ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 31 Nr kol. 608

Jadwiga JĘDRZEJCZYK

BŁĄD APROKSYMACJI METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO NIELINIOWEGO

Streszczenie. W niniejszej pracy podaje się błąd aproksymacji metodą elementu skończonego, rozwiązania problemu brzegowego równania nieliniowego opisującego ugięcie płyt fizykalnie nieliniowych. Błąd rozwiązania podany jest w przypadku gdy problem ma rozwiązanie klasyczne odpowiedniej regularności.

Wstęp

W pracy podaje się błąd aproksymacji metodą elementów skończonych, rozwiązania problemu brzegowego dla płyt fizykalnie nieliniowych.

Podstawy zagadnień dla ośrodków fizykalnie nieliniowych znajdują się w monografii [2].

W pracy [3] sformułowano metodę elementów skończonych dla ośrodków nieliniowych i wykazano istnienie rozwiązania przybliżonego. Problem równoważności wariacyjnego i operatorowego ujęcia teorii płyt fizycznie nieliniowych rozważa się w pracach [1, 4, 6, 5].

W niniejszej pracy podaje się błąd aproksymacji przybliżonego rozwiązania. Badania niniejsze stanowią kontynuację problemów, które w zakresie liniowym były rozpatrywane w [9].

1. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy w obszarze prostokątnym Ω następujące równanie różniczkowe, opisujące ugięcie płyt fizycznie nieliniowych [1]

$$Pw = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[D_1 \frac{1-2\nu}{1-\nu}\varphi(\varepsilon^2)\Delta w + \frac{1}{3} D_2 f(e^2)\Big(3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta w\Big) +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big[D_2 \frac{1-2\nu}{1-\nu}\varphi(\varepsilon^2)\Delta w + \frac{1}{3} D_2 f(e^2)\Big(3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta w\Big) +$$

$$+ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big[D_2 f(e^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\Big] = p(x,y) \qquad (1.1)$$

z warunkami brzegowymi

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \qquad (x, y) \in \partial\Omega \tag{1.2}$$

W powyższym D_1, D_2, ν są stałymi, n jest normalną do brzegu $\partial\Omega$ obszaru Ω, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, a $\mathcal{E}$ i e określone są zależnościami:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{3}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,\Delta w \tag{1.3}$$

$$e^2 = \frac{4}{9}\left[\frac{2-\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{2-\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 6\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]$$

Funkcje $\varphi(\mathcal{E}^2)$, $f(e^2)$ określające nieliniowość równania (1.1), otrzymywane na podstawie badań doświadczalnych, spełniają następujące warunki:

1. φ, $f \in C^2(\Omega)$ (1.4)
2. $\frac{d}{d\mathcal{E}}\left[\varphi(\mathcal{E}^2)\mathcal{E}\right] = \varphi(\mathcal{E}^2) + 2\varphi'(\mathcal{E}^2)\mathcal{E}^2 \geqslant \varkappa_1 > 0$

   $\frac{d}{de}\left[f(e^2)e\right] = f(e^2) + 2f'(e^2)e^2 \geqslant \varkappa_2 > 0$
3. $\varphi(0) = 1$ $f(0) = 1$
4. Krzywe $\varphi(\mathcal{E}^2)\mathcal{E}$ oraz $f(e^2)e$ są wklęsłe.

Rozwiązanie problemu (1.1), (1.2) minimalizuje funkcjonał

$$\Phi(w) = \int_\Omega d\Omega\left[\sum_{i=1}^{2}\int_0^{\tau_i(w,w)} g_i(\eta)d\eta\right] - \int_\Omega pw\,d\Omega, \tag{1.5}$$

gdzie

$$g_1(\eta) = \frac{9}{2}\,D_1\,\frac{1-\nu}{1-2\nu}\,\varphi(\eta) \tag{1.6}$$

$$g_2(\eta) = \frac{3}{8}\,D_2\,f(\eta)$$

$$\tau_1(w, h) = \frac{1}{9}\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)^2 \mathcal{E}(w)\,\mathcal{E}(h)$$

$$\tau_2(w,\ h) = \frac{4}{9}\ e(w,h) = \frac{4}{9}\left[\frac{2-\vartheta}{1-\vartheta}\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2-\vartheta}{1-\vartheta}\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right.$$

$$\left. - \frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 6\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right]$$

w przestrzeni $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ (por. [5, 4]).

W powyższym przez $W_2^k(\Omega)$ oznaczamy przestrzeń Sobolewa, zdefiniowaną następująco [7]:

$$u \in W_2^k(\Omega) \Leftrightarrow u \in L_2(\Omega),\ \ D^p u \in L_2(\Omega)\ \ \forall p\ \ |p| \leqslant k$$

$$\|u\|^2_{W_2^k(\Omega)} = \sum_i^k \|D^i u\|^2_{L_2(\Omega)},$$

gdzie

$$D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x^{p_1}, \partial y^{p_2} \partial z^{p_3}, \ldots} \qquad p = (p_1, p_2, \ldots, p_n), \qquad |p| = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

oznacza pochodną uogólnioną.

$\mathring{W}_2^k(\Omega)$ jest domknięciem zbioru funkcji należących do $C^k(\Omega)$ w normie przestrzeni $W_2^k(\Omega)$.

2. Metoda elementu skończonego

Minimum funkcjonału (1.9) może być otrzymane metodą elementu skończonego. Niech $\delta\Omega$, brzeg obszaru Ω będzie wielokątem. Podzielmy obszar $\bar{\Omega}$ na skończoną ilość dowolnych trójkątów $\left\{T_k\right\}_{k=1}^N$ w taki sposób, aby otwarte trójkąty były rozłączne, suma ich domknięć była równa $\bar{\Omega}$, a dwa sąsiednie trójkąty miały albo wspólny bok albo wierzchołek. Z każdym takim podziałem zwiążemy dwa parametry ϑ i d; ϑ niech będzie najmniejszym kątem a d największym bokiem wszystkich trójkątów danej triangulacji.

Przyjmijmy, że kąt ϑ spełnia warunek

$$\vartheta \geqslant \vartheta_0 > 0 \tag{2.1}$$

Rozpatrzmy dowolny trójkąt T_k z wierzchołkami P_{k1}, P_{k2}, P_{k3}. Przez Q_{k1}, Q_{k2}, Q_{k3} oznaczmy środki boków tego trójkąta a przez n_{k1}, n_{k2}, n_{k3} normalne zewnętrzne tych boków.

Niech $q(x,y)$ będzie wielomianem stopnia piątego

$$q(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_{20} xy^5 + \alpha_{21} y^5 \tag{2.2}$$

Dla zdeterminowania tego wielomianu potrzeba 21 warunków. Wybierzemy je w następujący sposób; w każdym punkcie wierzchołkowym trójkąta T_k określimy wartość i wszystkie pochodne do drugiego rzędu włącznie, funkcji $q(x,y)$, czyli

$$D^{\alpha} q(P_{kj}) = \psi_{kj} \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2, \; j = 1,2,3 \tag{2.3}$$

a w punktach środkowych boków pochodne normalne

$$\frac{\partial q(Q_{kj})}{\partial n_{kj}} \qquad j = 1,2,3 \tag{2.4}$$

Wartości te jednoznacznie określają wielomian stopnia piątego. Zdefiniujemy na Ω zbiór funkcji, które na poszczególnych prostokątach T_k danej triangulacji są równe wielomianowi określonemu przez (2.2), (2.3), (2.4), a w punktach brzegowych spełniają warunki brzegowe (1.2). Zbiór tych funkcji jest skończenie wymiarową podprzestrzenią przestrzeni $\mathring{W}_2^2(\Omega)$, którą oznaczymy przez $H_d(\Omega)$.

Rozwiązanie przybliżone $u_d(x,y)$ definiujemy jako funkcję minimalizującą funkcjonał (1.5) w klasie H_d.

Minimum funkcjonału (1.5) w $H_d(\Omega)$ istnieje (por. [3]).

3. Błąd aproksymacji

Oszacujemy błąd aproksymacji, w przypadku gdy problem (1.1)-(1.2) ma rozwiązanie klasyczne odpowiedniej regularności.

T w i e r d z e n i e

Jeśli rozwiązaniu problemu (1.1)-(1.2) ma ograniczone pochodne szóstego rzędu w Ω

$$|D^{\alpha} u| \leq M_6 \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = 6 \tag{3.1}$$

to

$$\| u - u_d \|_{W_2^2(\Omega)} \leq \frac{c}{\sin \vartheta} M_6 d^4, \tag{3.2}$$

gdzie stała c nie zależy od triangulacji obszaru Ω .

D o w ó d

Oznaczając $k = u_d - u$ oraz $(\cdot,\cdot)$ iloczyn skalarny w $L_2(\Omega)$, obliczmy różnicę wartości funkcjonału (1.6) w punktach u_d i u

$$\Phi(u_d) - \Phi(u) = F(u_d) - F(u) - (p,u_d) + (p,u) :$$

$$\int_0^1 F'_{u+ks}\, k\, ds - (p,k) =$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 ds \int_\Omega d\Omega \left[\sum_{i=1}^{2} \int_0^{\tau_i(u+ks+th,\,u+ks+th)} g_i(\eta)\, d\eta\right]\Bigg/_{t=0} - (p,k) =$$

$$= 2\int_0^1 ds \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{2} g_i\left[\tau_i(u+ks,\ u+ks)\right]\tau_i(u+ks,\ k)\right] d\Omega - (p,k) \tag{3.2}$$

Oznaczmy przez G gradient funkcjonału F.
Gradient ten wynosi

$$(G(u),\ k) = 2\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \left\{g_i\left[\tau_i(u,u)\right]\tau_i(u,k)\right\} d\Omega \tag{3.3}$$

Ponieważ u jest rozwiązaniem problemu (1.1)-(1.2), więc

$$(p,\ k) = (G(u),\ k) \tag{3.4}$$

Uwzględniając (3.3) i (3.4) w (3.2) otrzymamy

$$\Phi(u_d) - \Phi(u) = \int_0^1 (G(u+ks),\ k)ds - (G(u),k) \tag{3.5}$$

Ponieważ istnieje pochodna Gâteux operatora G w W_2^2 (por. [5]) więc

$$\int_0^1 \left[(G(u+ks),\ k) - (G(u),\ k)\right] ds =$$

$$\int_0^1 \frac{ds}{s}\int_0^1 (G'_{u+tks}ks,\ ks)dt =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{ds}{s}\int_\Omega d\Omega\int_0^1 \sum_{i=1}^{2}\Big\{g_i\left[(\tau_i(u + kst,\ u + kst)\right]\tau_i(ks,ks) +$$

$$+ 2g_i'\left[\tau_i(u + tks,\ u + tks)\right]\left[\tau_i(u + tks,\ ks)\right]^2\Big\}dt \qquad (3.6)$$

Z nierówności Schwarza dla form τ_i, przy uwzględnieniu oznaczeń (1.7) i warunków (1.4) wynika

$$\Phi(u_d) - \Phi(u) \geqslant 2\int_0^1 \frac{ds}{s}\int_0^1 dt\int_\Omega \sum_{i=1}^{2}\Big\{g_i\left[\tau_i(u + tks,\ u + tks)\right] +$$

$$+ 2g_i'\left[\tau_i(u + tks,\ u + tks)\right]\tau_i\ (u + tks,\ u + tks)\ \tau_i(ks,ks)\Big\}\,d\Omega$$

$$\geqslant 2\int_0^1 \frac{ds}{s}\int_0^1 dt\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \beta_i\,\tau_i(ks,ks)d\Omega, \qquad (3.7)$$

gdzie

$$\beta_1 = 9D_1\,\frac{1-\vartheta}{1-2\vartheta}\,\varkappa_1$$

$$\beta_2 = \frac{3}{4}\,D_2\,\varkappa_2$$

Przyjmując $\mu = \min\left[\frac{1}{9}\,\beta_1\left(\frac{1-2\vartheta}{1-\vartheta}\right)^2,\ 3\,\beta_2\,\frac{2-\vartheta}{1-\vartheta}\right]$ i korzystając w (3.7) dwukrotnie z nierówności Friedrichsa uzyskamy:

$$\Phi(u_d) - \Phi(u) \geqslant$$

$$\mu\int_0^1 \frac{ds}{s}\int_0^1 dt\int_\Omega s^2\left[\left(\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 k}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 k}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dt \geqslant$$

$$\geqslant c^2\,\|k\|^2_{W_2^2} = c^2\,\|u_d - u\|^2_{W_2^2} \qquad (3.8)$$

Z drugiej strony

$$\Phi(u_d) - \Phi(u) = \min_{w\in H_d}\Phi(w) - \Phi(u) \leqslant$$

$$\leqslant \Phi(\tilde{u}_d) - \Phi(u), \qquad (3.9)$$

gdzie $\tilde{u}_d$ jest taką funkcją z H_d, że wartości pochodnych

$$D^{\alpha}\tilde{u}_d \qquad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2) \qquad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2\leqslant 2$$

w wierzchołkach trójkątów i wartości pochodnych normalnych $\frac{\partial \tilde{u}_d}{\partial n_j}$ w punktach środkowych boków są takie same jak rozwiązania u. Oznaczając $\tilde{u}_d - u = \tilde{k}$ i uwzględniając w (3.9) warunki (3.5), (3.6) i (1.4) otrzymamy

$$\Phi(u_d) - \Phi(u) =$$

$$2\int_0^1 \frac{ds}{s}\int_0^1 dt\int_\Omega \Biggl\{\sum_{i=1}^{2}\Bigl[g_i\bigl[\tau_i(u+\tilde{k}ts,\, u+t\tilde{k}s)\bigr]\tau_i(\tilde{k}s,\tilde{k}s)\, +$$

$$+\, 2g_i'\bigl[\tau_i(u+t\tilde{k}s,\, u+t\tilde{k}s)\bigr]\bigl[\tau_i(u+ts\tilde{k},\, s\tilde{k}\bigr]^2\Biggr\}\, d\Omega \leqslant$$

$$c\int_0^1 \frac{ds}{s}\int_0^1 dt\int_\Omega \sum_{i=1}^{2}\tau_i(\tilde{k}s,\,\tilde{k}s)\, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant c\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial^2\tilde{k}}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\tilde{k}}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2\tilde{k}}{\partial x\partial y}\right)^2\right] d\Omega \tag{3.10}$$

Ponieważ $\tilde{u}_d$ jest wielomianem stopnia 5, a funkcja u ma, zgodnie z założeniami, ograniczone pochodne rzędu szóstego, więc

$$|D^6\tilde{k}| = |D^6u| \leqslant M_6 \tag{3.11}$$

a na podstawie wyboru funkcji $\tilde{u}_d$

$$D^{\alpha}\tilde{k}(P_{kj}) = \frac{\partial\tilde{k}(Q_{kj})}{\partial n_{kj}} = 0 \qquad \begin{array}{ll}\alpha=(\alpha_1,\alpha_2) & j=1,2,3\\ |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2\leqslant 2, & \end{array} \tag{3.12}$$

Z warunków (3.11), (3.12) i twierdzenia [3] z pracy [9] wynika

$$\int_\Omega (D^{\alpha}\tilde{k})^2\, d\Omega \leqslant \frac{c}{\sin^4\vartheta} M_6^2\, d^8 \qquad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2) \quad |\alpha|=2, \tag{3.13}$$

gdzie c jest stałą niezależną od h i od triangulacji obszaru Ω. Z ostatniej nierówności oraz z (3.8), (3.9) i (3.10) wynika

$$\|u_d-u\|_{W_2^2}\leqslant c\, M_6 d^4\, \frac{1}{\sin^2\vartheta},$$

co jest tezą naszego twierdzenia.

LITERATURA

[1] Jędrzejczyk J.: Równoważność wariacyjnego i operatorowego ujęcia płyt fizykalnie nieliniowych (w druku).

[2] Kauderer H.: Nichtlineare Mechanik, Springer Verlag 1958.

[3] Kolarow D., Bogdanowa N., Baltov A.: On the solution of a nonlinear variational problem associated with the finite element method, Izw. Inst. Techn. Mech. Bułg. AN 8, 1971.

[4] Langenbach: Variationsmethoden in der nichtlinearen Elastizitats und Plastizitatstheorie, Wiss. Z. Humboldt Univ. Berlin, Mat.-Nat. R. IX, 1959/1960.

[5] Michlin S.G.: Czisliennaja realizacja wariacionnych metodow. Moskwa 1966.

[6] Weinberg M.M.: Wariacionnyje metody isliedowanija nieliniejnych operatorow. Gostiechizdat 1956.

[7] Yosida K.: Functional Analysis, Springer Verlag 1965.

[8] Ženisek A.: Interpolation polynomials on the triangle, Num. Math. 45, 1970.

[9] Zlamal M.: On the Finite Element Method, Num. Math. 12, 1968.

ОШИБКА АППРОКСИМАЦИИ МЕТОДОМ ЭЛЕМЕНТОВ ЗАКОНЧЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Р е з ю м е

В настоящей работе представлена ошибка аппроксимации методом конечного элемента решения краевого вопроса нелинейного уравнения, описывающего прогиб плит физически нелинейных.

Ошибка решения дана для случая, когда вопрос имеет решение классически соответствующей регулярности.

THE ERROR OF APPROXIMATION USING THE NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION FINITE ELEMENTS METHOD

S u m m a r y

The paper presents the approximation error using the finite element method in solving a boundary problem of a nonlinear equation describing the deflection of physically non-linear plates.

The solution error is given in the case of the problem having the classical solution of the corresponding regularity.