ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA FIZYKA z. 31 Nr kol. 608

Robert WÓJCIK

METODA ROZWIĄZAŃ SPRĘŻYSTYCH W PROBLEMACH BRZEGOWYCH TEORII SKRĘCANIA PRĘTÓW FIZYKALNIE NIELINIOWYCH

Streszczenie. Stosując metodę rozwiązań sprężystych podano ciąg przybliżeń rozwiązań problemu brzegowego teorii skręcania prętów fizykalnie nieliniowych, w obszarze jednospójnym; wykazano też zbieżność tego ciągu w przestrzeni $\overset{\circ}{W}{}^1_2$ do rozwiązania uogólnionego.

1. Wstęp

Przedmiotem rozważań niniejszej pracy jest rozwiązanie problemu brzegowego teorii skręcania prętów o dowolnym przekroju jednospójnym, przy założeniu, że modelem fizycznym jest nieliniowy ośrodek Kauderera [4]. Stosując metodę rozwiązań sprężystych, podaną przez Iliuszyna [8], skonstruowano ciąg przybliżeń uogólnionego rozwiązania i wykazano jego zbieżność.

Praca jest uogólnieniem wyników Bykowa [7] na przypadek nieliniowego fizycznie ośrodka sprężystego. W zagadnieniach fizykalnie nieliniowych metoda ta była stosowana między innymi w pracy [2]. Niniejsza praca jest kontynuacją problematyki przedstawionej w publikacjach [1], [5], [6].

2. Sformułowanie zadania

Niech Γ będzie ograniczonym obszarem jednospójnym na płaszczyźnie (x,y) z brzegiem $\partial\Gamma$. Rozpatrzmy w Γ równanie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\gamma\left[s^2(F)\right]\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\gamma\left[s^2(F)\right]\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right\} = -2 \quad (x,y)\in\Gamma \tag{2.1}$$

gdzie

$$s^2 = \frac{\underline{s}^2}{4G} = \frac{3}{4}\,\theta^2\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]$$

(2.2)

$$\underline{s}^2 = 3G\,\theta^2\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]$$

z warunkiem brzegowym

$$F(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Gamma} = 0 \tag{2.3}$$

Równania (2.1), (2.3) określają problem brzegowy teorii skręcania prętów dla ośrodka fizykalnie nieliniowego (ośrodek Kauderera [4]), por. [1].

W równaniach (2.1)-(2.3) $F(x,y)$ - przedstawia funkcję naprężeń, $\underline{s}$ - intensywność naprężeń, θ - jednostkowy kąt skręcania, G - moduł ścinania, $\gamma(s^2)$ - funkcję intensywności naprężeń charakteryzującą właściwości fizyczne materiału; funkcję tę, por. [1], [3], [4], [5] można przedstawić w postaci:

$$\gamma(s^2) = 1 + \varphi(s^2). \tag{2.4}$$

Dla poszczególnych materiałów, funkcja intensywności naprężeń $\gamma(s^2)$, zwana też funkcją materiałową, wyznaczona jest eksperymentalnie; z eksperymentu wynika dla niej warunek, który po uwzględnieniu (2.4) możemy zapisać (por. [3]) w postaci

$$0 \leqslant \varphi(s^2) \leqslant \varphi(s^2) + s\,\frac{d\varphi(s^2)}{ds} \leqslant \eta < 1 \tag{2.5}$$

Uwzględniając (2.4) w równaniu (2.1) mamy:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(s^2)\,\frac{\partial F}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(s^2)\,\frac{\partial F}{\partial y}\right]\right\} - 2. \tag{2.6}$$

Wprowadzamy dla dowolnych funkcji $F(x,y)$, $h(x,y)$, jednokrotnie różniczkowalnych następujące działanie

$$a(F,h) \equiv \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{2.7}$$

które jest iloczynem skalarnym gradientów tych funkcji.

Łatwo wykazać, że $a(F,F)$ definiuje seminormę lokalną

$$a(F,F) = \|F\|_1^2 = \frac{4}{3}\,\frac{s^2}{\theta^2} \tag{2.8}$$

Uwzględniając (2.8) w (2.4) mamy

$$\gamma(s^2) = \gamma\left(\frac{3}{4}\,\theta^2\|F\|_1^2\right) = 1 + \bar{\varphi}\left(\frac{3}{4}\,\theta^2\|F\|_1^2\right) = 1 + \bar{\varphi}(\|F\|_1) \tag{2.9}$$

Mnożymy równanie (2.6) przez dowolną funkcję $h(x,y)$, o której zakładamy, że: (i) jest jednokrotnie różniczkowalną w Γ; (ii) spełnia jednorodny warunek brzegowy ($h(x,y) = 0$ dla $(x,y) \in \partial\Gamma$), a następnie tak utworzone wyrażenie całkujemy po obszarze Γ; po uwzględnieniu (2.7) i (2.9)

$$\int_{\Gamma} a(F,h)d\Gamma = -\int_{\Gamma} \bar{\varphi}(\|F\|_1) \cdot a(F,h)d\Gamma + 2\int_{\Gamma} h\, d\Gamma. \tag{2.10}$$

Oznaczając przez $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Gamma)$ przestrzeń funkcji, która jest domknięciem przestrzeni $\overset{\circ}{C}_2(\Gamma) = C_2(\Gamma) \cap \overset{\circ}{C}_1(\Gamma)$ w przestrzeni $W_2^1(\Gamma)$, przy czym $C_2(\Gamma)$ jest przestrzenią funkcji dwukrotnie różniczkowalnych w Γ, a $\overset{\circ}{C}_1(\Gamma)$ przestrzenią funkcji jednokrotnie różniczkowalnych o nośnikach zwartych w Γ, zdefiniujemy uogólnione rozwiązanie problemu (2.1) (2.3).

D e f i n i c j a

Funkcję $F(x,y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Gamma)$ nazywamy uogólnionym rozwiązaniem problemu (2.1) (2.3), jeżeli dla każdej funkcji $h(x,y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Gamma)$ spełniona jest tożsamość (2.10).

Skonstruujemy, por. [2], [7], ciąg przybliżeń rozwiązania określony następującym wzorem rekurencyjnym

$$\int_{\Gamma} a(F^{(n+1)},h)d\Gamma = -\int_{\Gamma} \bar{\varphi}(\|F^{(n)}\|_1) \cdot a(F^{(n)},h)d\Gamma + 2\int_{\Gamma} h\, d\Gamma. \tag{2.11}$$

Należy wykazać, że ciąg przybliżeń (2.11) jest zbieżny w $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Gamma)$ do rozwiązania uogólnionego.

3. Rozwiązanie zadania

T w i e r d z e n i e

Jeżeli istnieje rozwiązanie problemu (2.1), (2.3), w którym funkcja $\varphi(e^2)$ spełnia warunek (2.5), to ciąg przybliżeń (2.11) jest zbieżny w w $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Gamma)$ do rozwiązania uogólnionego.

D o w ó d

Dla dowodu wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$(F,h)_{\Gamma} = \int_{\Gamma} a(F,h)d\Gamma \tag{3.1}$$

$$\|F\|_{\Gamma} = \int_{\Gamma} a(F,F)d\Gamma \tag{3.2}$$

Wykorzystując nierówność Friedrichsa [3], można łatwo wykazać, że dla funkcji z $\mathring{W}_2^1(\Gamma)$ zachodzi

$$\|F\|_{\mathring{W}_2^1} \leqslant C\|F\| \tag{3.3}$$

Uwzględniając (3.1), (3.2) i (2.11) oraz stosując kolejno: nierówność modułową dla całek, nierówność trójkąta, nierówność Buniakowskiego-Schwarza, szacujemy:

$$\left|\left(F^{(n+1)} - F^{(n)}, h\right)_\Gamma\right| =$$

$$= \left|\int_\Gamma \left[\bar{\varphi}(\|F^{(n)}\|_1).a(F^{(n)},h) - \bar{\varphi}(\|F^{(n-1)}\|_1).a(F^{n-1)},h)\right] d\Gamma\right| =$$

$$= \left|\int_\Gamma \left[\bar{\varphi}(\|F^{(n)}\|_1).a(F^{(n)},h) - \bar{\varphi}(\|F^{(n-1)}\|_1).a(F^{(n-1)},h) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \bar{\varphi}(\|F^{(n)}\|_1).a(F^{(n-1)},h) - \varphi(\|F^{(n)}\|_1).a(F^{n-1)},h)\right] d\Gamma\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Gamma \left\{\left|\varphi(\|F^{(n)}\|_1)\ a(F^{(n)} - F^{(n-1)},h)\right| + \left|\bar{\varphi}(\|F^{(n)}\|_1) - \bar{\varphi}(\|F^{(n-1)}\|_1)\right|\ \left|a(F^{n-1)},h)\right|\right\} d\Gamma \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Gamma \left\{\left|\bar{\varphi}(\|F^{(n)}\|_1)\right| + \frac{\left|\bar{\varphi}(\|F^{(n)}\|_1) - \bar{\varphi}(\|F^{(n-1)}\|_1)\right|}{\|F^{(n)} - F^{(n-1)}\|_1}\|F^{(n-1)}\|_1\right\}\|F^{(n)} - F^{(n-1)}\|_1\|h\|_1 d\Gamma = A$$

Przyjmując, że występujące w (3.4) wyrażenie

$$\frac{\left|\bar{\varphi}(\|F^{(n)}\|_1) - \bar{\varphi}(\|F^{(n-1)}\|_1)\right|}{\|F^{(n)} - F^{(n-1)}\|_1}\|F^{(n-1)}\|_1$$

w (n+1)-ej iteracji jest stałe oraz wykorzystując (2.5) mamy

$$\left|\bar{\varphi}(\|F^{(n)}\|_1)\right| + \frac{\left|\bar{\varphi}(\|F^{(n)}\|_1) - \bar{\varphi}(\|F^{(n-1)}\|_1)\right|}{\|F^{(n)} - F^{(n-1)}\|_1}\|F^{n-1}\|_1 \leqslant \eta < 1 \tag{3.5}$$

Powyższa nierówność i nierówność Buniakowskiego-Schwarza pozwalają (3.4) oszacować następująco:

$$A \leq \eta \int_{\Gamma} \|F^{(n)} - F^{(n-1)}\|_1 \cdot \|h\|_1 \, d\Gamma \leq$$

$$\leq \eta \|F^{(n)} - F^{(n-1)}\|_{\Gamma} \|h\|_{\Gamma}. \tag{3.6}$$

Z oszacowań (3.4) i (3.6) wynika

$$\left|\left(F^{(n+1)} - F^{(n)}, h\right)_{\Gamma}\right| \leq \eta \|F^{(n)} - F^{(n-1)}\|_{\Gamma} \tag{3.7}$$

Z ostatniej nierówności otrzymujemy

$$\|F^{(n+1)} - F^{(n)}\|_{\Gamma} \leq \eta \|F^{(n)} - F^{(n-1)}\|_{\Gamma} \tag{3.8}$$

skąd wynika, że

$$\|F^{(n+1)} - F^{(n)}\|_{\Gamma} \leq \eta^n \|F^{(1)} - F^{(0)}\|_{\Gamma} \tag{3.9}$$

Z nierówności (3.9) oraz z warunku $\eta < 1$ wynika

$$\|F^{(n+1)} - F^{(n)}\|_{\Gamma} \to 0 \quad \text{dla} \quad n \to \infty$$

oraz (3.10)

$$\|F^{(n+1)} - F^{(n)}\|_{\mathring{W}_2^1} \to 0 \quad \text{(por. (3.3))}$$

Z ostatniej zależności i zupełności przestrzeni $\mathring{W}_2^1$ wynika, że ciąg $\{F^{(n)}\}$ jest zbieżny. c.b.d.o.

LITERATURA

[1] Borkowski S.: Torsion of a physically nonlinear bar with a multiply connected corss-section, Bull. Acad. Polon. Sci, Sér. sci. tech., 10, 24 (1976), [793-797].

[2] Jedrzejczyk J.: Metdoa rozwiązań sprężystych teorii płyt dla ośrodków nieliniowych fizycznie, ZN Pol. Śl., Mat.-Fiz., 28, (1977) [55-60].

[3] Langenbach A.: Monotone Potentialoperatoren in Theorie und Auwendung, Springer-Verlag, Berlin-Heildeberg - New York 1977.

[4] Kauderer H.: Nichlineare Machnik, Springer-Verlag, 1958.

[5] Wójcik R.: Wariacyjne ujęcie problemu brzegowego teorii skręcania prętów dla ośrodka nieliniowego fizycznie, ZN Pol.Śl. Mat.-Fiz.,25,(1974) [201-206].

[6] Wójcik R.: Wariacyjno-różnicowa metoda rozwiązywania zadań brzegowych nieliniowej teorii skręcania prętów, ZN Pol.Śl. Mat.-Fiz., 28 (1977) [233-240].

[7] Bykow Dł., Szczujew W.A.: Ob odnom obobszczeni metoda uprugich reszenij, Prikł. Mat. Mech. 2, 33, (1969) [290-296].

[8] Iliuszyn A.H.: Płastycznost', Gostiechizdat, 1948.

[9] Sobolew S.Ł.: Niekotoryje primienienija funkcjonalnogo analiza w matematiczeskoj fizykie, Izd. L.G.U., 1950.

МЕТОД УПРУГИХ РЕШЕНИЙ В КРАЕВЫХ ВОПРОСАВХ СВЯЗАННЫХ С ТЕОРИЕИ КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ, ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ

Р е з ю м е

Примоняя метод упругах решений был представлен ряд приближённых решений вопросов теории кручения стержней физически нелинейных в области сцепления. Доказана также сходность этого ряда в плоскости W_2^1 по отношению к общему решению.

THE METHOD OF ELASTIC SOLUTIONS IN THE BOUNDARY PROBLEMS OF PHYSICALLY NON-LINEAR RODS TORSION THEORY

S u m m a r y

Using the method of elastic solutions the sequence of approximations of the boundary problem of physically non-linear rods torsion theory has been presented, in the simply connected region; also, the convergence of this sequence in the $\mathring{W}_2^1$ space to the generalized solution was demonstrated.