, $\varkappa_{12}^{(i)}$ dostajemy podstawiając do wzorów (2.2) $w = w_i$, $i = 1,2$. Domknięcie zbioru A w normie

$$\|w\|_1 = \left[(w;\ w)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.2}$$

określa przestrzeń, którą oznaczać będziemy przez $H_1(\mathcal{D})$. Niech B będzie zbiorem funkcji wektorowych $w^* = (u,v)$ takich, że: $u,v \in C^1(\mathcal{D})$; u, v spełniają warunki brzegowe zadane na S. W B wprowadzamy iloczyn skalarny

$$(w_1^*;\ w_2^*)_2 \equiv c\int_{\mathcal{D}}\left[\varepsilon_1^{(1)}\left(\varepsilon_1^{(2)} + \nu\varepsilon_2^{(2)}\right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_2^{(1)}\left(\varepsilon_2^{(2)} + \nu\varepsilon_1^{(2)}\right) + \frac{1-\nu}{2}\gamma_1^{(1)}\gamma_1^{(2)}\right]dp. \tag{4.3}$$

$\varepsilon_1^{(i)}$, $\varepsilon_2^{(i)}$, $\gamma_1^{(i)}$ – obliczamy, ze wzorów (2.1) podstawiając $u = u_i$, $v = v_i$, $w = 0$, $i = 1,2$. Domknięcie B w normie

$$\|w^*\|_2 = \left[(w^*;\ w^*)_2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.4}$$

określa przestrzeń, który oznaczać będziemy przez $H_2(\mathcal{D})$.

Przez C oznaczmy zbiór funkcji wektorowych $\bar{w} = (u,v,w)$ takich, że $w^* = (u,v) \in H_2(\mathcal{D})$ oraz $w \in H_1(\mathcal{D})$.

W zbiorze C wprowadzamy kolejno iloczyn skalarny oraz normę

$$(\bar{w}_1;\ \bar{w}_2)_3 = (w_1;\ w_2)_1 + (w_1^*;\ w_2^*)_2. \tag{4.5}$$

$$\|\bar{w}_3\| = \left(\|w\|_1^2 + \|w^*\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.6}$$

Zbiór C z wprowadzoną normą $\|\bar{w}\|_3$ określa przestrzeń, którą oznaczać będziemy przez $H_3(\mathcal{D})$. Łatwo zauważyć, że przestrzenie $H_1(\mathcal{D})$, $H_2(\mathcal{D})$, $H_3(\mathcal{D})$ są zupełne.

Oznaczając przez $\bar{a}$ wektor $\bar{a} = (\varphi, \psi, \chi)$, gdzie $\varphi = \delta u$, $\psi = \delta v$, $\chi = \delta w$, możemy zasadę wirtualnych przemieszczeń Lagrange'a wyrażoną wzorem (3.5) zapisać następująco:

$$(\bar{w};\ \bar{a})_3 = -\int_{\mathcal{D}}\left\{N_1(k_1\chi + w_x\chi_x) + N_2(k_2\chi + w_y\chi_y) + \right.$$

$$+ C\left[k_1 w + \frac{1}{2} w_x^2 + \nu(k_2 w + \frac{1}{2} w_y^2) - (1+\nu)\alpha_T \bar{T}\right]\varphi_x +$$

$$+ C\left[k_2 w + \frac{1}{2} w_y^2 + \nu(k_1 w + \frac{1}{2} w_x^2) - (1+\nu)\alpha_T \bar{T}\right]\psi_y +$$

$$+ S(w_x \chi_y + w_y \chi_x + C\frac{1-\nu}{2} w_x w_y(\varphi_y + \psi_x)\Bigg\} dp +$$

$$+ D\int_{\mathcal{D}} (1+\nu)\alpha_T T(\chi_{xx} + \chi_{yy})dp + \int_{\mathcal{D}} (X\varphi + Y\psi + Z\chi)dp. \qquad (4.7)$$

Definicja rozwiązania uogólnionego

Przez rozwiązanie uogólnione problemu brzegowego teorii powłok małowyniosłych, w wektorowym polu sił i skalarnym polu temperatur, rozumieć będziemy funkcję wektorową $\bar{w} = (u,v,w)$ spełniającą tożsamościowo równanie (4.7) dla dowolnego wektora $\bar{a} = (\varphi,\psi,\chi) \in H_3(\mathcal{D})$. Rozpatrzmy prawą stronę (4.7) przy ustalonym $\bar{w} = (u,v,w) \in H_3(\mathcal{D})$ jako funkcjonał $F_{\bar{w}}[\bar{a}]$ wektora $\bar{a} = (\varphi,\psi,\chi) \in H_3(\mathcal{D})$. $F_{\bar{w}}[\bar{a}] : H_3(\mathcal{D}) \to R$.

Łatwo wykazać słuszność następujących lematów.

L e m a t 1

Funkcjonał $F_{\bar{w}}$ jest liniowy oraz ciągły ze względu na $\bar{a} \in H_3(\mathcal{D})$.

L e m a t 2

Przestrzeń $H_3(\mathcal{D})$ jest liniowa. Dalej wykorzystamy twierdzenie Riesza, pozr. [10].

Tw. Rieza

Dla funkcjonału l liniowego, ograniczonego zadanego na liniowej zupełnej przestrzeni H, istnieje jednoznaczny element $f \in H$, taki że dla wszystkich $w \in H$ zachodzi

$$l(w) = (f,w)_H, \qquad (4.8)$$

gdzie $(f,w)_H$ oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni H.

W naszym przypadku są spełnione wszystkie założenia powyższego twierdzenia, stąd istnieje element $f \in H_3(\mathcal{D})$ taki, że ze względu na (4.8) zachodzi

$$F_{\bar{w}}[\bar{a}] = (f, \bar{a})_3, \ \forall \bar{a} \in H_3(\mathcal{D}), \qquad (4.9)$$

wynika stąd, że

$$(\bar{w}, \bar{a})_3 = (f, \bar{a})_3, \ \forall \bar{a} \in H_3(\mathcal{D}) \qquad (4.10)$$

i że element f jest wyznaczony jednoznacznie.

Przyjmując $\overline{W} = f$ w $H_3(\mathcal{D})$ uzyskujemy istnienie i jednoznaczność rozwiązania uogólnionego w rozpatrywanym tutaj przypadku.

LITERATURA

[1] Borkowski S.: Współczesne problemy i kierunki rozwojowe termomechaniki powłok, Sympozjum: "Konstrukcje Powłokowe Teoria i zastosowanie", Kraków 1974, materiały 35 s.

[2] Jękot T.: O konstrukcji rozwiązań uogólnionych nieliniowej termomechaniki powłok, Praca magisterska 1977.

[3] Łukasiewicz S.: Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach, PAN, Warszawa 1976.

[4] Timoszenko S., Wojnowski-Kriegier S.: Teoria płyt i powłok, Arkady 1962.

[5] Вольмир А.С.: Гибкие пластинки и оболочки, Москва 1956.

[6] Ворович И.И.: О некаторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек, ДАН СССР, Ио 1, том 105, стр. 42-45.

[7] Ворович И.И.: О некаторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек, ДАН СССР, том , 1956, стр. 449-474.

[8] Ворович И.И.: О существовании решений в нелинейной теории оболочек, ГММ, том 117, 1957, стр. 203-206.

[9] Ворович И.И.: О существовании решений в нелинейной теории оболочек, ПММ, том 36, 1972, стр. 691-704.

[10] Ладыженская О.А.: Краевые задачи математической физики, Москва 1973.

[11] Михайлов: Дифференциальные уравнения в частных производных, Москва 1976.

[12] Соболев С.Л.: Некаторые применения функционального анализа в математической физике, изд-во ЛГУ, 1950.

ТЕРМОУПРУГИЙ ПОТЕНЦИАЛ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ТЕРМОМЕХАНИКИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Р е з ю м е

В статье показан функционал, представляющий термоупругй знергетический потенциал для пологих оболочек, которые ноходяться в термических полях в теории геометрически нелинейной.

Краевые условия и уравнения ровнавеся получено на дороге вариации функционала.

Введено поняте обобщенных решений проблема, показано их существование и одинозначность.

THE THERMOELASTIC POTENTIAL AND THE EXISTANCE THEOREM OF THE GENERALIZED SOLUTIONS OF THE THERMOMECHANIC OF THE SHALOW SHELLS

S u m m a r y

This paper presents the functional which is the thermoelastic potential for the shalow shell in the thermical fields in the geometric nonlinear theory. The boundary couditions and the balance equations are obtained by the variation of the functional. It is introduced the idea of the generalized solutions of this problem and it is shawed the existance and the uniqueness of such solutions.