ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 31 Nr kol. 608

Bolesław MOKRSKI

NAJSZYBSZE NAGRZEWANIE POWŁOKI WALCOWEJ

Streszczenie. W niniejszej pracy rozważano zagadnienie najszybszego nagrzewania powłoki walcowej przy ograniczeniach na pole naprężeń. Aproksymując funkcję naprężeń dopuszczalnych liniową funkcją temperatury - uzyskano rozwiązanie w postaci analitycznej.

1. Wstęp

Przegląd publikacji dotyczących poruszanych tutaj zagadnień przedstawiony jest w pracy [1], [2], [3]. Rozpatrzymy proces najszybszego nagrzewania powłoki walcowej znajdującej się w osiowo-symetrycznym polu temperatur; pole temperatur będzie więc funkcją promienia i czasu. Zadanie będzie rozpatrywane w zmiennych bezwymiarowych

$$r \equiv \frac{\bar{r}}{R_z},\qquad t \equiv \frac{a\bar{t}}{R_z^2},\qquad k \equiv \frac{R_w}{R_z}, \tag{1.1}$$

gdzie:

R_z - promień zewnętrzny powłoki,

R_w - promień wewnętrzny powłoki,

$\bar{t}$ - czas nagrzewania.

2. Sformułowanie zadania

Niech powłoka walcowa, zamknięta, będzie nagrzewana od strony wewnętrznej - przez czynnik o temperaturze $u_1(t)$, i zewnętrznej - przez czynnik o temperaturze $u_2(t)$; należy określić temperatury czynników nagrzewających powłokę tak, aby nie przekroczyć dopuszczalnych naprężeń. Funkcję naprężeń dopuszczalnych $\sigma(T)$ aproksymować będziemy liniową funkcją temperatury.

Przystępując do formalnego określenia zadania przyjmujemy, że dane są:

a) równanie przewodnictwa ciepła

$$\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial T(r,t)}{\partial t}, \qquad (r,t) \in \Gamma \times \mathcal{J} \tag{2.1}$$

gdzie

$$\Gamma = \left\{ r : k < r < 1 \right\},$$

$$\mathcal{J} = \left\{ t : 0 < t < \infty \right\}$$

b) warunek początkowy

$$T(r,t)\Big|_{t=0} = T_0(r), \qquad r \in \bar{\Gamma} = \left\{ r : k \leqslant r \leqslant 1 \right\} \quad . \ (2.1')$$

c) naprężenia na powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej powłoki, jako liniowe funkcje temperatury

$$\frac{2}{1-k^2}\int_k^1 rT(r,t)dr - T(k,t) = a_1 - c_1 T(k,t), \qquad t \in \bar{\mathcal{J}}$$

(2.1″)

$$\frac{2}{1-k^2}\int_k^1 rT(r,t)dr - T(1,t) = a_2 - c_2 T(1,t), \qquad t \in \bar{\mathcal{J}}$$

d) równania wymiany ciepła między powłoką, a czynnikami nagrzewającymi

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=k} = \beta_1 (U_1(t) - T(k,t)), \qquad t \in \bar{\mathcal{J}}$$

(2.1)

$$\frac{\partial T(r,t)}{r}\Big|_{r=1} = \beta_2 (u_2(t) - T(1,t)), \qquad t \in \bar{\mathcal{J}}$$

W równaniach (2.1)-(2.1‴) oznaczono przez:

U_i - temperatury czynników nagrzewających powłokę (i = 1,2),

β_i - współczynniki wymiany ciepła między powłoką, a czynnikami nagrzewającymi (i = 1,2).

Po rozwiązaniu problemu (2.1)-(2.1″) wyznaczamy z (2.1‴) poszukiwane pola temperatur $U_1(t)$ i $U_2(t)$.

3. Rozwiązanie zadania (2.1)-(2.1″)

Rozwiązania zadania (2.1)-(2.1″) poszukiwać będziemy w postaci

$$T(r,t) = T_1(r) + T_2(r,t) \tag{3.1}$$

Podstawiając (3.1) do (2.1)-(2.1″) otrzymamy dwa układy równań różniczkowo-całkowych, które winny być spełnione przez pola $T_1(r)$ i $T_2(r,t)$; i tak $T_1(r)$ spełnia układy

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2T_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dT_1(r)}{dr} = 0, \qquad r \in \Gamma\\
&\frac{2}{1-k^2}\int_k^1 rT_1(r)dr - (1-C_1)T_1(k) = a_1, \qquad (3.2)\\
&\frac{2}{1-k^2}\int_k^1 rT_1(r)dr - (1-C_2)T_1(1) = a_2;
\end{aligned}
$$

natomiast $T_2(r,t)$ spełnia układy

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2T_2(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial T_2(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial T_2(r,t)}{\partial t}, \qquad (r,t)\in \Gamma\times\mathcal{T}\\
&T_2(r,t)\Big|_{t=0} = T_o(r) - T_1(r), \qquad r\in\overline{\Gamma}\\
&\frac{2}{1-k^2}\int_k^1 rT_2(r,t)dr - T_2(k,t)(1-C_1) = 0, \qquad t\in\overline{\mathcal{T}} \qquad (3.3)\\
&\frac{2}{1-k^2}\int_k^1 rT_2(r,t)dr - T_2(1,t)(1-C_2) = 0, \qquad t\in\overline{\mathcal{T}}
\end{aligned}
$$

Rozwiązaniem układu (3.2) będzie funkcja

$$T_1(r) = B_o\ln r + B_1, \qquad (3.4)$$

gdzie:

$$B_o = \frac{2(a_2C_1 - C_2a_1)(1-k^2)}{(2\ln k)(C_2 - C_1C_2 - k^2C_1 + k^2C_2) - (C_1 - C_2)(1-k^2)};$$

$$B_1 = \frac{a_1 - a_2 + (1-C_1)B_o\ln k}{C_1 - C_2} \qquad (3.4)$$

Układ (3.3) rozwiązujemy metodą rozdzielenia zmiennych przyjmując

$$T_2(r,t) = f(r)g(t); \qquad (3.5)$$

Wstawiając (3.5) do (3.3) otrzymamy

$$\frac{\frac{d^2f(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}}{f(r)} \qquad \frac{\frac{dg(t)}{dt}}{g(t)}=\vartheta \tag{3.6}$$

Dla równania (3.6) rozpatrujemy następujące przypadki

a) Niech $\vartheta = -\lambda^2$, wtedy:

$$\frac{d^2f(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}+\lambda^2 f(r)=0, \qquad r\in\Gamma$$

$$\frac{dg(t)}{dt}=-\lambda^2 g(t), \qquad t\in\mathcal{T} \tag{3.7}$$

Występujące w $(3.7)_1$ równanie jest równaniem Bessela, którego całka ma postać

$$f(r)=D_1J_o(\lambda r)+D_2Y_o(\lambda r), \tag{3.8}$$

gdzie J_o, Y_o przedstawiają kolejno funkcje Bessela I i II rodzaju.

Z warunków brzegowych $(3.3)_{3,4}$ otrzymamy:

$$D_2=D_1\cdot A(\lambda), \tag{3.9}$$

gdzie:

$$A(\lambda)=\frac{(1-C_1)J_o(\lambda k)-(1-C_2)J_o(\lambda)}{(1-C_2)Y_o(\lambda)-(1-C_1)Y_o(\lambda k)} \tag{3.10}$$

W równaniach powyższych λ ($\lambda > 0$) są pierwiastkami równania.

$$\frac{(1-k^2)(1-C_1)}{2}\lambda U_o(\lambda k)+kU_1(\lambda k)-U_1(\lambda)=0. \tag{3.11}$$

w którym

$$U_o(\lambda r)=J_o(\lambda r)+A(\lambda)Y_o(\lambda r),$$

$$U_1(\lambda r)=J_1(\lambda r)+A(\lambda)Y_1(\lambda r).$$

Z (3.5)

$$T_2(r,t)=D_1U_o(\lambda r)e^{-\lambda^2 t}. \tag{3.12}$$

Równanie (3.11) posiada nieskończoną ilość pierwiastków, por. [2]

b) Niech $\gamma = \lambda^2$, wtedy otrzymamy:

$$T_2(r,t) = D_1 U_o(\lambda r) e^{\lambda^2 t}, \tag{3.13}$$

gdzie:

$$\begin{gathered} U_o(\lambda r) = I_o(\lambda r) + A(\lambda) K_o(\lambda r) \\ A(\lambda) = \frac{(1 - C_1) I_o(\lambda k) - (1 - C_1) I_o(\lambda)}{(1 - C_2) K_o(\lambda) - (1 - C_1) K_o(\lambda k)}, \end{gathered} \tag{3.14}$$

natomiast λ ($\lambda > 0$) są pierwiastkami równania

$$\frac{(1 - k^2)(1 - C_1)}{2} \lambda U_o(\lambda k) + k U_1(\lambda k) - U_1(\lambda) = 0. \tag{3.15}$$

Równanie (3.15) w odróżnieniu od (3.11) ma skończoną liczbę pierwiastków, w tym przypadku liczba pierwiastków zależy od stałych C_1 i C_2 (w szczególnych przypadkach może być ona równa zeru).

Przyjmijmy, że liczba pierwiastków równania (4.15) wynosi N.

Z a, b otrzymaliśmy przeliczalny zbiór rozwiązań równania (3.3).W celu spełnienia warunków początkowych $(3.3)_2$ utworzymy szereg

$$T_2(r,t) = \sum_{n=1}^{N} A_n U_o(\lambda_n r) e^{\lambda_n^2 t} + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n U_o(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 t}, \tag{3.16}$$

gdzie $A_n (n = 1,2,\ldots)$ można znaleźć rozwiązując nieskończony układ równań algebraicznych

$$\begin{gathered} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_k^1 r U_o(\lambda_n r) U_o(\lambda_m r) dr = \\ = \int_k^1 (T_o(r) - T_1(r)) \cdot r U_o(\lambda_m r) dr, \quad m = 1,2,\ldots \end{gathered} \tag{3.17}$$

Reasumując rozważania przeprowadzone w punkcie 3 niniejszej pracy stwierdzamy, że pole temperatur w powłoce określone będzie następującym równaniem

$$T(r,t) = B_o \ln r + B_1 + \sum_{n=1}^{N} A_n U_o(\lambda_n r) e^{\lambda_n^2 t} + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n U_o(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 t} \tag{3.18}$$

Równość (3.18) wynika z (3.1) po uwzględnieniu w tym ostatnim zależności (3.4), (4.16). Współczynniki A_n wyznaczamy z układu równań (3.17) a stałe B_o i B_1 z równań (3.4'). Biorąc kilka początkowych wyrazów szeregu (3.18) możemy określić przybliżony rozkład temperatury i wyznaczyć temperatury ośrodków nagrzewających powłokę

$$U_1(r) = \frac{B_o}{\beta_1 k} + B_o \ln k + B_1 + \sum_{n=1}^{N} A_n \left(U_o(\lambda_n k) + \frac{\lambda_n}{\beta_1} U_1(\lambda_n k)\right) \cdot e^{\lambda_n^2 t} + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \left(U_o(\lambda_n k) - \frac{\lambda_n}{\beta_1} U_1(\lambda_n k)\right) e^{-\lambda_n^2 t},$$

$$U_2(t) = \frac{B_o}{\beta_2} + B_1 + \sum_{n=1}^{N} A_n \left(U_o(\lambda_n) + \frac{\lambda_o}{\beta_2} U_1(\lambda_n)\right) e^{\lambda_n^2 t} + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \left(U_o(\lambda_n) - \frac{\lambda_n}{\beta_2} U_1(\lambda_n)\right) e^{-\lambda_n^2 t}. \tag{3.19}$$

LITERATURA

[1] Borkowski Sz.: Współczesne problemy i kierunki rozwojowe termomechaniki powłok. Sympozjum na temat "Konstrukcje powłokowe - teoria i zastosowanie", Kraków 1974.

[2] Mokrski B.: O warunkach optymalnego nagrzewania powłok sprężystych, Praca magisterska, Pol. Śl., Gliwice 1977.

[3] Parkus H.: Instationäre Wärmespannungen, Wien 1959.

НАИСКОРШИЙ НАГРЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Р е з ю м е

В настоящей работе рассматривается вопрос наискоршего нагрева цилиндрической оболочки при ограничениях на поле напряжений. Апроксимировав функцию допустимых температурный напряжений линейной функцию температуры - получено решение в аналитической форме.

THE FASTEST HEATING OF THE CYLINDRICAL SHELL

S u m m a r y

This paper presents the problems of the fastest heating of the cylindrical shell with the limits on the fiekl of strains. Approximating the function of the admissible strains with the linear function of the themperature - it is obtained the analytic solution.