ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 31 Nr kol. 609

Hieronim LESZCZYŃSKI

WIELKOŚCI WEWNĘTRZNE W MAŁOWYNIOSŁYCH POWŁOKACH FIZYKALNIE NIELINIOWYCH

Streszczenie. W pracy określono energię potencjalną powłok małowyniosłych dla ośrodka Kauderera. Wykorzystując w stronie geometrycznej liniowe związki i hipotezę elementu normalnego, a następnie wyznaczając wariację podstawowego funkcjonału - uzyskano równania określające wielkości wewnętrzne.

Wstęp

Zagadnienia teorii powłok dla ośrodków fizykalnie nieliniowych zaczynają być przedmiotem intensywnych badań. Zestawienie problemów i przegląd literatury przedmiotu znajduje się w monografii Filina [6], a także w pracy zbiorowej [7]; niektóre problemy teorii powłok oraz problematyki fizykalnie nieliniowej omówiono w pracach [1], [1a].

Badanie niniejsze stanowi kontynuację problemów, które w zakresie liniowej teorii rozpatrywane były w pracach [2], [3].

W niniejszej pracy zajmujemy się teorią powłok małowyniosłych, której modelem fizycznym jest ośrodek Kauderera. Mając na uwadze równoważność minimalizacyjnych twierdzeń wariacyjnych i problemów brzegowych tej teorii, wychodzimy od ujęcia wariacyjnego, z którego uzyskujemy wielkości wewnętrzne występujące w powłoce.

1. Energia potencjalna odkształcenia małowymiosłych powłok fizykalnie nieliniowych

W mechanice ośrodków fizykalnie nieliniowych, funkcja zwana właściwą energią odkształcenia jest określona równaniem (por. [4])

$$\Phi(\varepsilon_{ij}) = 9K\int_0^{\varepsilon}\varepsilon\phi(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{4}{3}G\int_0^{e} e\chi(e^2)de, \tag{1.1}$$

gdzie

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$e^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_x\varepsilon_z - \varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{3}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2) \tag{1.2}$$

Przez ε oznaczono średnią wartość wydłużeń względnych, a przez e - intensywność odkształcenia.
Funkcje $\psi(\varepsilon)$ i $\chi(e^2)$, nazywamy kolejno funkcją wydłużenia względnego i funkcją odkształcenia postaciowego.

Stosowana tutaj nieco odmienna postać równania (1.1) niż w [4] wynika z faktu, że $\Phi(\varepsilon_{ij})$ jest określone przez intensywność odkształcenia e i $e^2 = \frac{9}{8}\psi_0^2$, gdzie ψ_0 jest intensywnością odkształceń postaciowych stosowaną w pracy H. Kauderera.

Energia potencjalna odkształcenia V ośrodka zajmującego obszar $\mathcal{V}$ określona jest przez

$$V = \iiint_{\mathcal{V}} \Phi(\varepsilon_{ij})\, d\mathcal{V} \tag{1.3}$$

Rozważmy obecnie powłokę małowyniosłą (p. [5]), której powierzchnia środkowa w prostokątnym układzie współrzędnych, określona jest równaniem

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D; \tag{1.4}$$

W (1.4) przez D oznaczono obszar będący rzutem ortogonalnym powierzchni środkowej powłoki na płaszczyznę $z = 0$.

Przyjęcie w teorii powłok hipotezy Kirchhoffa równoważne jest warunkom

$$\sigma_z \equiv 0, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} \equiv 0, \tag{1.5}$$

gdzie σ_z oznacza naprężenie na płaszczyźnie równoległej do powierzchni środkowej powłoki a γ_{xz}, γ_{yz} oznaczają kąty odkształcenia postaciowego odpowiadające naprężeniom stycznym τ_{xz}, τ_{yz} działających na płaszczyznach prostopadłych do powierzchni środkowej wydzielonego elementu powłoki. Równania konstytutywne dla ośrodka z nieliniowością fizyczną, por. [4], mają postać

$$\sigma_x = 3K\psi(\varepsilon)\,\varepsilon + 2G\chi(e^2)(\varepsilon_x - \varepsilon),$$

$$\sigma_y = 3K\psi(\varepsilon)\,\varepsilon + 2G\chi(e^2)(\varepsilon_y - \varepsilon), \tag{1.6}$$

$$\sigma_z = 3K\psi(\varepsilon)\varepsilon + 2G\chi(e^2)(\varepsilon_z - \varepsilon),$$

$$\tau_{xy} = G\chi(e^2)\gamma_{xy}, \tag{1.6}$$

gdzie K, G są stałymi określającymi kolejno moduł odkształcenia objętościowego i moduł odkształcenia postaciowego. Uwzględniając warunek $\sigma_z = 0$, który wynika z hipotezy Kirchhoffa, por. (1.5), otrzymujemy

$$\sigma_z = 3K\psi(\varepsilon)\varepsilon + 2G\chi(e^2)(\varepsilon_z - \varepsilon) = 3K\varepsilon + 2G(\varepsilon_z - \varepsilon) = 0 \tag{1.7}$$

Wówczas

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \tag{1.8}$$

W (1.7) przyjęto ponadto $\psi(\varepsilon) = \chi(e^2) = 1$, co wynika z założenia $\sigma_z = 0$; równanie (1.2) stosowane bywa w klasycznych teoriach powłok czy też płyt.

Uwzględniając w (1.2) równanie (1.8) uzyskamy, por. [6], [7].

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\frac{1-2\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$e^2 = \frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 - 3\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{3}{4}\gamma_{xy}^2 \tag{1.9}$$

Występujące w (1.1) funkcje $\psi(\varepsilon)$ i $\chi(e^2)$ przedstawia się najczęściej w postaci zbieżnych szeregów potęgowych

$$\psi(\varepsilon) = \sum_{\alpha=0} a_{2\alpha}\varepsilon^{2\alpha}, \quad \chi(e^2) = \sum_{\beta=0}^{\infty} b_{2\beta}e^{2\beta}, \tag{1.10}$$

przy czym $a_0 = b_0 = 1$, co wynika z faktu, że w takim przypadku ($\alpha = 0$) mamy ośrodek liniowo-sprężysty. Jeżeli w (1.10) ograniczymy się do skończonej liczby wyrazów ($\alpha, \beta = 1,2,\ldots,k,l$), to wyznaczenie współczynników $a_{2\alpha}$, $b_{2\beta}$ może być określone wprost z badań doświadczalnych por. [4].

Podstawiając (1.10) do (1.1) uzyskamy

$$\Phi(\varepsilon,e) = 9K\sum_{\alpha=0} a_{2\alpha}\int_0^{\varepsilon}\varepsilon^{2\alpha+1}d\varepsilon + \frac{4}{3}G\sum_{\beta=0}^{\infty} b_{2\beta}\int_0^{e} e^{2\beta+1}de =$$

$$= \frac{9}{2}K\varepsilon^2\bar{\psi}(\varepsilon) + \frac{2}{3}Ge^2\bar{\chi}(e). \tag{1.11}$$

gdzie

$$\bar{\varphi}(\varepsilon) \equiv \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{{}^{a}2\alpha}{\alpha+1}\varepsilon^{2\alpha}, \quad \bar{\chi}(e) \equiv \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{{}^{b}2\beta}{\beta+1} e^{2\beta} \tag{1.11$_1$}$$

Podstawiając (1.11) do (1.3) uzyskujemy energię potencjalną powłoki określoną równaniem

$$V = \iiint_V \Phi(\varepsilon, e)dxdydz = \iint_{\mathcal{D}} dxdy \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{9}{2} K\bar{\varphi}(\varepsilon)\varepsilon^2 + \frac{2}{3} G\bar{\chi}(e)e^2 \right] dz \right\} \tag{1.12}$$

Pomiędzy odkształceniami ε_x, ε_y, γ_{xy} powierzchni środkowej powłoki małowyniosłej i odkształceniami $\varepsilon_x^{(z)}$, $\varepsilon_y^{(z)}$, $\varepsilon_{xy}^{(z)}$ powierzchni równoległej (tj. powierzchni odległej od powierzchni środkowej o z, przy czym $-\frac{h}{2} \leqslant z \leqslant \frac{h}{2}$, h - grubość powłoki) zachodzą następujące związki (por. [5], [6]).

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(z)} &= \varepsilon_x + z\varkappa_1, \\ \varepsilon_y^{(z)} &= \varepsilon_y + z\varkappa_2, \\ \gamma_{xy}^{(z)} &= \gamma_{xy} + 2z\tau, \end{aligned} \tag{1.13}$$

gdzie $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ i τ oznaczają kolejno krzywizny i skręcenie powierzchni środkowej powłoki.

Podstawiając (1.13) w (1.12) z uwzględnieniem (1.9) otrzymujemy - po scałkowaniu względem z, energię potencjalną powłoki małowyniosłej wyrażoną za pomocą współrzędnych odkształcenia powierzchni środkowej.

$$\begin{aligned} V = {} & \frac{1}{2} C \iint_{\mathcal{D}} \left[\hat{\Phi}_1(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 - 2(1-\nu)\bar{\chi}_1(\varepsilon_x\varepsilon_y - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2) \right] dxdy + \\ & + D \iint_{\mathcal{D}} \left[2\hat{\Phi}_2(\varepsilon_x + \varepsilon_y)(\varkappa_1 + \varkappa_2) - 2(1-\nu)\bar{\chi}_2(\varepsilon_x\varkappa_2 + \varepsilon_y\varkappa_1 - \gamma_{xy}\tau) \right] dxdy + \\ & + \frac{1}{2} D \iint_{\mathcal{D}} \left[\hat{\Phi}_3(\varkappa_1 + \varkappa_2)^2 - 2(1-\nu)\bar{\chi}_3(\varkappa_1\varkappa_2 - \tau^2) \right] dxdy, \end{aligned} \tag{1.14}$$

gdzie

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$\hat{\Phi}_i = \frac{1}{3}\left[\bar{\psi}_i + 2\bar{\varkappa}_i + \frac{2\nu^2}{1-\nu}(\bar{\varkappa}_i - \bar{\psi}_i)\right] \qquad i = 1,2,3;$$

$\bar{\psi}_i$, $\bar{\varkappa}_i$, $(i = 1,2,3)$ są funkcjami zmiennych $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \varkappa_1, \varkappa_2, \tau$ określonymi za pomocą równań

$$\bar{\psi}_1 \equiv \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\psi}\,dz, \quad \bar{\psi}_2 \equiv \frac{6}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\psi}\,z\,dz, \quad \bar{\psi}_3 \equiv \frac{12}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\psi}\,z^2\,dz$$

i analogicznie (1.15)

$$\bar{\varkappa}_1 \equiv \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\varkappa}\,dz, \quad \bar{\varkappa}_2 = \frac{6}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\varkappa}\,z\,dz, \quad \bar{\varkappa}_3 = \frac{12}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\varkappa}\,z^2\,dz$$

Dla funkcji $\bar{\psi}_i$ $(i = 1,2,3)$ uzyskujemy po scałkowaniu względem z następujące wzory określające te funkcje dla dowolnego α

$$\bar{\psi}_1 = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a_{2\alpha}}{\alpha+1}\varepsilon^{2\alpha}dz = \frac{1}{h}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{a_{2\alpha}}{\alpha+1}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varepsilon^{2\alpha}dz = \frac{1}{h}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{a_{2\alpha}}{\alpha+1}\left(\frac{1}{3}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)^{2\alpha}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\bar{\varepsilon}+z\varkappa)^{2\alpha}dz =$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{a_{2\alpha}}{\alpha+1}\left(\frac{1}{3}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)^{2\alpha}\left[\sum_{k=0}^{2\alpha}\frac{1}{k+1}\binom{2\alpha}{k}\bar{\varepsilon}^{2\alpha-k}\varkappa^k z^{k+1}\right]_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} = \bar{\psi}_1(\bar{\varepsilon},\varkappa), \tag{1.16}$$

$$\bar{\psi}_2 = \frac{6}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{a_{2\alpha}}{\alpha+1}\varepsilon^{2\alpha}z\,dz = \frac{6}{h^3}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{a_{2\alpha}}{\alpha+1}\left(\frac{1}{3}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)^{2\alpha}\left[\sum_{k=0}^{2\alpha}\frac{1}{k+2}\binom{2\alpha}{k}\bar{\varepsilon}^{2\alpha-k}\varkappa^k z^{k+2}\right]_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} =$$

$$= \bar{\psi}_2(\bar{\varepsilon},\varkappa),$$

$$\bar{\psi}_3 = \frac{12}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{a_{2\alpha}}{\alpha+1}\varepsilon^{2\alpha}z^2\,dz = \frac{12}{h^3}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{a_{2\alpha}}{\alpha+1}\left(\frac{1}{3}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)^{2\alpha}\left[\sum_{k=0}^{2\alpha}\frac{1}{k+3}\binom{2\alpha}{k}\bar{\varepsilon}^{2\alpha-k}\varkappa^k z^{k+3}\right]_{z=-\frac{h}{3}}^{z=\frac{h}{2}} =$$

$$= \bar{\psi}_3(\bar{\varepsilon},\varkappa),$$

gdzie

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y, \quad \varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$$

Wyznaczenie funkcji $\bar{\chi}_i$ $(i = 1,2,3)$ jest bardziej złożone. W przypadku $\bar{\chi}_1$ sprowadza się ono do obliczenia całki postaci

$$\bar{\chi}_1 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\chi}\, dz = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{b_{2\beta}}{\beta+1} e^{2\beta} dz = \frac{1}{h}\sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{b_{2\beta}}{\beta+1}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e^{2\beta} dz =$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{b_{2\beta}}{\beta+1}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}(\bar{\varepsilon}+z\varkappa)^2 - 3\left[\varepsilon_x\varepsilon_y + (\varepsilon_x\varkappa_2+\varepsilon_y\varkappa_1)z + \varkappa_1\varkappa_2 z^2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4}(\gamma_{xy} + 2z\tau)^2 \right\}^{\beta} dz \tag{1.17}$$

Wyznaczenie $\bar{\chi}_2$, $\bar{\chi}_3$ wymaga obliczenia całek odpowiednio postaci

$$\bar{\chi}_2 = \frac{6}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\chi}\, z dz = \frac{6}{h^3}\int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{h}{2}} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{b_{2\beta}}{\beta+1} e^{2\beta} z dz = \frac{6}{h^3}\sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{b_{2\beta}}{\beta+1}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \,.\, e^{z\beta} dz,$$

$$\bar{\chi}_3 = \frac{12}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\chi}\, z^2 dz = \frac{12}{h^3}\sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{b_{2\beta}}{\beta+1}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 e^{2\beta} dz. \tag{1.18}$$

Obliczanie powyższych całek dla dowolnego wykładnika potęgowego $\beta \in N$ jest dość pracochłonne, chociaż zawsze możliwe. W rozważaniach teoretycznych przyjmować będziemy, że funkcje $\bar{\psi}_i$, $\bar{\chi}_i$ są określone równaniami (1.15) nie wyznaczając ich explicite; tak sformułowane zadanie ma istotne znaczenie w matematycznym postawieniu zadania, w szczególności przy problemach istnienia i jednoznaczności, gdzie na funkcje $\bar{\psi}_i$, $\bar{\chi}_i$ będą nakładane pewne warunki.

W zastosowaniach, szczególnie przy konstrukcji przybliżonych metod rozwiązania problemów brzegowych teorii powłok przyjmować będziemy najczęściej wartości $\alpha, \beta = 0,1$ lub $\alpha, \beta = 0,1,2$ (p. [4]), co odpowiada obcięciu szeregów określających funkcji $\psi(\varepsilon)$, $\chi(e)$ do dwóch lub trzech wyra-

zów. W tych przypadkach obliczanie całek (1.16), (1.17) upraszcza się bardzo istotnie.

2. Związki między wielkościami wewnętrznymi

W celu wyznaczenia zależności między wielkościami wewnętrznymi, a współrzędnymi odkształcenia powierzchni środkowej, zastosujemy metodę, którą w teorii liniowej wprowadził W.W. Nowożyłow, por. [5].

Weźmy pod uwagę funkcjonał (1.3), określający energię odkształcenia powłoki i wyznaczmy jego wariację δV

$$\delta V = \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_x^{(z)}} \delta \varepsilon_x^{(z)} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_y^{(z)}} \delta \varepsilon_y^{(z)} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}^{(z)}} \delta \gamma_{xy}^{(z)} \right] dxdydz \tag{2.1}$$

Funkcja energii odkształcenia ma tę własność (p. [4]), że

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_x^{(z)}} = \sigma_x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_y^{(z)}} = \sigma_y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}^{(z)}} = \tau_{xy} \tag{2.2}$$

Podstawiając (2.2) do (2.1) otrzymujemy

$$\delta V = \iiint_{\mathcal{V}} \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x^{(z)} + \sigma_y \delta \varepsilon_y^{(z)} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(z)} \right] dxdydz \tag{2.3}$$

Uwzględniając (1.13) oraz następujące zależności, por. [5]

$$\gamma_{xy} = \gamma_{1xy} + \gamma_{2xy}$$

$$\tau_1 + \frac{\tau_{2xy}}{R_1} = \tau_2 + \frac{1}{R_2} \gamma_{1xy} = \tau \tag{2.4}$$

otrzymujemy

$$\delta \varepsilon_x^{(z)} = \delta \varepsilon_x + z \delta \varkappa_1$$

$$\delta \varepsilon_y^{(z)} = \delta \varepsilon_y + z \delta \varkappa_2 \tag{2.5}$$

$$\delta \gamma_{xy}^{(z)} = \delta \gamma_{1xy} + z \delta \tau_1 + \delta \gamma_{2xy} + z \delta \tau_2$$

Wprowadzając (2.5) do (2.3) uzyskujemy

$$\delta V = \iiint_{\mathcal{V}} \Big[\sigma_x(\delta\varepsilon_x + z\delta\varkappa_1) + \sigma_y(\delta\varepsilon_y + z\delta\varkappa_2) + \tau_{xy}(\delta_1\gamma_{xy} + z\delta\tau_1) + \tau_{xy}(\delta_2\gamma_{xy} + z\delta\tau_2)\Big]dxdydz \tag{2.6}$$

Przedstawmy (2.6) w postaci

$$\delta V = \iint_{\mathcal{D}} \Big[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x\delta\varepsilon_x dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y\delta\varepsilon_y dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}\delta_1\gamma_{xy} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}\delta_2\gamma_{xy} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z\delta\varkappa_1 dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z\delta\varkappa_2 dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z\delta\tau_1 dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z\delta\tau_2 dz\Big]dxdy \tag{2.7}$$

Uwzględniając w (2.7) definicję wielkości wewnętrznych T_x, T_y, T_{xy}, T_{yx}, M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} otrzymujemy

$$\delta V = \iint_{\mathcal{D}} \Big[T_x\delta\varepsilon_x + T_y\delta\varepsilon_y + T_{xy}\delta_1\gamma_{xy} + T_{ys}\delta_2\gamma_{xy} + M_x\delta\varkappa_1 + M_y\delta\varkappa_2 + M_{xy}\delta\tau_1 + M_{yx}\delta\tau_2\Big]dxdy \tag{2.8}$$

Wykorzystując w (2.8) zależności, por. ([2], [4]):

$$\delta\tau_1 = \delta\tau - \frac{1}{R_1}\delta_2\gamma_{xy},$$

$$\delta\tau_2 = \delta\tau - \frac{1}{R_2}\delta_1\gamma_{xy}, \tag{2.9}$$

$$\delta\gamma_{xy} = \delta_1\gamma_{xy} + \delta_2\gamma_{xy}$$

uzyskamy

$$\delta V = \iint_{\mathcal{D}} \Big[T_x\delta\varepsilon_x + T_y\delta\varepsilon_y + M_x\delta\varkappa_1 + M_y\delta\varkappa_2 + S\delta\gamma_{xy} + 2H\delta\tau\Big]dxdy, \tag{2.10}$$

gdzie

$$S = T_{xy} - \frac{M_{yx}}{R_2} = T_{yx} - \frac{M_{xy}}{R_1}$$

$$H = \frac{1}{2}(M_{xy} + M_{yx}) \tag{2.11}$$

Biorąc teraz wariację energii odkształcenia V w postaci (1.14) i porównując odpowiednio z (2.10) otrzymujemy związki pomiędzy wielkościami wewnętrznymi i odkształceniami powierzchni środkowej powłoki.

Są one postaci

$$T_x = C\left[\xi_1 \varepsilon_x \varepsilon_x + \xi_2 \varepsilon_x \varepsilon_y\right] + D\left[\eta_2 \varepsilon_x \varkappa_1 + \eta_1 \varepsilon_x \varkappa_1\right] + (1-\nu)\varphi_{\varepsilon_x},$$

$$T_y = C\left[\xi_2 \varepsilon_y \varepsilon_x + \xi_1 \varepsilon_y \varepsilon_y\right] + D\left[\eta_2 \varepsilon_y \varkappa_1 + \eta_1 \varepsilon_y \varkappa_2\right] + (1-\nu)\varphi_{\varepsilon_y},$$

$$M_x = D\left[\eta_2 \varkappa_1 + \eta_1 \varkappa_1 \varkappa_2\right] + \xi_1 \varkappa_1 \varepsilon_x + \xi_2 \varkappa_1 \varepsilon_y + (1-\nu)\varphi_{\varkappa_1}, \tag{2.12}$$

$$M_y = D\left[\eta_2 \varkappa_2 \varkappa_1 + \eta_1 \varkappa_1 \varkappa_2\right] + \xi_1 \varkappa_2 \varepsilon_x + \xi_2 \varkappa_2 \varepsilon_y + (1-\nu)\varphi_{\varkappa_2},$$

$$S = (1-\nu)\left[\frac{1}{2}C\bar{\varkappa}_1 \gamma_{xy} + 2D\bar{\varkappa}_2 \tau\right] + C\left[\xi_1 \gamma_{xy} \varepsilon_x + \xi_2 \gamma_{xy} \varepsilon_y\right] + D\left[\eta_1 \gamma_{xy} \varkappa_1 + \eta_2 \gamma_{xy} \varkappa_2\right] + (1-\nu)\varphi_{\gamma_{xy}},$$

$$2H = 2D(1-\nu)\left[\bar{\varkappa}_2 \gamma_{xy} + \bar{\varkappa}_3 \tau\right] + C\left[\xi_1 \tau \varepsilon_x + \xi_2 \tau \varepsilon_y\right] + D\left[\eta_1 \tau \varkappa_1 + \eta_2 \tau \varkappa_2\right] + (1-\nu)\varphi_{\tau},$$

gdzie

$$\xi_j \varepsilon_i = \hat{\Phi}_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{\Phi}_1}{\partial \varepsilon_i}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - (1-\nu)\frac{\partial \bar{\varkappa}_1}{\partial \varepsilon_i}\varepsilon_j, \quad i,j=1,2 \text{ przy czym dla } i=j \ \frac{\partial \bar{\varkappa}_1}{\partial \varepsilon_i}\varepsilon_j = \bar{\varkappa}_1$$

$$\eta_j \varepsilon_i = 2\hat{\Phi}_2 + 2\frac{\partial \hat{\Phi}_2}{\partial \varepsilon_i}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{\Phi}_3}{\partial \varepsilon_i}(\varkappa_1 + \varkappa_2) - 2(1-\nu)\frac{\partial \bar{\varkappa}_2}{\partial \varepsilon_i}\varepsilon_j - \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial \bar{\varkappa}_3}{\partial \varepsilon_i}\varkappa_j, \quad i,j=1,2,$$

$$\xi_j \varkappa_i = \frac{1}{2}C\left[\frac{\partial \hat{\Phi}_1}{\partial \varkappa_i}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - (1-\nu)\frac{\partial \bar{\varkappa}_1}{\partial \bar{\varkappa}_i}\varepsilon_y\right] + 2D\left[\hat{\Phi}_2 - (1-\nu)\bar{\varkappa}_2\right] \quad i,j = 1,2, \text{ dla } i=j \ \bar{\varkappa}_2 = 0$$

$$\eta_{j\varkappa_i} = \hat{\Phi}_3 + 2\frac{\partial\hat{\Phi}_2}{\partial\varkappa_i}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) + \frac{1}{2}\frac{\partial\hat{\Phi}_3}{\partial\varkappa_i}(\varkappa_1+\varkappa_2) - 2(1-\nu)\frac{\partial\bar{\chi}_2}{\partial\varkappa_i}\varepsilon_j - (1-\nu)\frac{\partial\bar{\chi}_3}{\partial\varkappa_i}\varkappa_j,$$

$$i,j = 1,2 \quad \text{dla} \quad i = j \quad \frac{\partial\bar{\chi}_3}{\partial\varkappa_i}\varkappa_j = \bar{\chi}_3 \tag{2.13}$$

$$\xi_{i\alpha_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial\hat{\Phi}_1}{\partial\alpha_i}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) - (1-\nu)\frac{\partial\bar{\chi}_1}{\partial\alpha_i}\varepsilon_y, \; i = 1,2, \text{ dla } i = 2 \quad \frac{\partial\bar{\chi}_1}{\partial\alpha_i}\varepsilon_y = 0,$$

$$\eta_{i\alpha_i} = 2\frac{\partial\hat{\Phi}_2}{\partial\alpha_i}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) + \frac{1}{2}\frac{\partial\hat{\Phi}_3}{\partial\alpha_i}(\varkappa_1+\varkappa_2) - 2(1-\nu)\frac{\partial\bar{\chi}_2}{\partial\alpha_i}\varepsilon_i - \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial\bar{\chi}_3}{\partial\alpha_i}\varkappa_i, \; i = 1,2,$$

przy czym $\alpha_1 = \gamma_{xy}$, $\alpha_2 = \tau$.

Równania (2.12) określają poszukiwane zależności między wielkościami wewnętrznymi a współrzędnymi odkształcenia powierzchni środkowej.

LITERATURA

[1] Borkowski S.: Współczesne problemy i kierunki rozwojowe termomechaniki powłok, Sympozjum "Konstrukcje powłokowe - teoria i zastosowanie", Kraków 1974, s. 35.

[1a] Borkowski S.: Przegląd problematyki badawczej Instytutu Mech. Teoret. Wydz. Mat.-Fiz. Pol. Śl., w Gliwicach (Mechanika ośrodków ciągłych) w zbiorze prac: Mech. Teor. i Stosow. w Pol. Śl., wyd. PTMTS, Gliwice 1976, 27-36.

[2] Leszczyński H.: Numeryczne rozwiązanie problemów brzegowych teorii naprężeń cieplnych małowyniosłych powłok sprężystych, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Mat.-Fiz., 25, 1974, 213-218.

[3] Leszczyński H.: Numeryczne rozwiązanie problemów brzegowych małowyniosłych powłok sprężystych, Zesz. Nauk. Pol. Śl. Mat.-Fiz., 28, 1977, 71-81.

[4] Kauderer H.: Nichtlineare Mechanik, Springer Verlag 1958.

[5] Nowożiłow W.W.: Teorija tonkich obołoczek, 1962 Sudprongiz.

[6] Filin A.P.: Elementy teorii obołoczek, Leningrad 1975.

[7] Karmiszin A.W., Liaskowiec W.A., Miaczenkow W.I., Frołow A.N.M.: Statika i dinamika tonkostiennych konstrukcji, Moskwa 1975.

СООТНОШЕНИЯ УПРУГОСТИ В ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Р е з ю м е

В работе определено потенциальную энергию деформации пологих оболочек для тел (сред) Каудерера.

Используя геометрически линейные соотношения и гипотезу нормального элемента рассмотрено вариацию основного функционала. Затем получено физические соотношения-уравнения усилий и моментов.

INTERNAL QUANTITIES IN THE PHYSICAL NONLINEAR SHALLOW SHELLS

S u m m a r y

In this paper was given the potencial energy of shallow shells for Kauderer body.

Useing the geometric-linear relations and hypothesis of normal element was calculated the variation of basic functional where after was obtained equations desingnation of the internal quantities.