ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 31 Nr kol. 608

Hieronim LESZCZYŃSKI

RÓWNANIE WARIACYJNE NIELINIOWEJ FIZYCZNIE TEORII POWŁOK MAŁOWYNIOSŁYCH

Streszczenie. W pracy podano równania określające wielkości wewnętrzne i przemieszczeniowe oraz równanie wariacyjne nieliniowej fizycznie teorii (ośrodek Kauderera) powłok małowyniosłych, umożliwiające rozwiązywanie zagadnień brzegowych tej teorii.

Wstęp

Problematyka dotycząca nieliniowej fizycznie teorii powłok stała się w ostatnim okresie treścią wielu publikacji. Niektóre problemy teorii powłok oraz zagadnień fizycznie nieliniowych omówiono w pracach [1], [1a]. Interesujące ujęcie tej problematyki przedstawione jest w [2], gdzie autor podał wariacyjne równanie typu mieszanego - określone poprzez ugięcie i funkcję naprężeń. Równanie to podane jest dla ośrodka, którego związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami mają postać liniową, ale jego niejednorodność zależy nieliniowo od stanu odkształcenia.

W niniejszej pracy wykorzystano w pewnym stopniu podejście stosowane w [2] na przypadek powłok małowyniosłych, ale których fizycznym modelem jest ośrodek Kauderera. Ponadto równanie wariacyjne sformułowano w odróżnieniu od [2] w przemieszczeniach.

1. Podstawowe związki; założenia

W pracy rozpatrzymy powłokę małowyniosłą (p. [5], [6]), której powierzchnia środkowa w prostokątnym układzie współrzędnych, określona jest równaniem

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D, \tag{1.1}$$

gdzie D oznacza prostokątny obszar będący rzutem ortogonalnym powierzchni środkowej powłoki na płaszczyznę $Z = 0$.

Przyjmujemy, że spełniona jest hipoteza Kirchhoffa, równoważna warunkom

$$\sigma_3 \cong 0, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} \cong 0, \tag{1.2}$$

gdzie σ_3 oznacza naprężenie na płaszczyźnie równoległej do powierzchni środkowej powłoki a ε_{13}, ε_{23} oznaczają kąty odkształcenia postaciowego odpowiadające naprężeniom stycznym τ_{13}, τ_{23} działającym na płaszczyznach prostopadłych do powierzchni środkowej wydzielonego elementu powłoki. Zakładamy dalej, że można pominąć wpływ przemieszczeń u, v na parametry zmiany krzywizn oraz pierwsze pochodne przemieszczeń z czynnikiem $\frac{1}{R_1 \cdot R_2}$ - jako wielkości małe w porównaniu z wyższymi pochodnymi.

Przyjmujemy ponadto, że ośrodek jest fizycznie nieliniowy (ośrodek Kauderera), dla którego równania konstytutywne mają postać

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= 3K\phi(\varepsilon)\varepsilon + 2G\chi(e^2)(\varepsilon_1 - \varepsilon) - 3K\Theta\alpha_T,\\
\sigma_2 &= 3K\phi(\varepsilon)\varepsilon + 2G\chi(e^2)(\varepsilon_2 - \varepsilon) - 3K\Theta\alpha_T,\\
\sigma_3 &= 3K\phi(\varepsilon)\varepsilon + 2G\chi(e^2)(\varepsilon_3 - \varepsilon)\\
\sigma_{12} &= G\chi(e^2)\varepsilon_{12},
\end{aligned}
\qquad (1.3)
$$

gdzie

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),\ e^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 + \frac{3}{4}(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2);$$

gdzie ε oznaczono średnią wartość wydłużeń względnych a przez e - intensywność odkształcenia. Funkcje $\phi(\varepsilon)$ i $\chi(e^2)$ nazywamy kolejno, funkcją wydłużenia względnego i funkcją odkształcenia postaciowego. K, G są stałymi określającymi kolejno moduł odkształcenia objętościowego i moduł odkształcenia postaciowego; Θ jest funkcją (liniową względem z) określającą pole temperatur, α_T - współczynnik rozszerzalności liniowej.

Uwzględniając warunek $\sigma_3 \cong 0$, otrzymujemy

$$\sigma_3 = 3K\phi(\varepsilon)\varepsilon + 2G\chi(e^2)(\varepsilon_3 - \varepsilon) = 3K\varepsilon + 2G(\varepsilon_3 - \varepsilon) = 0, \qquad (1.5)$$

stąd

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \qquad (1.6)$$

W (1.5) przyjęto ponadto $\phi(\varepsilon) = \chi(e^2) = 1$, co wynika z założenia $\sigma_3 = 0$;

Podstawiając (1.6) do (1.4) i uwzględniając (1.2) uzyskujemy

$$\mathcal{E} = \vartheta_1(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)$$

$$e^2 = \frac{1 - \vartheta + \vartheta^2}{(1-\vartheta)^2}(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2 - 3\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + \frac{3}{4}\mathcal{E}_{12}^2, \tag{1.7}$$

gdzie

$$\vartheta_1 = \frac{1}{3}\frac{1 - 2\vartheta}{1 - \vartheta}.$$

Występujące w (1.3) funkcje $\psi(\mathcal{E})$ i $\chi(e^2)$ przedstawia się najczęściej w postaci zbieżnych szeregów potęgowych

$$\begin{aligned} \psi(\mathcal{E}) &= 1 + a_1\mathcal{E} + a_2\mathcal{E}^2 + \ldots \\ \chi(e^2) &= 1 + b_2e^2 + b_4e^4 + \ldots \end{aligned} \tag{1.8}$$

Współczynniki szeregów (1.8) oraz stałe K, G ustala się na drodze doświadczalnej. Pomiędzy odkształceniami $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_{12}$ powierzchni środkowej powłoki i odkształceniami $\mathcal{E}_1^{(z)}$, $\mathcal{E}_2^{(z)}$, $\mathcal{E}_{12}^{(z)}$ powierzchni równoległej (tj. powierzchni odległej od powierzchni środkowej o z, przy czym $-\frac{h}{2} \leqslant z \leqslant \frac{h}{2}$, h - grubość powłoki) zachodzą następujące związki (por. [5], [6]).

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^{(z)} &= \mathcal{E}_1 + z\varkappa_1, \\ \mathcal{E}_2^{(z)} &= \mathcal{E}_2 + z\varkappa_2, \\ \mathcal{E}_{12}^{(z)} &= \mathcal{E}_{12} + 2z\varkappa_{12}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

gdzie $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ oznaczają kolejno krzywizny i skręcenie powierzchni środkowej powłoki.

2. Określenie wielkości wewnętrznych

Stosując (1.3) dla dowolnego punktu powłoki odległego o z od jej powierzchni środkowej otrzymujemy

$$\sigma_1^{(z)} = 3K\psi(\mathcal{E}^{(z)})\mathcal{E}^{(z)} + 2G\chi\left[(e^{(z)})^2\right](\mathcal{E}_1^{(z)} - \mathcal{E}^{(z)}) - 3K\alpha_T, \tag{2.1}$$

$$\sigma_2^{(z)} = 3K\psi(\varepsilon^{(z)})\varepsilon^{(z)} + 2G\chi\left[(e^{(z)})^2\right](\varepsilon_2^{(z)} - \varepsilon^{(z)}) - 3K\Theta\alpha_T,$$

$$\sigma_{12}^{(z)} = G\chi\left[(e^{(z)})^2\right]\varepsilon_{12}^{(z)}. \tag{2.1}$$

Podstawiając (1.9) do (2.1) i uwzględniając (1.7) otrzymujemy po przekształceniu

$$\sigma_1^{(z)} = \left[3K\nu_1\psi(\varepsilon^{(z)}) + 2G(1-\nu_1)\chi((e^{(z)})^2)\right]\left[\varepsilon_1 + \nu_2\varepsilon_2 + z(\varkappa_1+\nu_2\varkappa_2)\right]$$

$$\sigma_2^{(z)} = \left[3K\nu_1\psi(\varepsilon^{(z)}) + 2G(1-\nu_1)\chi((e^{(z)})^2\right]\left[\varepsilon_2 + \nu_2\varepsilon_1 + z(\varkappa_2+\nu_2\varkappa_1)\right],$$

$$\sigma_{12}^{(z)} = G\chi\left[(e^{(z)})^2\right](\varepsilon_{12} + 2z\varkappa_{12}), \tag{2.2}$$

gdzie

$$\nu_2 = \frac{(3K\psi - 2G\chi)\nu_1}{3K\nu_1\psi + 2G(1-\nu_1)\chi}.$$

Całkując kolejno $\sigma_1^{(z)}$, $\sigma_2^{(z)}$, $\sigma_{12}^{(z)}$ względem z w przedziale $-\frac{h}{2} \leqslant z \leqslant \frac{h}{2}$ a następnie $\sigma_1^{(z)} \cdot z$, $\sigma_2^{(z)} \cdot z$, $\sigma_{12}^{(z)} \cdot z$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} T_1 &= A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + B_1\varkappa_1 + B_2\varkappa_2 - T_\alpha \\ T_2 &= A_2\varepsilon_1 + A_1\varepsilon_2 + B_2\varkappa_1 + B_1\varkappa_2 - T_\alpha \\ T_{12} &= C_1\varepsilon_{12} + C_2\varkappa_{12} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= B_1\varepsilon_1 + B_2\varepsilon_2 + D_1\varkappa_1 + D_2\varkappa_2 - M_\alpha, \\ M_2 &= B_2\varepsilon_1 + B_1\varepsilon_2 + D_2\varkappa_1 + D_1\varkappa_2 - M_\alpha, \\ M_{12} &= \frac{1}{2}C_2\varepsilon_{12} + C_3\varkappa_{12}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

gdzie

$$A_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[3K\vartheta_1 \phi + 2(1-\vartheta_1)G\chi\right]dz,$$

$$A_2 = \vartheta_1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[3K\phi - 2G\chi\right]dz,$$

$$B_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[3K\vartheta_1 \phi + 2(1-\vartheta_1)G\chi\right]zdz,$$

$$B_2 = \vartheta_1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[3K\phi - 2G\chi\right]zdz,$$

$$C_1 = G\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \chi\, dz, \quad C_2 = 2G\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \chi\, zdz, \quad C_3 = 2G\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \chi\, z^2 dz,$$

$$T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 3K\Theta\alpha_T dz, \quad M_{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 3K\Theta\alpha_T zdz,$$

$$D_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[3K\vartheta_1 \phi + 2(1-\vartheta_1)G\chi\right]z^2dz,$$

$$D_2 = \vartheta_1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[3K\phi - 2G\chi\right]z^2dz.$$

Łatwo sprawdzić, że dla $\phi = \chi = 1$ zachodzą równości

$$A_1 = \frac{Eh}{1-\vartheta^2}, \quad A_2 = A_1\vartheta, \quad C_1 = \frac{Eh}{2(1+\vartheta)}, \quad C_3 = \frac{Eh^3}{12(1+\vartheta)},$$

$$B_1 = B_2 = C_2 = 0,$$

$$D_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\vartheta^2)}, \quad D_2 = D_1\vartheta.$$

Wielkości wewnętrzne przyjmują wówczas postać znaną w liniowej teorii powłok, a mianowicie

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1),$$

$$T_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12},$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2), \quad M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\varkappa_2 + \nu\varkappa_1),$$

$$M_{12} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\varkappa_{12}.$$

3. Równanie wariacyjne

Zgodnie z zasadą prac wirtualnych, wariacja całkowitej energii δW powłoki odkształcanej w stanie równowagi jest równa zero.

$$\delta W = \delta V - \delta U = 0 \tag{3.1}$$

gdzie

$$\delta V = \delta\iint_D \left[T_1\delta\varepsilon_1 + T_2\delta\varepsilon_2 + T_{12}\delta\varepsilon_{12} + M_1\delta\varkappa_1 + M_2\delta\varkappa_2 + 2M_{12}\delta\varkappa_{12}\right]dxdy, \tag{3.2}$$

$$\delta U = \delta\iint_D \left[Xu + Yv + Zw\right]dxdy + \delta\int_{\partial D}\left[\hat{X}u + \hat{Y}v + p(s)w - m(s)\frac{\partial w}{\partial n}\right]ds \tag{3.3}$$

$\hat{X}, \hat{Y}, Z$ są współrzędnymi obciążenia powierzchniowego; X, Y; $p(s)$, $m(s)$ oznaczają kolejno siły w kierunku osi x, y, obciążenia brzegowe w kierunku osi x, y, obciążenia brzegowe w kierunku osi z (siła uogólniona Kirchhoffa) oraz moment zginający.

Obciążenia te działają na brzegu ∂D obszaru D; n jest normalną zewnętrzną do brzegu.

Podstawiając (2.3), (2.4) do (3.2) a następnie wykorzystując zależności pomiędzy odkształceniami powierzchni środkowej powłoki a przemieszczeniami u, v, w (por. [6]).

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}, \quad \varkappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2}, \qquad \varkappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \varkappa_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{3.4}$$

Otrzymujemy następującą postać wariacji δV

$$\begin{aligned}
\delta V = \iint\limits_D \Big\{ & A_1\delta\Big[\frac{1}{2}(U_x^2 + V_y^2) + \frac{1}{R_1}U_xW + \frac{1}{R_2}V_yW + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\Big)W^2\Big] + \\
& + A_2\delta\Big[U_xV_y + \frac{1}{R_2}U_xW + \frac{1}{R_1}V_yW + \frac{1}{R_1R_2}W^2\Big] - \\
& - B_1\delta\Big[W_{xx}U_x + W_{yy}V_y + \frac{1}{R_1}W_{xx}W + \frac{1}{R_2}W_{yy}W\Big] - \\
& - B_2\delta\Big[W_{yy}U_x + W_{xx}V_y + \frac{1}{R_1}W_{yy}W + \frac{1}{R_2}W_{xx}W\Big] + \\
& + C_1\delta\Big[\frac{1}{2}(U_y^2 + V_x^2) + U_yV_x\Big] - C_2\delta\Big[U_yW_{xy} + V_xW_{xy}\Big] + C_3\delta(W_{xy}^2) + \\
& + D_1\delta\Big[\frac{1}{2}(W_{xx}^2 + W_{yy}^2)\Big] + D_2\delta(W_{xx}\cdot W_{yy}) - T_\alpha\delta\Big[U_x + V_y + \Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big)W\Big] + \\
& + M_\alpha\delta\Big[W_{xx} + W_{yy}\Big]\Big\}\, dxdy
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Podstawiając (3.5) i (3.3) do (3.1) dostajemy równanie wariacyjne postaci

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \Big\{ & A_1\delta\Big[\frac{1}{2}(U_x^2 + V_y^2) + \frac{1}{R_1}U_xW + \frac{1}{R_2}V_yW + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\Big)W^2\Big] + \\
& + A_2\delta\Big[U_xV_y + \frac{1}{R_2}U_xW + \frac{1}{R_1}V_yW + \frac{1}{R_1R_2}W^2\Big] - \\
& - B_1\delta\Big[W_{xx}U_x + W_{yy}V_y + \frac{1}{R_1}W_{xx}W + \frac{1}{R_2}W_{yy}W\Big] - \\
& - B_2\delta\Big[W_{yy}U_x + W_{xx}V_y + \frac{1}{R_1}W_{yy}W + \frac{1}{R_2}W_{xx}W\Big] + \\
& + C_1\delta\Big[\frac{1}{2}(U_y^2 + V_x^2) + U_yV_x\Big] - C_2\delta\Big[U_yW_{xy} + V_xW_{xy} + C_3\,(W_{xy}^2) +
\end{aligned}$$

$$+ D_1\delta\left[\frac{1}{2}(W^2_{xx} + W^2_{yy})\right] + D_2\delta(W_{xx}\cdot W_{yy}) - T_\alpha\delta\left[U_x + V_y + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)W\right] +$$

$$+ M_\alpha\delta\left[W_{xx} + W_{yy}\right]\Bigg\} dxdy - \delta\iint_D\left[Xu + Yv + Zw\right]dxdy -$$

$$-\delta\int_{\partial D}\left[\hat{X}u + \hat{Y}v + p.\,w - m\frac{\partial w}{\partial n}\right]ds = 0 \tag{3.6}$$

Równanie wariacyjne (3.6) można wykorzystać bezpośrednio do rozwiązywania fizycznie nieliniowych zadań teorii sprężystości stosując, np. metodę Ritza. Zaletę tego równania jest to, że nie wymaga się w nim różniczkowania współczynników zależnych od fizycznych właściwości materiału (por. [2]).

Z równania (3.6) można również uzyskać odpowiadające mu równanie różniczkowe i warunki brzegowe.

W tym celu należy wykonać występujące w równaniu operacje wariacji i stosować wzory na całkowanie przez części.

Problem ten będzie przedmiotem rozważań następnych prac.

LITERATURA

[1] Borkowski S.: Współczesne problemy i kierunki rozwojowe termomechaniki powłok, Sympozjum "Konstrukcje powłokowe - teoria i zastosowanie", Kraków 1974, 35 s.

[1a] Borkowski S.: Przegląd problematyki badawczej Instytutu Mechaniki Teoretycznej Wydz. Mat.-Fiz. Pol. Śl. w Gliwicach (Mechanika ośrodków ciągłych) w zb. prac: Mech. Teor. i Stosow. w Pol. Śl., wyd. PTMTS, Gliwice 1976, 27-36.

[2] Kantor B.J.: Nieliniejnyje zadaczi tieorii nieodnorodnych połcgich obołoczek, Kijew 1971.

[3] Leszczyński H.: Numeryczne rozwiązanie problemów brzegowych małowyniosłych powłok sprężystych, ZN Pol. Śl., Mat.-Fiz., 28,1977, 71-81.

[4] Leszczyński H.: Wielkości wewnętrzne w małowyniosłych powłokach fizykalnie nieliniowych, ZN Pol. Śl., Mat,-Fiz. (w druku).

[5] Nowoziłow W.W.: Teoria tonkich obołoczek, 1962.

[6] Filin A.P.: Elementy teorii obołoczek, Leningrad 1975.

[7] Kauderer H.: Nichtlineare Mechanik, Springer Verlag 1958.

[8] Guz A.N., Ługowoj P.Z., Szulga N.A.: Koniczieskije obołoczki, osłabliennyje otwierstwiami, Kijów 1976.

[9] Aksełrad E.Ł.: Gibkije obołoczki, Moskwa 1976.

[10] Diedow N.I., Korniszyn M.S., Stoljarow N.N.: Izgib Priamougodnych w płanie gibkich płastin i połogich obołoczek iz nieliniejno uprugowo szimajemogo materiała, Teorija obołoczek i płastin 1975 Nr 10.

ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ТЕОРИИ
ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Р е з ю м е

В статье определено соотношения между усилиями, моментами и деформациями срединной поверхности физически нелинейной (по Каудереру) теории пологих сболочек. Кроме того получено (в перемещениях) вариационное уравнение, которое можно использовать для решения задач этой теории.

VARIATIONAL EQUATION OF THE THEORY
OF SHALLOW SHELLS WITH NONLINEAR ELASTICITY

S u m m a r y

The paper presents a equations, which determines the internal quantites.

Besides that the variational equation of the theory of shallow shells with nonlinear elasticity (Kauderer medium) has been formulated, which is apply to of boundary value problems solving this theory.