ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 32 Nr kol. 609

Józef SZPILECKI
Instytut Fizyki

ROZWIĄZANIE RÓWNANIA BLOCHA-TORREYA METODĄ TRANSFORMACJI HANKELA

Streszczenie. W układzie współrzędnych cylindrycznych rozwiązano równanie Blocha-Torreya metodą transformacji Hankela. W zerowym przybliżeniu rozwiązanie jest sumą 5 składowych. Analogicznie tworzone są przybliżenia wyższego rzędu. Przedyskutowano również przypadki przejścia do osiowej symetrii i walca nieskończenie długiego.

Wstęp

Jeśli w równaniu Blocha-Torreya (skrót: B.T.) [1] wprowadzimy współrzędne cylindryczne

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z,$$

otrzymujemy na składowe pola magnetycznego

$$\begin{aligned} H\varrho &= H_1\sqrt{2}\sin(45^\circ + \varphi),\\ H\varrho &= H_1\sqrt{2}\cos(45^\circ + \varphi),\\ H_z &= H_z. \end{aligned} \tag{1}$$

Wprowadzenie ich do równania B.T. daje równanie o periodycznie zmiennych współczynnikach w funkcji kąta φ, podobne do równania o czasowo periodycznie zmiennych współczynnikach. Daje się ono sprowadzić do postaci o współczynnikach stałych i następnie przez diagonalizację macierzy Blocha B_1 otrzymuje się równanie

$$\partial\mu/\partial t - D\nabla^2\mu = e^{-\mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3)t}(\chi_o/T_1 - \nabla^2 D\chi_o)H +$$

$$+ a_o e^{-\mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3)t}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0, & \gamma H_1 \\ 0 & 0, & b \\ -\gamma H_1, & 0, & 0 \end{pmatrix} + \Delta A_1 + A_2\right] e^{\mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3)t} b_o\mu, \tag{2}$$

podobnie jak w pracy [1]. Oznaczenia jak w pracy [1].

Warunki brzegowe

$$
\begin{aligned}
& r = a_1, \quad \mu = f_1(r_1, z, \varphi), \\
& z = a_2/2, \quad \mu = f_2(r, a_2/2, \varphi), \\
& z = -a_2/2, \quad \mu = f_3(r, -a_2/2, \varphi), \\
& \varphi = 0 = a_3, \quad \mu = f_4(r, z), \\
& t = 0, \quad \mu = f_5(r, z, \varphi).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Funkcje $f_i(r,z,\varphi)$, $i = 1, \ldots, 5$ takie, by dalsze obliczenia miały sens, co daje się zrealizować, ponieważ przedstawiają one wielkości fizykalne.

Zerowe przybliżenie

Równanie zerowego przybliżenia posiada następującą postać

$$
\left\{\partial/\partial t - D\left[\partial^2/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2 + (1/r^2)\partial^2/\partial\varphi^2\right]\right\}\mu =
$$

$$
= e^{-\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)t}(\chi_0/T_1 - \nabla^2 D\chi_0)H \tag{4}
$$

Przyjmujemy rozwiązanie w postaci

$$
\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5, \tag{5}
$$

gdzie:

μ_1 - rozwiązanie równania jednorodnego z warunkiem brzegowym dla r,
μ_2 - rozwiązanie równania jednorodnego z warunkiem początkowym,
μ_3 - rozwiązanie równania jednorodnego z warunkiem dla z,
μ_4 - rozwiązanie równania jednorodnego z warunkiem brzegowym dla φ ,
μ_5 - rozwiązanie równania niejednorodnego z zerowymi warunkami.
Całek równania jednorodnego szukamy w postaci następującej

$$
\mu = F(r,t)\begin{cases} \mathrm{sh}\alpha(a_2/2 - |z|)/\mathrm{sh}\alpha a_2/2 & \sin 21\pi\varphi/a_3 \\ \mathrm{ch}\alpha z/\mathrm{ch}\alpha a_2/2 & \cos 21\pi\varphi/a_3 \end{cases} \tag{6}
$$

Wprowadzając oznaczenia

$$
\varrho = r\alpha\sqrt{D}, \quad p = 21\pi/a_3 \tag{7}
$$

otrzymujemy na wyznaczenie funkcji F następujące równanie:

$$\left\{(1/D\alpha^2)\partial/\partial t - \left[\partial^2/\partial\varrho^2 + (1/\varrho)\partial/\partial\varrho - 1 + (1/\varrho^2)p^2\right]\right\}F(\varrho,t) = 0 \quad (8)$$

Jako rozwiązanie równania (8) przyjmujemy funkcję Bessela 1 rodzaju p rzędu $J_p(\varrho)$. Oznaczając $F(\varrho) = R(\varrho)$, wprowadzamy transformatę Hankela

$$R_J(\xi_i) = \int_0^{a_1} \varrho R(\varrho,t) J_p(\varrho\xi_i) d\varrho, \qquad J_p(a_1\xi_i) = 0 \quad (9)$$

Transformujemy równanie (8)

$$\left[(1/D\alpha^2)d/dt + \xi_i^2 - 1\right]R_J = -a_1\xi_i f_1(a_1,z,\varphi)J_p'(a_1\xi_i) \quad (10)$$

Rozwiązaniem części jednorodnej jest funkcja

$$R_J(\xi_i) = e^{-D\alpha^2(\xi_i^2 - 1)t}. \quad (11)$$

Rozwiązaniem równania niejednorodnego z zerowym warunkiem początkowym jest następująca funkcja

$$R_J(\xi_i) = (A/D\alpha^2)(\xi_i^2 - 1)(1 - e^{-D\alpha^2(\xi_i^2 - 1)t}), \quad (12)$$

gdzie stałą A wyznaczamy z równania

$$-a_1\xi_i f_1(a_1,z,\varphi)J_p'(a_1\xi_i) = A\operatorname{sh}\alpha(a_2/2 - |z|)/\operatorname{sh}\alpha a_2/2\cdot\sin 2l\pi\varphi/a_3, \quad (13)$$

obliczając transformatę równania (13) ze względu na z i φ.

$$-\int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sum \int_0^{a_3} a_1\xi_i f_1(a_1,z,\varphi)J_p'(a_1\xi_i)\left[\operatorname{sh}\alpha(a_2/2 - |z|)/\right.$$

$$\left./\operatorname{sh}\alpha(a_2/2)\right]\sin(2l\pi\varphi/a_3)dz\,d\varphi = A\int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}}\int_0^{a_3}\left[\sin^2(2l\pi\varphi/a_3)\right]$$

$$\cdot\left[\operatorname{sh}^2\alpha(a_2/2 - |z|)/\operatorname{sh}^2\alpha(a_2/2)\right]dz\,d\varphi. \quad (14)$$

Odwrotna do (12) transformata (funkcja czasowa)

$$R(t,\varrho) = (2/a_1^2)\sum_i \left[J_p(\varrho\xi_i)/[J_p'(\varrho\xi_i)]^2\right]\left[A/D\alpha^2(\xi_i^2 - 1)\right]\left[(1 - e^{-D\alpha^2(\xi_i^2 - 1)t}\right] \tag{15}$$

Rozwiązanie μ_1 posiada następującą postać

$$\mu_1 = (2/a_1^2)\sum_{i,l} \left[J_p(\varrho\xi_i)/[J_p'(\varrho\xi_i)]^2\right]\left[A\sin 2l\pi\varphi/a_3/\right.$$

$$\left./D\alpha^2(\xi_i^2 - 1)\right]\left[\mathrm{sh}\alpha(a_2/2 - |z|)/\mathrm{sh}\alpha a_2/2\right](1 - e^{-D\alpha^2(\xi_i^2 - 1)t}) \tag{16}$$

Transformatę rozwiązania μ_2 można napisać w postaci

$$\bar{\mu}_2 = \overline{f_5(\varrho,z,\varphi)}e^{-D\alpha^2(\xi_i^2 - 1)t}\sin(2l\pi\varphi/a_3)\left[\mathrm{sh}\alpha(a_2/2 - |z|)/\mathrm{sh}\alpha(a_2/2)\right] \tag{17}$$

gdzie:

$$\overline{f_5(\varrho,z,\varphi)} = \int_0^{a_1} \varrho f_5(\varrho,z,\varphi)J_p(\varrho\xi_i)d\varrho(2/a_3)\,.$$

$$\int_0^{a_3} \sin(2l\pi\varphi/a_3)d\varphi \int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \left[\mathrm{sh}\alpha(a_2/2 - |z|)/\mathrm{sh}\alpha(a_2/2)\right]dz$$

$$/\int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \left[\mathrm{sh}^2\alpha(a_2/2 - |z|)/\mathrm{sh}^2\alpha(a_2/2)\right]dz. \tag{18}$$

Przejścia do funkcji czasowej można dokonać, znajdując odwrotną transformatę do

$$R_{J,2} = \overline{f_5(\varrho,z,\varphi)}e^{-D\alpha^2(\xi_i^2 - 1)t} \tag{19}$$

według wzoru

$$R(\varrho,t) = (2/a_1^2)\sum_i R_{J,2} J_p(\varrho\xi_i)/[J_p'(\varrho\xi_i)]^2 \tag{20}$$

W celu znalezienia μ_3 transformujemy funkcje $f_2(\varrho,\varphi)$, $f_3(\varrho,\varphi)$ i po przekształceniach otrzymujemy

$$\mu_3 = (2/a_1^2)\sum_{i,l}[J_p(\varrho\xi_i)/[J_p'(\varrho\xi_i)]^2]e^{-D\alpha^2(\xi_i^2-1)t}$$

$$\left\{[(z+a_2/2)/a_2]\overline{f_2(\varrho,a_2/2,\varphi)} - [(z-a_2/2)/a_2]\overline{f_3(\varrho,-a_2/2,\varphi)}\right\}$$

$$[\mathrm{ch}\alpha z/\mathrm{ch}\alpha a_2/2]\sin(2l\pi\varphi/a_3), \tag{21}$$

gdzie transformaty $\overline{f_2(\varrho,\varphi)}$ i $\overline{f_3(\varrho,\varphi)}$ są tworzone, podobnie jak w (18), tylko ze względu na zmienne ϱ, φ.

Podobnie wyznaczamy μ_4

$$\mu_4 = (2/a_1^2)\sum_{i,l}[J_p(\varrho\xi_i)/[J_p'(\varrho\xi_i)]^2]e^{-D\alpha^2(\xi_i^2-1)t}\,.$$

$$\overline{f_4(\varrho,z)}\cos 2l\pi\varphi/a_3[\mathrm{sh}\alpha(a_2/2-|z|)/\mathrm{sh}\alpha a_2/2] \tag{22}$$

gdzie:

$\overline{f_4(\varrho,z)}$ – transformaty ze względu na $\overline{\varrho}_i$ z.

Wreszcie rozwiązanie μ_5

$$\mu_5 = (2/a_1^2)\sum_{i,l}[J_p(\varrho\xi_i)/[J_p'(\varrho\xi_i)]^2](1-e^{-D\alpha^2(\xi_i^2-1)t})$$

$$e^{\mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3)t}[D\alpha^2(\xi_i^2-1)-\mathrm{diag}(s_2,s_2,s_3)]$$

$$(\overline{\chi_0/T_1 - v^2D\chi_0})H\sin 2l\pi\varphi/a_3)[\mathrm{sh}\alpha(a_2/2-|z|)/\mathrm{sh}\alpha(a_2/2)],$$

gdzie:

$(\overline{\chi_0/T_1 - v^2D\chi_0})$ – transformata ze względu na ϱ, z, φ, obliczona podobnie jak w (18).

Dalsze przybliżenia

Podobnie postępujemy przy dalszych przybliżeniach. Otrzymujemy rozwiązanie μ_6, uwzględniając pominięty wyraz prawej strony, zawierający μ. Za μ podstawiamy rozwiązanie poprzedniego przybliżenia. Warunki przyjmujemy zerowe.

Inne przypadki

W pracy rozpatrzono najogólniejszy przypadek zależności od trzech współrzędnych. Rozwiązanie przy nieznacznych modyfikacjach może być również zastosowane w przypadku, gdy mamy zależność od mniejszej ilości zmiennych.

W przypadku osiowej symetrii (niezależność od kąta φ) $p = 0$, w rozwiązaniu występuje funkcja $J_0(\varrho)$.

W przypadku nieskończenie długiego walca o osiowej symetrii (niezależność od z i φ) występuje funkcja $J_0(r)$. Niepotrzebne jest przejście do ϱ.

LITERATURA

[1] Szpilecki J., Rozwiązanie równania Blocha-Torreya metodą całki Fouriera (w druku).

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЛОХА-ТОРРЕЯ МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАНКЕЛЯ

Р е з ю м е

В системе цилиндрических координат было решено уравнение Блоха-Торрея методом преобразования Ганкеля. В нулевом приближении решением является сумма пяти слагаемых. Анологично составлены приближения высшего порядка. Рассмотрены также случаи перехода к осевой симметрии и бесконечно длинного цилиндра.

HANKEL TRANSFORM SOLUTION OF BLOCH-TORREY EQUATION

S u m m a r y

Bloch-Torrey equation in cylindrical coordinates was by Hankel transform method solved. In 0-th approximation is the solution the sum of 5 components. The higher order approximations are similarly formed.

Two other cases: of axial symmetry and of infinitely long cylinder were also discussed.