

Hieronim LESZCZYŃSKI

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE PROBLEMU BRZEGOWEGO NIELINIOWO SPRĘŻYSTEJ,
KOŁOWEJ POWŁOKI WALCOWEJ W STANIE OSIOWO-SYMETRYCZNEGO OBCIĄŻENIA

Streszczenie. W pracy podano równanie różniczkowe ugięcia kołowej powłoki walcowej z materiału nieliniowo sprężystego z warunkami brzegowymi sztywnego utwierdzenia. Przedstawiono algorytm numerycznego wyznaczenia ugięć powłoki.

Wstęp

Problem numerycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych teorii powłok z nieliniowością fizyczną jest podejmowany przez wielu autorów.

W pracy [2] przedstawiono analizę stanu naprężenia walcowej powłoki średniej długości z materiału nieliniowo sprężystego stosując metodę kolejnych obciążeń. Autorzy pracy [3] podają równanie różniczkowe dużych ugięć powłok małowyniosłych z warunkami brzegowymi sztywnego utwierdzenia. Do numerycznego rozwiązania zadania stosują metodę różnic skończonych.

W pracy niniejszej przedstawiono równanie różniczkowe opisujące ugięcie kołowej powłoki walcowej z materiału fizycznie nieliniowego, znajdującej się w stanie osiowo symetrycznego obciążenia o brzegach sztywnie utwierdzonych. Podano algorytm i wyniki numerycznego rozwiązania zagadnienia na maszynie cyfrowej ODRA 1204, stosując metodę sprzężstych rozwiązań.

1. Równanie różniczkowe

W pracy [1] podano wariacyjne równanie (przemieszczeniowe) nieliniowej fizycznej teorii powłok małowyniosłych. Zakładając w tym równaniu zerowanie się przemieszczeń u, v wraz z ich pochodnymi częstkowymi, zerowanie się pochodnych funkcji względem zmiennej y oraz przyjmując $R_1 = \infty$, $R_2 = r$, otrzymujemy po wykonaniu operacji wariacji, całkowania przez częścią, równanie postaci

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(A_1 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{d^2}{dx^2} \left(A_2 \frac{w}{r} \right) - \frac{A_2}{r} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{A_3}{r^2} w = p, \quad (1.1)$$

gdzie

$$A_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [3K\nu_1 \psi + 2(1-\nu_1)G\chi] z^2 dz,$$

$$A_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [3K\psi - 2G\chi] \nu_1 z dz, \quad (1.2)$$

$$A_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [3K\nu_1 \psi + 2(1-\nu_1)G\chi] dz;$$

funkcje ψ , χ oznaczają kolejno: funkcję wydłużenia względnego i funkcję odkształcenia postaciowego; K , G są stałymi określającymi kolejno moduł odkształcenia objętościowego i moduł odkształcenia postaciowego

$$\nu_1 = \frac{1}{3} \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu},$$

ν - stała Poissona; r - promień przekroju powłoki, h jest grubością powłoki, w - ugięcie w kierunku normalnym do powierzchni środkowej powłoki, p - intensywność obciążenia zewnętrznego.

Funkcje ψ i χ przyjmujemy postaci

$$\psi = 1 + a\varepsilon^2 = 1 + \bar{\psi}$$

$$\chi = 1 + b\varepsilon^2 = 1 + \bar{\chi} \quad (1.3)$$

gdzie:

- ε - oznacza średnią wartość wydłużeń względnych,
- a - jest intensywnością odkształceń,
- a, b - są stałymi wyznaczonymi doświadczalnie.

Podstawiając (1.3) do równania (1.1) i wydzielaając w nim część liniową otrzymujemy równanie

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{12}{h^2 r^2} w = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} \left(p - \frac{1}{\nu} \bar{\psi}_1 + \frac{d^2}{dx^2} \bar{\psi}_2 \right), \quad (1.4)$$

w którym

$$\Phi_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ 3K [\epsilon(z)] \epsilon(z) + 2G\bar{\Psi}[\epsilon(z)] \epsilon_y^{(z)} - \epsilon(z) \right\} dz$$

$$\Phi_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ 3K\bar{\Psi}[\epsilon(z)] \epsilon(z) + 2G\bar{\Psi}[\epsilon(z)] \epsilon_x^{(z)} - \epsilon(z) \right\} dz$$
(1.5)

przy czym

$$\epsilon(z) = \nu_1 (\epsilon_x^{(z)} + \epsilon_y^{(z)}),$$

$$\epsilon(z) = \nu_2 (\epsilon_x^{(z)} + \epsilon_y^{(z)})^2 - 3\epsilon_x^{(z)} \epsilon_y^{(z)} + \frac{3}{4} (\tau_{xy}^{(z)})^2, \quad \nu_2 = \frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}$$

$$\epsilon_x^{(z)} = \epsilon_x + z\alpha_1,$$

$$\epsilon_y^{(z)} = \epsilon_y + z\alpha_2,$$

$$\tau_{xy}^{(z)} = \tau_{xy} + 2z\tau;$$
(1.6)

$\epsilon_x, \epsilon_y, \tau_{xy}, \alpha_1, \alpha_2, \tau$ są parametrami odkształcenia.

Wobec przyjętych na początku założeń mamy (por. [4])

$$\epsilon_x = \alpha_2 = \tau_{xy} = \tau = 0,$$

$$\epsilon_y = \frac{w}{r},$$

$$\alpha_1 = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$
(1.7)

Wielkości (1.5) możemy teraz przedstawić w postaci

$$\Phi_1 = \frac{B_1 h}{r} w^3 + \frac{B_2 h^3}{r} w \frac{d^2 w}{dx^2}^2$$

$$\Phi_2 = \frac{-B_2 h^3}{r} w \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{B_1 h^5}{80} \frac{d^2 w}{dx^2}^3$$
(1.8)

gdzie

$$B_1 = 3Kv_1^3 a + 2Gb(1-v_1)v_2$$

$$B_2 = \frac{3}{4} K v_1^3 + \frac{1}{6} G b (3v_1 - 2v_1 v_2 + v_2^2)$$

Równanie (1.4), w którym ϕ_1, ϕ_2 są postaci (1.8), opisuje - wraz z warunkami brzegowymi, postaci:

$$w|_{x=0} = 0, \quad \frac{dw}{dx}|_{x=0} = 0, \quad (1.9)$$

$$w|_{x=1} = 0, \quad \frac{dw}{dx}|_{x=1} = 0,$$

- ugięcie powłoki kołowo walcowej znajdującej się w stanie osiowo symetrycznego obciążenia za sztywnym utwierdzeniem na brzegach $x = 0$ i $x = 1$ (l - długość powłoki).

2. Numeryczne rozwiązanie zadania

Do rozwiązania nieliniowego zadania opisanego równaniem (1.4) z uwzględnieniem (1.8) i warunkami brzegowymi (1.9) zastosujemy następujący proces iteracyjny oparty na metodzie rozwiązań sprzężystych

$$\frac{d^4 w^{(n)}}{dx^4} + \frac{12}{h^2 r^2} w^{(n)} = \frac{12(1-v^2)}{Eh^3} \left(p - \frac{1}{r} \phi_1^{(n-1)} + \frac{d^2 \phi_2^{(n-1)}}{dx^2} \right), \quad (2.1)$$

$$w^{(n)}(0) = w^{(n)}(1) = 0,$$

$$\frac{dw^{(n)}}{dx}(0) = \frac{dw^{(n)}}{dx}(1) = 0. \quad (2.2)$$

Dla $n = 1$ $\phi_1^{(0)} = \phi_2^{(0)} = 0$ równanie (2.1) i warunki brzegowe (2.2) są postaci

$$\frac{d^4 w^{(1)}}{dx^4} + \frac{12}{h^2 r^2} w^{(1)} = \frac{12(1-v^2)}{Eh^3} p, \quad (2.3)$$

$$w^{(1)}(0) = w^{(1)}(1) = 0$$

$$\frac{dw^{(1)}}{dx}(0) = \frac{dw^{(1)}}{dx}(1) = 0. \quad (2.4)$$

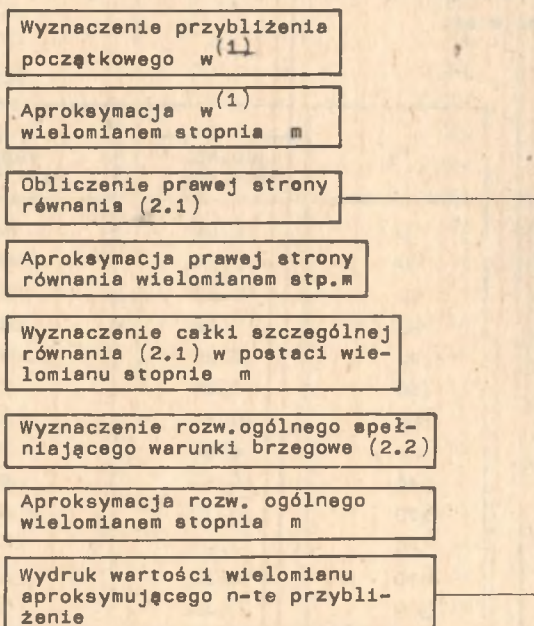
Równania (2.3), (2.4) opisują ugięcie rozważanej powłoki w liniowej fizycznie teorii powłok. Rozwiązanie równania (2.3) z warunkami brzegowymi (2.4) i uwzględnieniem efektu brzegowego stanowi pierwsze przybliżenie rozwiązania rozważanego zadania. Jest ono postaci

$$w^{(1)} = \frac{(1-\nu^2)r^2 D}{Eh} \left\{ 1 - e^{-\lambda x} [\cos \lambda x + \sin \lambda x] - e^{-\lambda(1-x)} [\cos \lambda(1-x) + \sin \lambda(1-x)] \right\} \quad (2.5)$$

gdzie

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2 r^2}}$$

Kolejne przybliżenie szukanego rozwiązania zadania wyznaczamy wg następującego schematu blokowego



W obliczeniach zastosowano wielomianową aproksymację jednostajną.

3. Wyniki obliczeń

Obliczenie wykonano dla powłok o wymiarach: promień przekroju $r = 0,75\text{m}$, grubość $h = 0,003\text{ m}$ i długościach $l = 0,5\text{ m}$ w jednym przypadku oraz $l = 1,5\text{ m}$ w drugim przypadku.

Przyjęto następujące dane materiałowe:

moduł odkształcenia postaciowego $G = 0,477 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$,

moduł odkształcenia objętościowego $K = 1,35 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$,

moduł wydłużenia sprężystego $E = 1,24 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$,

współczynniki rozwinięcia funkcji ψ, χ w szereg odpowiednio $a = -38 \cdot 10^6$,
 $b = -0,04 \cdot 10^6$ oraz liczba Poissona $\nu = 0,3$.

Powłokę obciążono siłami prostopadłymi do powierzchni środkowej, skierowanymi od wewnątrz i rozłożonymi w sposób ciągły o wartościach $p = 1,8 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$, $1,9 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$, $2 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$.

Stwierdzono, że ugięcia powłoki z fizyczną nieliniowością różniły się o 13%-25% (w zależności od intensywności obciążenia) w stosunku do ugięć w przypadku liniowym.

Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej ODRA 1204. W tabelicy 1 przedstawione są wyniki obliczeń dla powłoki o długości $l = 1,5 \text{ m}$, wielkości obciążenia $p = 2 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$, grubości powłoki $h = 0,003 \text{ m}$. W tabelicy tej x_1 oznacza współrzędną punktu, w - wielkość ugięcia w tym punkcie wyrażone w mm.

Tabela 1

x_1	w	
	ośrodek liniowy	ośrodek nieliniowy
0	0,00	0,00
40	0,14	0,16
60	0,22	0,24
80	0,26	0,30
120	0,28	0,34
150	0,28	0,34
180	0,27	0,34
210	0,27	0,33
240	0,27	0,33
270	0,27	0,32
300	0,27	0,32
330	0,27	0,31
360	0,27	0,31
390	0,27	0,31
420	0,27	0,31
450	0,27	0,31
480	0,27	0,31
510	0,27	0,31
540	0,27	0,31
570	0,27	0,32

cd. tablicy 1

x_i	w	
	ośrodek liniowy	ośrodek nieliniowy
600	0,27	0,33
620	0,27	0,33
630	0,27	0,33
640	0,27	0,33
650	0,27	0,33
660	0,27	0,34
670	0,27	0,34
680	0,27	0,34
690	0,27	0,34
700	0,27	0,34
710	0,27	0,34
720	0,27	0,34
730	0,27	0,34
740	0,27	0,34
750	0,27	0,34
760	0,27	0,34
780	0,27	0,34
790	0,27	0,34
800	0,27	0,34
810	0,27	0,34
830	0,27	0,34
860	0,27	0,34
890	0,27	0,33
920	0,27	0,33
950	0,27	0,31
980	0,27	0,31
1010	0,27	0,31
1040	0,27	0,31
1100	0,27	0,31
1170	0,27	0,31
1230	0,27	0,32
1290	0,27	0,34
1320	0,27	0,33
1380	0,28	0,34
1400	0,28	0,33
1420	0,26	0,30
1440	0,22	0,24
1460	0,14	0,16
1480	0,05	0,05
1500	0,00	0,00

LITERATURA

- [1] Leszczyński H.: Równanie wariacyjne nieliniowej fizycznie teorii powłok małowyniosłych. ZN Pol. Śl. (w druku).
- [2] Owczinnikow G.: Naprężenie i stan naprężenia cylindrycznej powłoki średniej długości z nieliniowo-upręgowo materiału, Izv. wuzow. Stroitelstwo i architektura, 1977, Nr 3.
- [3] Diędow N.I., Korniezin M.S., Stoljarow N.: Izgib priamougolnych w płacie giętkich płyt i łagodnych powłok z nieliniowo-upręgowo materiału. Teorija obłoczok i płyt 1975, Nr 10.
- [4] Filin A.P.: Elementy teorii obłoczok, 1962.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ,
КРУГОВО-ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ
СОСТОЯНИИ НАГРУЖЕНИЯ

Р е з ю м е

В работе представлено дифференциальное уравнение прогиба кругово-цилиндрической оболочки из нелинейно-упругого материала с краевыми условиями жесткого закрепления. Указано алгоритм численного определения прогиба оболочки.

A NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS OF
NONLINEAR ELASTIC OF CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS IN
AXISYMMETRIC STRESS OF LOAD

S u m m a r y

In the paper the differential equation of the deflection of cylindrical shells with nonlinear elasticity has been given.

Using the stiff fixing of shells a numerical algorithm has been derived for the designation of deflections of shells.