

Józef SZPILECKI  
Instytut Fizyki

MODYFIKACJA METODY ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ,  
W KTÓRYCH FUNKCJA CZASOWA JEST LINIOWĄ KOMBINACJĄ FUNKCJI WYKŁADNICZYCH  
O ZESPOLONYCH WYKŁADNIKACH

Streszczenie. Zastosowana w jednej z poprzednich prac autora metoda rozwiązywania równania, w którym funkcja czasowa jest liniową kombinacją funkcji wykładniczych o wykładnikach rzeczywistych, przy pomocy współrzędnych trójkątowych lub ich uogólnienia albo też w przypadku współrzędnych prostokątnych, nie daje się bezpośrednio zastosować w przypadku, gdy wykładniki są zespolone. Wprowadzono więc modyfikację metody, która polega na tym, by zastąpić funkcje wykładnicze o zespolonym argumentie takimiż funkcjami o rzeczywistym argumentie.

Metodę przedstawiono dla 3 oraz  $n+m$  zmiennych. Jest to metoda iteracyjna, przy czym jedno z równań służy do sprawdzenia poprawności rozwiązania i zbieżności procesu.

Geometryczna interpretacja jest w zasadzie możliwa podobnie jak w poprzedniej pracy autora, z tym że funkcje wykładnicze, wprowadzone w miejsce funkcji zespolonego argumentu, są zależne od odpowiednio zdefiniowanych parametrów  $u_k$ . Ponieważ w toku procesu iteracyjnego wielkości  $u_k$  mogą ulegać zmianie, niedogodność geometrycznej interpretacji polega na tym, że dla każdej wartości  $u_k$  należałoby stosować osobną konstrukcję, ze względu na zmianę skali. Metoda może być jednak stosowana również bez interpretacji geometrycznej i wtedy nie ma powyższej trudności.

W pracy wprowadzono podobne oznaczenia jak w pracy poprzedniej, mianowicie w przypadku współrzędnych trójkątowych wielkości  $a_{11}$ , przy czym  $l_1$  są to współrzędne trójkątowe. W przypadku stosowania prostokątnych współrzędnych Kartezjusza w miejsce  $a_{11}$  można stosować wielkości  $l_1$ .

## 1. Wstęp

Równania wymienionego w tytule typu spotykamy często w praktyce. Można tu nawiązać do równań, rozpatrywanych w pracy doktorskiej autora [1], które w przypadku rzeczywistych wykładników były rozpatrywane w kilku publikacjach autora, nawiązujących do pracy doktorskiej. Więc we współrzędnych trójkątowych i ich uogólnieniach [2] albo we współrzędnych prostokątnych, gdzie np. stosowano metodę do sprowadzenia rozpatrywania problemu oscylacji w konfiguracyjnej przestrzeni  $n$  wymiarowej do zagadnienia 2-wymiarowego [3, 4, 5, 6].

W obecnym wariacie metodę rozpatrywano w nawiązaniu do teorii metody echa spinowego, stosowanej przy zagadnieniach paramagnetycznego rezonansu

jądrowego. Stąd w pracy mowa o wektorze namagnesowania  $M$ , co nie jest istotne dla stosowanej metody.

## 2. Równania trójskładnikowe

Metoda echa spinowego polega na takim dobraniu długości impulsu pola magnetycznego, by jedna ze składowych namagnesowania  $M$  przybrała wartość równą zeru lub danej wartości  $M_0$ . W tym przypadku można zastosować modyfikację metody opisaną w [2].

Przypuśćmy, że dana jest wartość składowej  $M_x$ . Należy wyliczyć chwilę, w której ta wartość jest osiągnięta. Stosujemy rzeczywiste przedstawienie funkcji

$$M_x - M_0 = A_{x,1}e^{-\Delta t} + A_{x,2}e^{-\delta t} \cos \omega t + A_{x,3}e^{-\delta t} \sin \omega t \quad (1)$$

W przypadku  $M_x - M_0 \neq 0$  oznaczamy

$$\begin{aligned} a_{11} &= (A_{x,1}/(M_x - M_0))e^{-\Delta t} \\ a_{21} &= (A_{x,2}/(M_x - M_0))e^{-\delta t} \cos \omega t, \\ a_{31} &= (A_{x,3}/(M_x - M_0))e^{-\delta t} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (2)$$

Z dwu ostatnich równań (2)

$$\operatorname{tg} \omega t = (a_{31} A_{x,2} / a_{21} A_{x,3}) \quad (3)$$

oraz

$$e^{-\delta t} = \sqrt{(a_{21} (M_x - M_0) / A_{x,2})^2 + (a_{31} (M_x - M_0) / A_{x,3})^2} \quad (4)$$

Czas  $t$  można wyznaczyć z jednego z trzech równań niezależnych, pod warunkiem spełnienia pewnych zależności między wielkościami  $a_i l_i$ ,  $i=1,2,3$ .

Mamy następujące zależności:

Z równania (1) na  $M_x - M_0$

$$1 = a_{11} + a_{21} + a_{31} \quad (5)$$

Ponadto

$$e^{-\Delta/\omega} \operatorname{arctg}(a_3 l_3 A_{x,2} / a_2 l_2 A_{x,3}) = ((M_x - M_0) a_1 l_1 / A_{x,1}) \quad (6)$$

$$e^{-\delta/\omega} \operatorname{arctg}(a_3 l_3 A_{x,2} / a_2 l_2 A_{x,3}) = \sqrt{(a_2 l_2 (M_x - M_0) / A_{x,2})^2 + (a_3 l_3 (M_x - M_0) / A_{x,3})^2} \quad (7)$$

W przypadku  $M_x - M_0 = 0$  w równaniach definicyjnych na  $a_i l_i$  (2) występują tylko wielkości  $A_{x,i}$  i zależność między nimi sprowadza się do

$$0 = a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 \quad (8)$$

Układ równań (6-7) rozwiązujemy metodą iteracji, przyjmując początkowo dowolnie

$$a_3 l_3 / a_2 l_2 = u, \quad (9)$$

Poprawność otrzymanych tą metodą wartości  $a_1 l_1$  i  $a_2 l_2$  sprawdzamy za pomocą równania (5). W przypadku jego niespełnienia, zmniejszamy lub zwiększamy przyjętą wartość  $u$ , aż do spełnienia równania (5).

### 3. Równanie o $2n+m$ składnikach

Przypuśćmy, że mamy równanie (np. powstałe z iteracyjnego rozwiązania równania różniczkowego Blocha lub Blocha Torreya)

$$M_x - M_0 = A_{x,1} e^{-\Delta_1 t} + \dots + A_{x,m} e^{-\Delta_m t} + A_{x,m+1} e^{-\delta_1 t} \cos \omega_1 t \\ \dots + A_{x,m+n} e^{-\delta_n t} \cos \omega_n t + A_{x,m+n+1} e^{-\delta_1 t} \sin \omega_1 t + \dots + A_{m+2n} e^{-\delta_n t} \sin \omega_n t \quad (10)$$

W przypadku  $M_x - M_0 = 0$  wprowadzamy

$$a_1 l_1 = (A_{x,i} / (M_x - M_0)) e^{-\Delta_i t}, \quad i = 1, \dots, m \\ a_{i+m} l_{i+m} = (A_{x,i+m} / (M_x - M_0)) e^{-\delta_i t} \cos \omega_i t, \\ a_{i+m+n} l_{i+m+n} = (A_{x,i+m+n} / (M_x - M_0)) e^{-\delta_i t} \sin \omega_i t \\ i = 1, \dots, n \quad (11)$$



oraz

$$\operatorname{tg} \omega_i t = (a_{m+n+1}^1 l_{m+n+1}^A x_{,m+n+1} / a_{m+1}^1 l_{m+1}^A x_{,m+n+1}) \quad (12)$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$e^{-\delta_i t} = \sqrt{(a_{m+n+1}^1 l_{m+n+1}^A (M_x - M_0) / A_{x,m+n+1})^2 + (a_{m+1}^1 l_{m+1}^A (M_x - M_0) / A_{x,m+1})^2} \quad (13)$$

$$i = 1, \dots, n,$$

Czas  $t$  można wyznaczyć z dowolnego z równań (12), (13) w liczbie  $2n$  oraz  $m$  pierwszych równań (11). W celu otrzymania jednoznaczności, powinno być spełnionych  $m+2n$  równań, z których można wyznaczyć stałe (11). Mamy więc  $n-1$  równań dla  $k$  ustalonego

$$(1/\omega_k) \operatorname{arctg} \frac{a_{m+n+k}^1 l_{m+n+k}^A x_{,m+n+k}}{a_{m+k}^1 l_{m+k}^A x_{,m+n+k}} = (1/\omega_i) \operatorname{arctg} \frac{a_{m+n+i}^1 l_{m+n+i}^A x_{,m+i}}{a_{m+i}^1 l_{m+i}^A x_{,m+n+i}} \quad (14)$$

dla  $i \neq k$  oraz  $1 \leq i, k \leq n$ .

Z kolei dla  $1 \leq i \leq n$   $n$  równań

$$e^{-(\delta_i/\omega_i) \operatorname{arctg} \frac{a_{m+n+i}^1 l_{m+n+i}^A x_{,m+i}}{a_{m+i}^1 l_{m+i}^A x_{,m+n+i}}} = \sqrt{(a_{m+n+i}^1 l_{m+n+i}^A (M_x - M_0) / A_{x,m+n+i})^2 + (a_{m+1}^1 l_{m+1}^A (M_x - M_0) / A_{x,m+1})^2} \quad (15)$$

Jedno równanie dla dowolnie obranych wartości  $i, k, 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq m$

$$e^{-(\Delta_i/\omega_k) \operatorname{arctg} \frac{a_{m+n+k}^1 l_{m+n+k}^A x_{,m+n+k}}{a_{m+k}^1 l_{m+k}^A x_{,m+n+k}}} = a_i^1 l_i^A (M_x - M_0) / A_{x,i} \quad (16)$$

Z kolei  $m-1$  równań dla  $1 \leq i, k \leq m$

$$(1/\Delta_i) \ln(a_i^1 l_i^A (M_x - M_0) / A_{x,i}) = (1/\Delta_k) \ln(a_k^1 l_k^A (M_x - M_0) / A_{x,k}) \quad (17)$$

oraz jedno równanie

$$1 = \sum_{i=1}^{m+2n} a_i^1 l_i^A \quad (18)$$

W przypadku, gdy  $M_x - M_0 = 0$ , w równaniach (11), definiujących  $a_{1l_i}$ , należy pominąć  $M_x - M_0$  oraz w miejsce ostatniego równania (18) przyjąć

$$\sum_{i=1}^{m+2n} a_{1l_i} = 0. \quad (19)$$

Układ równań rozwiązujemy, wprowadzając pewne początkowe wartości

$$u_k = \frac{a_{m+n+k}^{1m+n+k}}{a_{m+k}^{1m+k}}, \quad 1 \leq k \leq n \quad (20)$$

Wtedy z pierwszych  $n-1$  równań (14) otrzymujemy  $n-1$  związków między  $u_k$ .

Z następnych  $n$  równań (15)

dla danego  $u_k$  otrzymujemy po jednej z wielkości  $a_{m+i}^{1m+i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Z następnego równania (16) wyznaczamy  $a_{1l_i}$  dla danego  $i$  z przedziału  $1 \leq i \leq m$ .

Z kolei z  $m-1$  równań (17) otrzymujemy związki między  $a_{1l_i}$ ,  $a_{kl_k}$  dla  $1 \leq i, k \leq m$ .

Ostatnie równanie (18) służy do sprawdzenia poprawności obliczenia. W razie niespełnienia tego równania rachunek powtarzamy ze zmienionymi odpowiednio wartościami  $u_k$ .

Spośród występujących tu funkcji przedyskutujemy tylko wymienione w równaniu (16).

Zakładamy, że  $u_k$  zmieniają się w przedziale  $[0, \pm\infty]$ . Przebieg funkcji  $\text{arctg}$  jest monotoniczny (rys. 1), więc też przebieg funkcji wykładniczej.

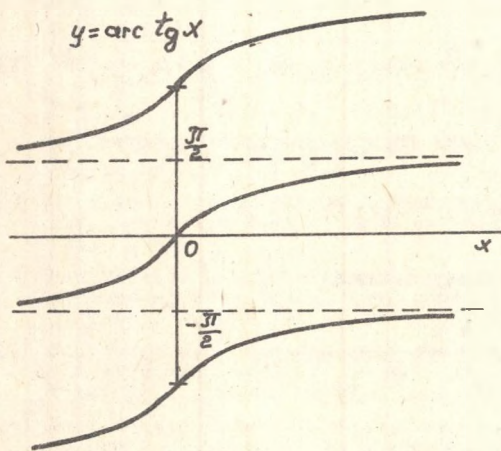
Dla  $u_1 = 0$  ta ostatnia przybiera wartość 1, dla  $u_1 = \pm\infty$  wartość  $\pm(\delta_1 \pi / 2\omega_1)$ , jeśli ograniczymy się do przedziału argumentu  $(0, \pi/2)$ . W przeciwnym przypadku należy do funkcji  $\text{arctg}$  dodać wielokrotność  $p\pi$ ,  $p = \pm 1, 2, \dots$

Funkcja prawej strony równania zmienia się od wartości

$$l_{m+1} a_{m+1} (M_x - M_0) / A_{x,m+1} \quad \text{dla } u_1 = 0$$

do wartości

$$+\infty \quad \text{dla } u_1 \rightarrow \infty$$



Rys. 1. Zależność  $\text{arctg } x$  od  $x$

#### 4. Interpretacja geometryczna metody

Metoda rozwiązywania równania na  $M_X - M_0$  jest modyfikacją metody opisaną w [2]. W pracy tej w celu zmniejszenia liczby wymiarów przestrzeni  $l_1$  wprowadzono współrzędne trójkątowe w przypadku  $i = 3$  i ich uogólnienia dla przestrzeni więcejwymiarowych. Można posłużyć się również kartezjuszowską przestrzenią  $n$ -wymiarową.

Ponieważ jednak funkcje zawierające  $\sin \omega_1 t$  i  $\cos \omega_1 t$  nie są jednoznaczne, eliminujemy je, ograniczając się tylko do funkcji wykładniczych, przez co doprowadzamy równanie na  $M_X - M_0$  do postaci podobnej do przypadku rzeczywistych wykładników pracy [2].

Mianowicie, można napisać

$$A_{x,m+n} e^{-\delta_1 t} \cos \omega_1 t + A_{x,m+n+1} e^{-\delta_1 t} \sin \omega_1 t = e^{-\delta_1 t} (a_{m+1} l_{m+1} + a_{m+n+1} l_{m+n+1}) \sqrt{(a_{m+n+1} l_{m+n+1} (M_X - M_0) / A_{x,m+n+1})^2 + (a_{m+1} l_{m+1} (M_X - M_0) / A_{x,m+1})^2} \quad (21)$$

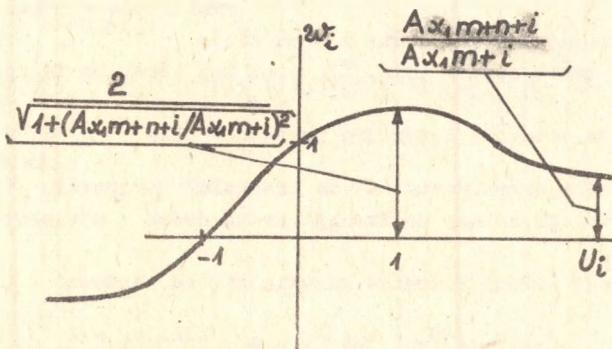
przy czym współczynnik przy  $e^{-\delta_1 t}$  jest funkcją parametru  $u_1$  oraz

$$A_{x,m+1} / (M_X - M_0).$$

Funkcja występująca z prawej strony równania (21)

$$w_1 = \frac{1 + u_1}{\sqrt{1 + (u_1 A_{x,m+1} / A_{x,m+n+1})^2}} \quad (22)$$

posiada przebieg przedstawiony na rysunku 2.



Rys. 2. Funkcja  $w_1 = f(u_1)$



Dla  $u_1 = 0$  otrzymujemy wartość  $w_1 = 1$

$$\begin{aligned} u_1 & \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \pm \infty & w_1 & = A_{x,m+n+1}/A_{x,m+1} \\ u_1 & = -1 & w & = 0 \end{aligned}$$

oraz ekstremum dla  $u_1 = 1$ , równe  $w_1 = 2/\sqrt{1 + (A_{x,m+n+1}/A_{x,m+1})^2}$ .

Ze zmianą czasu  $t$  wielkości  $a_i l_i$  zmieniają się proporcjonalnie do funkcji wykładniczej, zanikającej, odwrotnie proporcjonalnie do wielkości  $M_x - M_0$ , która zmienia się od  $M(0) - M_0$  dla  $t = 0$  do  $-M_0$  dla  $t \rightarrow \infty$ . Ponadto wielkości, odnoszące się do grupy funkcji, zawierających funkcje trygonometryczne, należy pomnożyć przez pewną wartość  $w_1$ , związaną z krzywą (rys. 2), co oznacza zmianę skali. Dla obranych więc wartości  $u_1$  zagadnienie daje się rozpatrywać geometrycznie podobnie, jak w pracy [2].

#### LITERATURA

- [1] Szpilecki J., Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego (praca doktorska nie publikowana),
- [2] Szpilecki J., O pewnym graficznym sposobie przedstawienia równania  $y = \sum_{i=1}^n A_i e^{\alpha_i t}$ ,  $A_i, \alpha_i$  rzeczywiste stałe, i jego rozwiązaniu ze względu na zmienną niezależną. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Energetyka nr 9, 1962, 21-41.
- [3] Szpilecki J.: Oscylacje temperaturowe w układach liniowych o 2 stopniach swobody. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Energetyka nr 11, 1963, 23-39.
- [4] Szpilecki J., Przedstawienie i rozpatrywanie procesów cieplnych w n-wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Energetyka nr 21, 1966, 61-73.
- [5] Szpilecki J., Stan ustalony oscylacji temperatury w układzie liniowym o  $n$  stopniach swobody, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Energetyka, nr 22, 1966, 83-96.
- [6] Szpilecki J., Metody rozwiązywania układu równań stanu ustalonego oscylacji relaksacyjnych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Energetyka nr 25, 1967, 141-149.

ВИДОИЗМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ,  
ВРЕМЕННАЯ ФУНКЦИЯ КОТОРОГО ЯВЛЯЕТСЯ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИЕЙ  
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЭКСПОНЕНТАМИ

#### Р е з ю м е

Метод решения уравнения был использован в одной из предыдущих работ автора для случая, когда функция времени является линейным сочетанием экспоненциальных функций с вещественными экспонентами, с использованием трёхугольных координат или их обобщений или тоже для случая прямоугольных координат, когда нельзя непосредственно применить для случая комплексных показателей.

Предложено видоизменение метода, который основывается на идее замещения экспоненциальных функций с комплексным аргументом такими же функциями с вещественным аргументом.

Метод проводится для 3 и  $n+m$  переменных. Этот метод является итерационным, причём, одно из уравнений служит для проверки правильности решения и конвергенции процесса.

Геометрическое истолкование в принципе возможно как и в предыдущей работе автора, с тем, что экспоненциальные функции, введённые, вместо функции комплексного аргумента зависят от соответствующих параметров  $u_k$ .

Так как в ходе итерационного процесса величина  $u_k$  может изменяться неудобство геометрической интерпретации заключается в том, что для каждого значения  $u_k$  необходимо было бы применить особую конструкцию из-за изменения масштаба. В согласии с обозначениями предыдущей работы введены параметры  $a_1 l_1$ , в случае трёхугольных координат и их обобщений. В случае применения прямоугольных координат Картеза вместо  $a_1 l_1$  могут быть использованы обозначения  $l_1$ .

MODIFICATION OF EQUATION SOLUTION METHOD,  
WHEN THE TIME FUNCTION IS A LINEAR COMBINATION  
OF EXPONENTIAL FUNCTIONS, WITH COMPLEX EXPONENTS

S u m m a r y

Geometrical method of equation solving, used in one of previous authors papers, when the time function was a linear combination of exponentials with real exponents, basing on triangle coordinates and their generalization for  $n$ -dimensional spaces, is unsatisfactory for complex exponents.

The proposed modification consists on the idea, to replace the exponentials with complex arguments by similar ones with real exponents. The method is demonstrated for 3 and  $n+m$  exponentials. It is based on a iteration algorithm, whose correctness and convergency can be verified by use of one of the proposed equations.

The geometrical interpretation is in principle possible, similarly as in the previous paper, but the exponentials (received from complex argument functions) depend on some parameters  $u_k$ . The geometrical construction is for selected  $u_k$  possible as in the previous paper, but varies with  $u_k$ , what is to scale variation equivalent.

In the case of triangle coordinates and their generalizations should be the quantities  $a_1 l_1$  introduced ( $l_1$  - the proposed coordinates). In Cartesian coordinates they can be replaced by  $l_1$ .