ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 31 Nr kol. 608

Bolesław MOKRSKI

NAJDOKŁADNIEJSZE NAGRZEWANIE POWŁOKI WALCOWEJ

Streszczenie. W niniejszej pracy rozpatrzono optymalne nagrzewanie powłoki walcowej, w sensie minimalnego odchylenia od zadanej temperatury, a także podano proces iteracyjny rozwiązania zadania.

1. Wstęp

Szczegółowa literatura przedmiotu omówiona jest w pracach [1, 2, 3].

Rozpatrzymy proces najdokładniejszego nagrzewania powłoki walcowej znajdującej się w osiowo-symetrycznym polu temperatur. Problem będzie rozpatrywany w zmiennych bezwymiarowych, por. [3]

$$r \equiv \frac{\bar{r}}{R_z},$$

$$t \equiv \frac{a\bar{t}}{R_z^2}, \qquad (1.1)$$

$$k \equiv \frac{R_w}{R_z},$$

gdzie:

R_z - promień zewnętrzny powłoki,

R_w - promień wewnętrzny powłoki,

$\bar{t}$ - czas nagrzewania.

2. Sformułowanie zadania

Dana jest powłoka walcowa, zajmująca obszar $V = \Gamma \times (-\infty, +\infty)$, gdzie $\Gamma = \{r : k < r < 1\}$. Po stronie zewnętrznej $(r > 1)$ występuje wymiana ciepła z otoczeniem; natomiast od strony wewnętrznej $(r < k)$ powłoka jest nagrzewana polem temperatur $u = u(t)$.

Przy zadanym, początkowym rozkładzie temperatury w powłoce należy - w chwili t_k - uzyskać rozkład najbliższy (w sensie normy) zadanemu; przy tym należy uwzględnić ograniczenia nałożone na pole temperatur otoczenia i pole naprężeń występujące w powłoce. Z powyższego wynika, że dysponujemy następującymi równaniami:

a) równanie przewodnictwa ciepła

$$\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial T(r,t)}{\partial t}, \qquad (r,t)\in \Gamma \times \mathcal{T}$$

$$\mathcal{T} = \left\{ t : 0 < t < t_k \right\} \tag{2.1}$$

b) warunek początkowy

$$T(r,t)\Big|_{t=0} = T_0(r), \qquad r \in \bar{\Gamma} \tag{2.1'}$$

c) warunki brzegowe

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=k} = \beta_1(u(t) - T(k,t)), \quad t \in \bar{\mathcal{T}}$$

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=1} = \beta_2(T_2(t) - T(1,t)), \quad t \in \bar{\mathcal{T}} \tag{2.1''}$$

W rozwiązaniu należy wybrać funkcję sterującą u(t) (temperatura czynnika nagrzewającego po stronie wewnętrznej), dla której funkcjonał

$$I_0(u) = \int_k^1 r(T(r,t_k) - Q(r))^2 dr \tag{2.2}$$

przy następujących ograniczeniach

$$\frac{2}{1-k^2}\int_k^1 rT(r,t)dr - T(k,t) \le \frac{1-\nu}{\alpha_T E}\,\sigma_1(t),$$

$$\frac{2}{1-k^2}\int_k^1 rT(r,t)dr - T(1,t) \le \frac{1-\nu}{\alpha_T E}\,\sigma_2(t), \tag{2.3}$$

$$m \le u(t) \le M,$$

przyjmuje wartość minimalną.

Będziemy dalej zakładać, że

a) $Q(r) \in L^2(k,1)$ - pożądany rozkład pola temperatur,

b) $u(t)$ - funkcja sterująca, przedziałami ciągła,

c) $T_2(t)$ – temperatura otoczenia na zewnątrz powłoki,

d) t_k – zadany czas nagrzewania.

Zadanie powyższe rozwiązywać będziemy metodą kolejnych przybliżeń.

3. Określenie dopuszczalnej wariacji

Przyjmijmy, że wybrano funkcję $u(t)$ spełniającą następujące warunki:

a) $u(t)$ – spełnia $(2.3)_3$

b) rozwiązanie równania (2.1)-(2.1") odpowiadające funkcji $u(t)$ spełnia $(2.3)_{1,2}$.

Dokonamy takiej zmiany sterowania $u(t)$ na sterowanie

$$u_1(t) = u(t) + \delta u(t) \qquad (|\delta u(t)| < \varepsilon)$$

by, spełnione były następujące warunki

$$\begin{aligned} & m \leqslant u(t) + \delta u(t) \leqslant M, && t \in \bar{\mathcal{T}} \\ & I_o(u(t) + \delta u(t)) \leqslant I_o(u(t)), && t \in \bar{\mathcal{T}} \\ & P(u(t) + \delta u(t)) \leqslant 0, && t \in \bar{\mathcal{T}} \\ & R(u(t) + \delta u(t)) \leqslant 0, && t \in \bar{\mathcal{T}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

w których:

$$\begin{aligned} P(u(t)) &= \frac{2}{1-k^2}\int_k^1 rT(r,t)dr - T(k,t) - \frac{1-\nu}{\alpha_T E}\,\sigma_1(t) \\ R(u(t)) &= \frac{2}{1-k^2}\int_k^1 rT(r,t)dr - T(1,t) - \frac{1-\nu}{\alpha_T E}\,\sigma_2(t). \end{aligned} \tag{3.1'}$$

D e f i n i c j a

Funkcję $\delta u(t)$ spełniającą (3.1) nazywać będziemy <u>wariacją dopuszczalną</u>.

Obliczmy wariację funkcjonału (2.2)

$$\delta I_o = 2\int_k^1 r(T(r,t_k) - Q(r))\delta T(r,t_k)dr, \tag{3.2}$$

gdzie w (3.2) $-\delta T(r,t_k)$ jest wariacją - pola temperatur powłoki, otrzymaną wskutek zmiany funkcji sterującej o $\delta u(t)$ $(t \in \mathcal{T})$.

Porównując pole temperatur odpowiadające funkcji sterującej $u(t)+\delta u(t)$ - z polem temperatur dla sterowania $u(t)$, uzyskamy

$$\frac{\partial^2 \delta T(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \delta T(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial \delta T(r,t)}{\partial t} \tag{3.3}$$

$$\delta T(r,0) = 0 \tag{3.3'}$$

$$\left.\frac{\partial \delta T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=k} = \beta_1(\delta u(t) - \delta T(k,t)),$$

$$\left.\frac{\partial \delta T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=1} = -\beta_2\,\delta T(1,t) \tag{3.3 }$$

4. Wprowadzenie równań sprzężonych

Z (3.3) wynika, że

$$\frac{\partial \delta T(r,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \delta T(r,t)}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \delta T(r,t)}{\partial r} = 0, \qquad (r,t)\in \Gamma \times \mathcal{T} \tag{4.1}$$

Mnożąc (4.1) przez funkcję $f(r,t)$ (funkcja ta dalej pełni rolę mnożnika Lagrange'a) i następnie całkując, otrzymamy

$$0 = \int_0^{t_k}\int_k^1 f(r,t)\left(\frac{\partial^2 \delta T}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \delta T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \delta T}{\partial r}\right) r\,dr\,dt \tag{4.2}$$

Całkując (4.2) przez części dostaniemy

$$\int_0^{t_k}\int_k^1 f(r,t)\left(\frac{\partial \delta T}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 \delta T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \delta T}{\partial r}\right)\right) r\,dr\,dt =$$

$$= -\int_0^{t_k}\int_k^1 \delta T\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right) r\,dr\,dt + \int_k^1 r f(r,t_k)\,\delta T(r,t_k)\,dr +$$

$$+\int_0^{t_k} \delta T(1,t)\left(\beta_2 f(1,t) + \left.\frac{\partial f(r,t)}{\partial r}\right|_{r=1}\right)dt + \int_0^{t_k} \beta_1 k f(k,t)\delta u(t)dt +$$

$$-\int_0^{t_k} k\delta T(k,t)\left(\beta_1 f(k,t) + \left.\frac{\partial f(k,t)}{\partial r}\right|_{r=k}\right)dt \tag{4.3}$$

Niech funkcja $f(r,t)$ spełnia następujący układ równań

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = 0 \tag{4.4}$$

$$\left. f(r,t)\right|_{t=t_k} = -2\beta_1 k(T(r,t_k)-Q(r)), \qquad r\in\Gamma \tag{4.4'}$$

$$\beta_1 f(k,t) + \left.\frac{\partial f(r,t)}{\partial r}\right|_{r=k} = 0, \qquad t\in\mathcal{T}$$

$$\beta_2 f(1,t) + \left.\frac{\partial f(r,t)}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \qquad t\in\mathcal{T} \tag{4.4 }$$

Z (4.3) oraz (3.2) otrzymamy

$$\delta I_o = \int_0^{t_k} f(k,t)\delta u(t)dt \tag{4.5}$$

W ten sposób wariację funkcjonału I_o określiliśmy poprzez funkcję $f(r,t)$.

D e f i n i c j a

Układ równań (4.4)-(4.4") nazywać będziemy układem sprzężonym do (2.1)--(2.1").

Podobnie otrzymuje się (w dowolnej chwili $t_1 \in \left[0,t_k\right]$) związki między wariacjami δP i δR, a wariacją $\delta u(t)$, dla $t\in\left[0,t_1\right]$

$$\frac{2}{1-k^2}\int_k^1 r\delta T(r,t_1)dr - \delta T(k,t_1) = \int_0^{t_1}(g(k,t) - g_1(k,t))\delta u(t)dt,$$

(4.6)

$$\frac{2}{1-k^2}\int_k^1 r\delta T(r,t_1)dr - \delta T(1,t_1) = \int_0^{t_1}(g(k,t) - g_2(k,t))\delta u(t)dt$$

Funkcje $g(k,t)$, $g_1(k,t)$, $g_2(k,t)$ są kolejno określone poprzez następujące układy równań:

$$\frac{\partial g(r,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 g(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g(r,t)}{\partial r} = 0, \quad (r,t)\in\Gamma\times(0,t_i), \tag{4.7}$$

$$g(r,t)\Big|_{t=t_i} = \frac{-2\beta_1 k}{1-k^2}, \quad r\in\bar{\Gamma}, \tag{4.7'}$$

$$\begin{aligned} &\beta_2 g(1,t) + \frac{\partial g(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0, \quad t\in[0,t_i] \\ &\beta_1 g(k,t) + \frac{\partial g(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=k} = 0, \quad t\in[0,t_i] \end{aligned} \tag{4.7 }$$

$$\frac{\partial g_1(r,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 g_1(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g_1(r,t)}{\partial r} = 0, \quad (r,t)\in\Gamma\times(0,t_i) \tag{4.8}$$

$$g_1(r,t)\Big|_{t=t_i} = 0, \quad r\in\bar{\Gamma}, \tag{4.8'}$$

$$\begin{aligned} &\beta_2 g_1(1,t) + \frac{\partial g_1(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0, \quad t\in[0,t_i], \\ &\beta_1 g_1(k,t) + \frac{\partial g_1(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=k} = \beta_1\delta(t-t_i), \quad t\in[0,t_i]; \end{aligned} \tag{4.8''}$$

$$\frac{\partial g_2(r,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 g_2(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g_2(r,t)}{\partial r} = 0, \quad (r,t)\in\Gamma\times(0,t_i), \tag{4.9}$$

$$g_2(r,t)\Big|_{t=t_i} = 0, \quad r\in\bar{\Gamma}, \tag{4.9'}$$

$$\beta_2 g_2(1,t) + \frac{\partial g_2(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=1} = -k\beta_1\delta(t-t_i), \quad t\in[0,t_i],$$

$$\beta_1 g_2(k,t) + \frac{\partial g_2(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=k} = 0, \quad t\in[0,t_i], \tag{4.9''}$$

w których $\delta(t-t_i)$ oznacza deltę Diraca.

Fizyczny sens delty Diraca w warunkach (4.8″) i (4.9″) sprowadza się do tego, że w chwili $t = t_i$ przez powierzchnię przepływa strumień ciepła powodujący wzrost temperatury powierzchni powłoki o δT.

5. Konstrukcja procesu iteracyjnego

Załóżmy, że dane jest sterowanie $u_i(t)$ spełniające (2.3). Wśród sterowań dopuszczalnych $u_i(t) + \delta u_i(t)$, tzn. spełniających (3.3), wybieramy to sterowanie, które minimalizuje funkcjonał

$$\delta I_o = I_o(u_i(t) + \delta u_i(t)) - I_o(u_i) \tag{5.1}$$

Niech $\delta \bar{u}_i$ spełnia warunek

$$\delta I_o(\delta \bar{u}_i) = \min_{\substack{u_i+\delta u_i \\ \text{dop.}}} (I_o(u_i(t) + \delta u_i(t)) - I_o(u_i(t))); \tag{5.2}$$

przyjmuje wtedy

$$u_{i+1}(t) = u_i(t) + \delta \bar{u}_i(t) \tag{5.3}$$

Powtarzając powyższe rozumowanie dalej otrzymamy w ten sposób ciąg funkcjonałów $I_o(u_o(t)) \geqslant I_o(u_1(t)) \geqslant I_o(u_2(t)) \dots \geqslant I_o(u_n(t)) \geqslant \dots$. Ciąg $I_o(u_i(t))$ jest monotoniczny i ograniczony z dołu, a więc jest zbieżny do pewnej wartości I_o. Odpowiadające tej wartości sterowania oznaczamy przez $u^*(t)$. Przybliżone metody rozwiązania zadania (2.2)-(2.3) są podane w pracy [2].

Numeryczne problemy odnoszące się do rozwiązania zadania (2.2)-(2.3) będą przedmiotem dalszych prac.

LITERATURA

[1] Borkowski S.: Współczesne problemy i kierunki rozwojowe termomechaniki powłok. Sympozjum na temat "Konstrukcje powłokowe - teoria i zastosowanie", Kraków 1974.

[2] Mokrski B.: O warunkach optymalnego nagrzewania powłok sprężystych, Praca magisterska, Pol. Śl., Gliwice 1977.

[3] БУТКОВСКИЙ Я.Г.: Теория оптимального управления системами с распреденными параметрами, Москва 1965.

НАИЛУЧШИЙ НАГРЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Р е з ю м е

В настоящей работе рассматривается оптимальный нагрев цилиндрической оболочки, в смысле минимального отклонения от заданой температуры,а также приведено алгоритм решения задачи.

THE MOST EXACT HEATING OF CYLINDRICAL SHELL

S u m m a r y

The paper presents the optimal heating of the cylindrical shell,in the meaning of the minimal deviation from the themperature which was given. Here is showed also the numerical method of the obtaining the solution.