ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 31 Nr kol. 608

Władysław PĘKAŁA, Janusz SZOPA

ZASTOSOWANIE METODY LINEARYZACJI STATYSTYCZNEJ DO BADANIA CHARAKTERYSTYK PROBABILISTYCZNYCH NIELINIOWEGO OSCYLATORA

Streszczenie. W pracy przedstawiono zastosowanie metody linearyzacji statystycznej do badania wariancji i funkcji gęstości spektralnej rozwiązania równania ruchu nieliniowego oscylatora. Przeprowadzono obliczenia numeryczne wartości funkcji gęstości spektralnej rozwiązania w przypadku, gdy wymuszenie jest procesem stacjonarnym o wartości średniej równej zero i stałej gęstości spektralnej (biały szum) dla różnych wartości parametrów rozważanego układu dynamicznego.

Rozważać będziemy nieliniowe równania oscylatora w postaci

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q + \varphi(q,\dot{q}) = Q(t,\omega), \tag{1}$$

gdzie:

n, k - stałe charakteryzujące tłumienie i sprężystośc [4],

$Q(t,\omega)$ - siła wymuszająca będąca procesem stochastycznym, natomiast,

$\varphi(q,\dot{q})$ - nieliniowość dana zależnością

$$\varphi(q,\dot{q}) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j \geqslant 2}}^{N} a_{ij} q^i \dot{q}^j \tag{2}$$

gdzie

a_{ij} stałe.

Aby wyznaczyć wariancję oraz funkcję gęstości spektralnej rozwiązania równania (1) zastosowano metodę linearyzacji statystycznej [1-3, 5, 6].

Zależność nieliniową (2) zastąpić można zależnością liniową:

$$\psi(q,\dot{q}) = \alpha_1 \dot{q} + \alpha_0 q, \tag{3}$$

gdzie:

α_0 i α_1 - są liczbami rzeczywistymi.

W metodzie linearyzacji statystycznej żąda się, aby procesy φ i ψ były równoważne wg pewnego kryterium.

W literaturze rozważane są różne kryteria [3, 6], np. zakłada się równość wartości średnich i funkcji korelacji

$$E\varphi = E\psi, \quad K_\varphi = K_\psi \tag{4}$$

lub przyjmowanie wartości minimalnej przez średni kwadrat ich różnicy

$$E\left[\varphi - \psi\right]^2 = \min. \tag{5}$$

Po podstawieniu w (4) lub (5) zależności (2) i (3) można otrzymać warunki jakie muszą spełniać stałe α_0 i α_1.

Do dalszych rozważań założono, że nieliniowość ma kształt:

$$\varphi(q,\dot{q}) = \frac{1}{3}\gamma q^3, \tag{6}$$

gdzie:

γ - stała dodatnia.

Wzór (6) oznacza, że sprężystość występująca w równaniu (1) jest nieliniowa.

O $Q(t,\omega)$ założono, że jest stacjonarnym procesem stochastycznym o wartości średniej równej zero i stałej gęstości spektralnej (biały szum)

$$m_Q \equiv 0; \qquad S_Q(\nu) = S = \text{const} \tag{7}$$

Przy tych założeniach w relacji (3) $\alpha_0 = 3 \cdot \sigma_q^2$ oraz $\alpha_1 = 0$ [2, 3], σ_q^2 oznacza wariancję procesu q. Zlinearyzowane równanie (1) ma postać:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + (k^2 + \gamma \cdot \sigma_q^2) \cdot q = Q(t,\omega) \tag{8}$$

Do dalszych rozważań założono, że

$$0 < n < \sqrt{k^2 + \gamma \cdot \sigma_q^2} \tag{9}$$

(ruch drgający).

Rozwiązanie równania (8) otrzymane metodą transformacji Fouriera [4, 6] wyraża się wzorem:

$$q(t,\omega) = \int_{-\infty}^{t} p(t-\tau)\, Q(\tau,\omega)\, d\tau, \tag{10}$$

gdzie

$$p(t) = \frac{e^{-nt}}{\sqrt{k^2 + \gamma \cdot \sigma_q^2 - n^2}} \cdot \sin \sqrt{k^2 + \gamma \cdot \sigma_q^2 - n^2} \cdot t \qquad (11)$$

jest funkcją Greena dla równania (8). Jej transformata Fouriera będąca zarazem charakterystyką częstotliwościową równania jest określona wzorem

$$G(i\vartheta) = \frac{1}{(i\vartheta)^2 + 2ni\vartheta + k^2 + \gamma \cdot \sigma_q^2} \qquad (12)$$

Natomiast funkcja gęstości spektralnej rozwiązania równania (8) wyraża się następująco [6]:

$$S_q(\vartheta) = \left| G(i\vartheta) \right|^2 \cdot S_Q(\vartheta) \qquad (13)$$

Wykorzystując założenia (7) jest

$$S_q(\vartheta) = \frac{S}{(k^2 + \gamma \cdot \sigma_q^2 - \vartheta^2)^2 + 4n^2\vartheta^2} \qquad (14)$$

Ponieważ rozwiązanie równania (8) jest procesem stacjonarnym, więc wariancję σ_q^2 można obliczyć jako wartość funkcji korelacji $K_q(t)$ dla t=0. Jednocześnie można skorzystać z faktu, że funkcja korelacji jest odwrotnym przekształceniem Fouriera funkcji gęstości spektralnej [6]. Stąd

$$\sigma_q^2 = \frac{S}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{(k^2 + \gamma \cdot \sigma_q^2 - \vartheta^2)^2 + 4n^2\vartheta^2} \qquad (15)$$

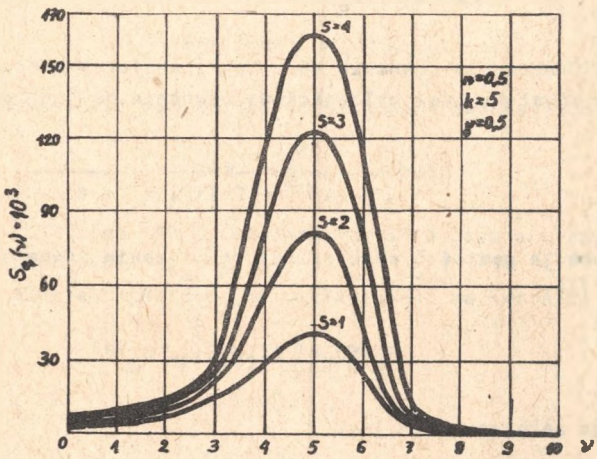
Po żmudnych obliczeniach otrzymano

$$\sigma_q^2 = \frac{S}{4n(k^2 + \gamma \cdot \sigma_q^2)} \qquad (16)$$

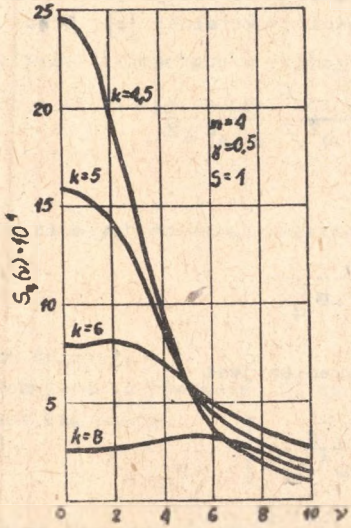
Jest to równanie kwadratowe, którego rozwiązaniem jest

$$\sigma_q^2 = \frac{k^2}{2\gamma} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{\gamma \cdot S}{nk^4}} - 1 \right] \qquad (17)$$

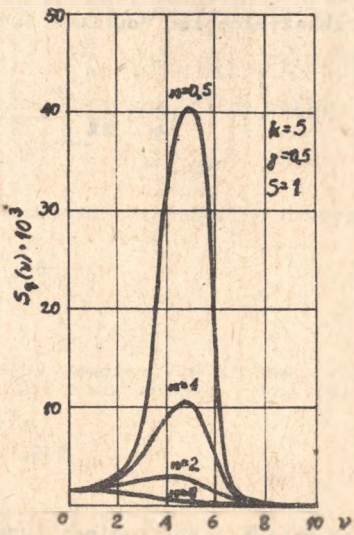
Funkcję gęstości spektralnej rozwiązania $q(t,\omega)$ można wyznaczyć ze wzoru (14). Po przekształceniach jest



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

$$S_q(\nu) = \frac{S}{\nu^4 + \beta_1 \cdot \nu^2 + \beta_2}, \tag{18}$$

gdzie

$$\beta_1 = 4n^2 - k^2 \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma \cdot S}{nk^4}}\right]$$

$$\beta_2 = \frac{\gamma \cdot S}{4n} + \frac{1}{2} k^4 \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma \cdot S}{nk^4}}\right]. \tag{19}$$

Przebiegi funkcji (18) w zależności od wielkości parametrów n, k, γ, S przedstawiono na rysunkach 1-3. Ponieważ gęstość spektralna jest funkcją parzystą $(S_q(\nu) = S_q(-\nu))$ dlatego na wykresach przedstawiono jej wartości dla $\nu \geqslant 0$.

Maksimum funkcji (18) znajduje się w punkcie $\nu = 0$ lub $\nu = \sqrt{-\frac{1}{2}\beta_1}$ (dla $\beta_1 < 0$). Na rys. 1 przedstawiono wartości gęstości spektralnej przy zmiennym S = 1, 2, 3, 4 i ustalonych pozostałych parametrach (n = 0,5, k = 5, γ = 0,5). Rys. 2 przedstawia wykresy dla k = 4,5; 5; 6; 8 oraz n = 4, γ = = 0,5, S = 1 a rys. 3 - dla n = 0,5; 1; 2; 4 i k = 5, γ = 0,5, S = 1.

Na podstawie otrzymanych wyników numerycznych można wysnuć następujące wnioski:

1. Wartości gęstości spektralnej zwiększają się przy wzroście parametru S (rys. 1).
2. Dla większych wartości parametru k (sprężystości) maksima funkcji gęstości spektralnej przyjmują mniejsze wartości. Dla $k \leqslant 5$ funkcja jest malejąca, a dla $k > 5$ funkcja ma lokalne maksimum dla $\nu \neq 0$ (rys. 2).
3. Przy zmniejszaniu n (tłumienia) wartości maksimów gęstości spektralnej szybko wzrastają (rys. 3).
4. Wpływ współczynnika γ (nieliniowości) na przebieg funkcji gęstości, (gdy $\gamma \in [0,2]$) jest znikomy. Przy założonej dokładności obliczeń (do trzeciej cyfry znaczącej) nie zaobserwowano zmian w przebiegu funkcji.

LITERATURA

[1] Dincă F., Teodosiu C.: Nonlinear and random vibrations. Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti 1973.

[2] Jevlanov J.G., Kazakov I.E.: Statisticeskoje issledovanije neliniejnych avtokolebatelnych sistem v ustanovivšichsa režimach. Avtomatika i Telemechanika No 12, 1969.

[3] Kazakov I.E.: Statictičeskaja teoria sistem upravlenija v prostranstvie sostojanij. Izd. Nauka, Moskva 1975.

[4] Skalmierski B.: Mechanika. PWN, Warszawa 1977.

[5] Skalmierski B., Tylikowski A.: Procesy stochastyczne w dynamice. PWN, Warszawa 1972.

[6] Sobczyk K.: Metody dynamiki statystycznej. PWN, Warszawa 1973.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОБАБИЛИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА

Р е з ю м е

В работе представлено применение метода линеаризации для исследования дисперсии и функции спектральной плотности решения уравнения движения нелинейного осцилятора.

Проведены расчёты номерной величины функции спектральной плотности решения в случае, когда воздействие является стационарным процессом средней величины равным нулю и постоянной спектральной плотности для различных величин параметров динамической системы.

USING THE STATISTIC LINEARIZATION METHOD IN EXAMINING THE PROBABILISTIC CHARACTERISTICS OF A NON-LINEAR OSCILLATOR

S u m m a r y

The paper presents the utilization of the statistic linearization method in examining the variance and the spectrum density function of the solution of motion of a non-linear oscillator. The numerical calculations of the value of function of the spectrum density of the solution have been performed in the case, when input (enforcement) is a stationary process of the mean value equal to zero, and when its spectrum density (white noise) is constant for various parameters of the considered dynamic system.