ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 32 Nr kol. 609

Józef SZPILECKI

ROZWIĄZANIE RÓWNANIA BLOCHA-TORREYA METODĄ CAŁKI FOURIERA

Streszczenie. W przypadku jednej z postaci równania Blocha Torreya, dyskutowanych w poprzednich pracach autora, podano rozwiązanie równania metodą całki Fouriera w współrzędnych prostokątnych x,y,z, użyteczne w zasadzie także w innych przypadkach przedstawienia równania Blocha Torreya.

Wstęp

Jeden z wariantów przedstawienia równania Blocha-Torreya (dalej: B.T.), rozpatrzonych w [1], prowadzi do następującego równania

$$\partial M/\partial t - B_1 M - \nabla^2(DM) = (\chi_o/T_1 - \nabla^2 D\chi_o)H +$$

$$+ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma H_2 \\ 0 & 0 & -\gamma H_1 \\ \gamma H_2, & -\gamma H_1, & 0 \end{pmatrix} + \Delta A_1 + A_2\right] M, \tag{1}$$

gdzie:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1/T_2, & \gamma\bar{H}_o & 0 \\ -\gamma\bar{H}_o & -1/T_2, & 0 \\ 0 & 0 & -1/T_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} H_1^2 & H_1H_2, & H_1H_o \\ H_2H_1, & H_2^2, & H_2H_o \\ H_oH_1, & H_oH_2, & H_o^2 \end{pmatrix} 1/\left[T(H_o^2 + H_1^2 + H_2^2)\right] \tag{3}$$

Składowe pola magnetycznego przyjęto w postaci

$$H_i = \bar{H}_i + \Delta H_i, \quad i = 0,1,2 \tag{4}$$

gdzie:

$\bar{H}_i$ - składowa przestrzennie stała,

ΔH_i - powoli zmienna funkcja współrzędnych przestrzennych,

M - wektor namagnesowania,

D - stały współczynnik dyfuzji,

χ_o - stała podatność magnetyczna,

T_1 - czas relaksacji,

H - wektor-kolumna o elementach $(0,0,H_o)$.

W macierzy ΔA_1, analogicznie zbudowanej jak B_1, występują jako elementy ΔH_i.

Przy pomocy przekształcenia [1]

$$\tilde{M} = a_o M, \quad M = b_o \tilde{M} \tag{5}$$

diagonalizujemy macierz B_1 (s_i, i = 1,2,3 - wartości własne)

$$\partial\tilde{M}/\partial t - \mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3)\tilde{M} - \nabla^2 D\tilde{M} = (\chi_o/T_1 - \nabla^2 D\chi_o)H +$$

$$+ a_o \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma H_2 \\ 0 & 0 & \gamma H_1 \\ \gamma H_2, & -\gamma H_1, & 0 \end{pmatrix} + \Delta A_1 + A_2\right] b_o\tilde{M}, \tag{6}$$

Wyrażenia w macierzy prawej strony przyjęto małe: $\bar{H}_1, \bar{H}_2 \ll \bar{H}_o$, $\Delta H_i \ll \bar{H}_i$ w całym obszarze (małe wymiary próbki).

Przy pomocy przekształcenia

$$M = e^{\mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3)t}\mu, \tag{7}$$

otrzymujemy na μ nowe równanie

$$\partial\mu/\partial t - \nabla^2(D\mu) = e^{-\mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3)t}(\chi_o/T_1 - \nabla^2 D\chi_o)H +$$

$$e^{-\mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3)t} a_o \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma H_2 \\ 0 & 0 & \gamma H_1 \\ \gamma H_2, & -\gamma H_1, & \end{pmatrix} + \Delta A_1 + A_2\right] b_o e^{\mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3)t}\mu \tag{8}$$

Równanie (8) rozwiązujemy metodą kolejnych przybliżeń, metodą całki Fouriera we współrzędnych prostokątnych x,y,z. W zerowym przybliżeniu pomijamy z prawej strony wyrażenie, zawierające μ, oznaczone dalej P(t,x,y,z).

Rozwiązanie zerowego przybliżenia

Rozwiązanie przyjmujemy w postaci następującej

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \tag{9}$$

gdzie:

μ_1 - rozwiązanie równania jednorodnego, spełniające warunki początkowe i zerowe warunki brzegowe,

μ_2 - rozwiązanie równania jednorodnego, spełniające zerowe warunki początkowe i niejednorodne warunki brzegowe,

μ_3 - rozwiązanie równania niejednorodnego, spełniające zerowe warunki początkowe i brzegowe.

Ogólna postać rozwiązania równania jednorodnego w obszarze nieskończonym

$$(1/2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\varrho t + j\alpha(x-\xi) + j\beta(y-\eta) + j\gamma(z-\zeta)} d\alpha d\beta d\gamma d\xi d\eta d\zeta \tag{10}$$

jeśli spełniony jest warunek

$$\varrho + D(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0. \tag{11}$$

Ze względu na niejednorodne warunki brzegowe przyjmujemy skończoną transformację ze względu na współrzędne x,y,z, więc

$$\mu_1 = \sum_{k,l,m} e^{\varrho t}(8/a_1a_2a_3)\sin(k\pi x/a_1)\sin(l\pi y/a_2)\sin(m\pi z/a_3)\cdot$$

$$\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\int_0^{a_3} f(x,y,z)\sin(k\pi x/a_1)\sin(l\pi y/a_2)\sin(m\pi z/a_3)dxdydz \tag{12}$$

gdzie:

$f(x,y,z)$ - początkowa wartość rozwiązania,

a_i, $i=1,2,3$ - wymiary próbki.

O występujących w zagadnieniu funkcjach f, f_i zakładamy, że spełniają warunki Dirichleta i zaznaczone działania mają sens.

Z warunku (11) wynika, że $\varrho < 0$, wtedy [2]:

$$\int_0^{\infty} e^{-|\varrho| t} e^{j\omega t} dt = 1/(|\varrho| - j\omega),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}(1/(|\varrho| - j\omega))d\omega = 2\pi e^{-|\varrho| t}. \tag{13}$$

Rozwiązanie μ_3 otrzymujemy, przedstawiając wyrażenie prawej strony równania w postaci całki Fouriera, spełniającej zerowy warunek początkowy i zerowe warunki brzegowe. Wykorzystujemy przy tym fakt, że funkcję czasową można przyjąć w postaci

$$\begin{matrix} e^{-\varrho_1 t} e^{j\varrho_2 t} & \text{dla} & t > 0 \\ 0 & & t < 0 \end{matrix} \tag{14}$$

o transformacie Fouriera

$$j/\sqrt{2\pi}(\varrho_2 + \omega + j\varrho_1). \tag{15}$$

Uzupełniając jej definicję wartością 1/2 dla $t = 0$, otrzymujemy rozmyty przebieg, zerujący się jednak w najbliższym sąsiedztwie wartości $t = 0$, co może być przyjęte za fizykalnie dobrą aproksymację.

Z kolei szukamy rozwiązania równania niejednorodnego tej samej postaci, jak wyrażenie prawej strony (ze stałą proporcjonalności K_1), która spełnia warunek

$$K_{1,k,l,m} = \varrho_1 + j\varrho_2 - D\left[(k\pi/a_1)^2 + (l\pi/a_2)^2 + (m\pi/a_3)^2\right] \neq 0 \tag{16}$$

Daje to

$$\mu_3 = \frac{1}{\pi} \sum_{k,l,m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega (j/(\varrho_2 + \omega + j\varrho_1))(1/K_{1,k,l,m}) \cdot$$

$$\sin(k\pi x/a_1)\sin(l\pi y/a_2)\sin(\varrho z/a_3)(8/a_1 a_2 a_3) \cdot$$

$$\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}\int_0^{a_3} (\varkappa_0/T_1 v^2 D\varkappa_0) H \sin(k\pi x/a_1)\sin(l\pi y/a_2)\sin(m\pi z/a_3)dxdydz \tag{17}$$

Funkcja μ_2 może być dowolna, byle spełniała zerowy warunek początkowy i niejednorodne warunki brzegowe, np. dla współrzędnej x można ją przyjąć w następującej postaci:

$$(1 - x/a_1)f_1(0,y,z) + (x/a_1)f_2(a_1,y,z), \tag{18}$$

gdzie:

f_i - znane funkcje, określone przez warunki brzegowe.

Podobnie można przyjąć dla pozostałych zmiennych.

Po podstawieniu do prawej strony równania, otrzymujemy (dla prostoty) dla składowej x

$$e^{-\varrho_1 t} e^{j\varrho_2 t} \Big\{ - (-\varrho_1 + j\varrho_2) + D(\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2) \cdot \\ \cdot \left[(1 - x/a_1)f_1(0,y,z) + (x/a_1)f_2(a_1,y,z)\right]\Big\} \tag{19}$$

i podobnie dla pozostałych składowych.

Funkcja prawej strony, spełniająca warunki brzegowe, będzie złożona z trzech funkcji, z których każda spełnia jeden niejednorodny warunek brzegowy i dwa pozostałe warunki brzegowe zerowe.

Znajdujemy transformaty Fouriera tych funkcji i następnie szukamy analogicznie zbudowanych rozwiązań równania niejednorodnego.

Otrzymujemy w ten sposób następującą postać rozwiązania

$$\mu_2 = \frac{1}{K} \sum_{k,l,m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega \sin(l\pi y/a_2)\sin(m\pi z/a_3)(4/a_2 a_3)$$

$$\int_0^{\infty} e^{j\omega t} dt \int_0^{\frac{a_1}{2}} \int_0^{a_2} \int_0^{a_3} \sin(l\pi y/a_2)\sin(m\pi z/a_3)\cos(2k\pi x/a_1) \cdot$$

$$\cdot \left[D(\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2) - (\varrho_1 + j\varrho_2)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[(1 - x/a_1)f_1(0,y,z) + (x/a_1)f_2(a_1,y,z)\right] e^{-\varrho_1 t} e^{j\varrho_2 t} (1/K_{1,k,l,m}) dx dy dz \ \ldots \tag{20}$$

We wzorze (20) wypisano explicite tylko część odnoszącą się do funkcji spełniającej warunki na osi x. Kropkami zaznaczono, że należy jeszcze wypisać analogiczne wyrażenia dla pozostałych osi współrzędnych.

K_1 - stała obliczana analogicznie jak w przypadku funkcji μ_3.

Przybliżenie pierwsze i dalsze

W pierwszym przybliżeniu uwzględniamy z prawej strony równania (8) jeszcze wyrażenie oznaczone wyżej P(t,x,y,z), w którym w przypadku pierwszego przybliżenia podstawiamy przybliżenie zerowe za μ, w dalszych zaś przybliżeniach (np. i-tym) rozwiązanie o wskaźniku i-1. Następnie dodatkowe wyrażenie przedstawiamy w postaci całki Fouriera, spełniającej zerowe warunki: początkowy i brzegowe i podobnie jak w przypadku μ_3 znajdujemy odpowiednie rozwiązanie.

Ponieważ w elemencie (i,k) rozwiązań występuje czynnik $e^{(-s_i+s_k)t}$, przez odpowiedni dobór funkcji czasowej zapewnimy zbieżność odpowiedniej całki.

Mnożąc otrzymane rozwiązanie na μ z lewej strony przez $e^{(\mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3)t}$ i a_0, wracamy do pierwotnych zmiennych M. Ponieważ różne, rozpatrzone poprzednio warianty, różniły się jedynie postacią macierzy B_1, można metodę stosować także w innych wariantach [1, 3].

LITERATURA

[1] Szpilecki J., Kilka wariantów rozwiązań równania B.T., Materiały IX Ogólnopolskiego Seminarium na temat: Magnetycznego rezonansu jądrowego i jego zastosowań, Kraków 1977, 167-171.

[2] Gradsztajn J.S., Ryżik I.M., Tablicy integrałow, summ, riadow i projzwiedienij, Izd. Nauka Moskwa 1971.

[3] Szpilecki J., Dwie metody rozwiązania równania Blocha, Materiały IX Ogólnopolskiego Seminarium na temat: Magnetycznego rezonansu jądrowego i jego zastosowań, Kraków 1977, 172-176.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЛОХА-ТОРРЕЯ МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ФУРЬЕ

Р е з ю м е

В случае одного из видоизменений уравнения Блоха-Торрея рассмотренных в предыдущих работах автора, использован метод преобразования интегрального Фурье в прямоугольных координатах x,y,z используемых в принципе для других случаев уравнения Блоха-Торрея.

FOURIER TRANSFORM METHOD OF BLOCH TORREY EQUATION SOLUTION

S u m m a r y

In the case of one of the in previous paper discussed form of Bloch Torrey equation representation was the Fourier transform method of solution in x,y,z coordinates given, usefull on principle also for other forms of Bloch Torrey equation representation.