ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 32 Nr kol. 609

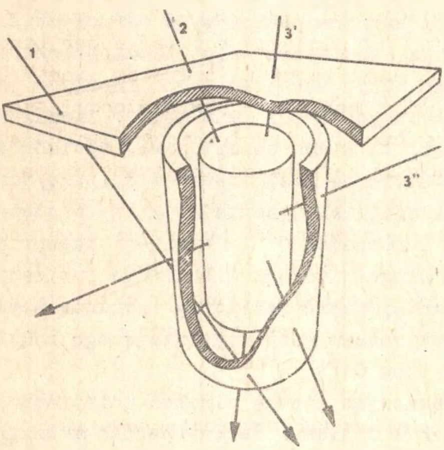
Adam WALANUS, Mieczysław F. PAZDUR

STATYSTYCZNE PROBLEMY KONTROLI WYDAJNOŚCI DETEKCJI LICZNIKA PROPORCJONALNEGO PRZY POMIARACH NATURALNYCH AKTYWNOŚCI C-14

Streszczenie. Wydajność detekcji licznika proporcjonalnego kontroluje się poprzez wyznaczanie wartości parametru c, zdefiniowanego jako iloraz liczb impulsów wywołanych składową przenikliwą promieniowania kosmicznego. W artykule przedstawiono rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej c oraz przedyskutowano jego uogólnienie na przypadek fluktuacji średnich wartości szybkości zliczeń, związanych ze zmianami natężenia składowej mionowej promieniowania kosmicznego.

1. Pomiary aktywności C^{14} za pomocą licznika proporcjonalnego

W pomiarach chronometrycznych metodą C-14 wiek próbki wyznacza się mierząc szybkość zliczeń impulsów pochodzących od rozpadów C^{14} próbki oraz określając szybkość zliczeń standardu współczesnej aktywności i tła detektora. Najczęściej stosowanymi detektorami są liczniki proporcjonalne. Wypełniane są one gazem zawierającym węgiel (CO_2, C_2H_2 lub CH_4) z odpowiednią koncentracją izotopu C^{14}. Licznik L-1 Laboratorium C-14 w Gliwicach, na przykładzie którego będą dalej omawiane wszystkie zagadnienia, ma objętość czynną ok. 1,8 l i wypełniany jest dwutlenkiem węgla do ciśnienia 1 atm [1]. Naturalna koncentracja C^{14} w biosferze jest taka, że w tej ilości CO_2 zachodzi ok. 15 rozpadów na minutę. Dla osiągnięcia chronometrycznego zasięgu do 40 000 lat należy sobie zapewnić możliwość mierzenia aktywności rzędu setnych pCi, czyli ok. 0,05 cpm. Nakłada to szczególne wymagania między innymi na reprodukowalność wy-



Rys. 1. Szkic ustawienia liczników osłony antykoincydencyjnej. Licznik proporcjonalny otoczony jest wieloelektrodowym licznikiem pierścieniowym. Nad nim znajduje się szereg ułożonych obok siebie zwykłych liczników G-M tworzących tzw. tacę. Zaznaczone są możliwe tory przejść mionów promieniowania kosmicznego

ników pomiarów, tzn. niezmienność w długich okresach czasu wszystkich podstawowych parametrów aparatury pomiarowej. Ponadto konieczne jest osiągnięcie odpowiednio niskiego poziomu tła. Wielkość tła licznika można silnie zredukować stosując osłony materiałowe z bloków żelaza i ołowiu. Najczęściej jest to jednak nie wystarczające, np. w liczniku L-1 pozostaje wtedy jeszcze ok. 190 impulsów na minutę, z których większość pochodzi od mionów wtórnego promieniowania kosmicznego [2]. By zmniejszyć tło do wartości porównywalnych z aktywnością C^{14}, stosuje się osłony antykoincydencyjne z liczników Geigera-Müllera. Liczniki osłony ułożone są tak, by każdy mion, który przeszedł przez licznik proporcjonalny, musiał również przejść przez objętość czynną co najmniej jednego z tych liczników (rys.1).

Układ antykoincydencyjny pozwala wyeliminować składową mionową tła, które redukuje się w ten sposób do wartości ok. 10 cpm. Taka wartość tła pozwala już przy pomiarze trwającym 2-4 doby osiągnąć odpowiednio niską wartość błędu statystycznego wynoszącą ok. 0,4-0,6%. Oszacowane błędy aparaturowe nie przekraczają w żadnym wypadku wielkości błędu wynikającego z losowości procesu rozpadu promieniotwórczego. Całkowity czas pomiaru podzielony jest, celem umożliwienia kontroli statystycznej wyników, na odcinki stuminutowe.

2. Wykorzystanie osłony antykoincydencyjnej do kontroli pracy licznika proporcjonalnego

W celu zapewnienia reprodukowalności wyników pomiarów, w warunkach nowego z każdą próbką wypełnienia licznika, konieczne jest bieżące kontrolowanie wydajności licznika pomiarowego. Użyć można do tego impulsów pochodzących od mionów, tj. będących w koincydencji z impulsami z liczników osłony. Podstawowe znaczenie ma tu fakt, że widma amplitudowe impulsów od mionów i od C^{14} są zbliżone do siebie. Istotne jest również to, że tory mionów w objętości czynnej licznika układają się względem nici anodowej mniej więcej tak, jak tory elektronów z rozpadów C^{14}. Wynika z tego, że podobne są w obu przypadkach rozkłady długości drogi elektronów jonizacji do anody i tym samym np. ewentualne zmniejszanie amplitudy impulsów wywołane obecnością elektroujemnych zanieczyszczeń gazu wypełniającego będzie takie samo dla impulsów od mionów jak i od C^{14}.

Pracę licznika kontroluje się, sprawdzając liczbę zliczeń koincydencji L pomiędzy licznikiem proporcjonalnym a licznikami osłony. Jednak ze względu na zmienność intensywności strumienia mionów, związaną między innymi ze zmianami ciśnienia atmosferycznego, nie używa się bezpośrednio wielkości L a ilorazu $c = L/N$, gdzie N jest liczbą zliczeń koincydencji pomiędzy dwoma licznikami osłony [3]. Wielkość c zależy tylko od stosunków geometrycznych zespołu licznikowego, rozkładu kątowego mionów oraz od wydajności licznika proporcjonalnego (z pomiarów kalibracyjnych oraz z braku zależności tła od ciśnienia atmosferycznego można wnioskować, że wydajność liczników osłony dla mionów jest stała i wynosi blisko 100% [4]).Jak wykazała praktyka, zmienna c jest bardzo czuła na wszelkie zakłócenia pracy licznika proporcjonalnego. Można ją nawet wykorzystywać do wprowadzania ilościowych poprawek do wyników pomiarów, które zostały uznane za wykonane w warunkach odbiegających od standardowych, ale nadające się jeszcze do wykorzystania.

3. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa zmiennej c

Na rys. 1 przedstawiony jest schematycznie zespół licznikowy oraz możliwe tory mionów przechodzących przez liczniki. Ponieważ istnieją dwa kanały, L i N, rozróżnialne są trzy jakościowo różne tory:

1) przejście mionu przez oba liczniki osłony - impuls w kanale N,
2) przejście przez wszystkie trzy liczniki (lub pęk cząstek) - impulsy w kanałach L i N,
3) (3' lub 3") przejście przez jeden z liczników osłony i licznik proporcjonalny - kanał L.

Liczby mionów x_i, które przeszły torem typu i, i = 1,2,3, w czasie pomiaru cząstkowego są zmiennymi losowymi niezależnymi o rozkładzie Poissona (o ile zaniedbać fluktuacje intensywności strumienia mionów, gdyż wtedy stają się one zależne i podlegają ujemnemu rozkładowi dwumianowemu [5]). Wartości x_i są tego rzędu, że można rozkład Poissona aproksymować rozkładem normalnym o wariancji równej wartości oczekiwanej [6].

Z powyżej wprowadzonych określeń wynikają następujące zależności

$$L = x_2 + x_3, \quad N = x_1 + x_2 \quad \text{oraz} \quad c = \frac{L}{N} = \frac{x_2 + x_3}{x_2 + x_1}. \tag{1}$$

Zmienna losowa c jest więc ilorazem dwóch zależnych zmiennych losowych normalnych. Współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi L i N wynosi

$$r = \frac{m_2}{[(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)]^{1/2}}, \tag{2}$$

gdzie $m_i = E[x_i]$, i = 1,2,3.

Przy wyprowadzaniu rozkładu gęstości prawdopodobieństwa zmiennej c celowe jest przyjęcie założenia, że wartość oczekiwana $N_o = E[N]$ jest dużo większa od dyspersji N, czyli

$$N_o^{1/2} \gg 1. \tag{3}$$

Można wtedy, nie popełniając większego błędu, nie uwzględniać ujemnych wartości N wynikających z przyjętego dla tej zmiennej rozkładu normalnego. W praktyce nierówność (3) jest spełniona z dużym zapasem.

Zmienna c jest określona przez trzy niezależne jednoparametrowe zmienne, zatem jej rozkład ma trzy parametry liczbowe, których rolę mogą spełniać, np. wielkości N_o, r oraz $c_o = E[L]/E[N]$ - praktycznie, wartość oczekiwana c. Dwa ostatnie parametry zależą od geometrii układu liczników i rozkładu kątowego torów mionów, N_o charakteryzuje ilość mionów zliczanych w czasie pomiaru. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa zmiennej c w tym układzie parametrów ma postać

$$g(c;\, c_o, N_o, r) = \left(\frac{N_o}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{c(c_o - rc_o^{1/2}) + c_o(1 - rc_o^{1/2})}{(c^2 - 2crc_o^{1/2} + c_o)^{3/2}} \exp\left[-\frac{N_o}{2}\,\frac{(c-c_o)^2}{c^2 - 2crc_o^{1/2} + c_o}\right] \tag{4}$$

Rozkład ten nie ma momentów, gdyż w nieskończoności maleje jak c^{-2}. Dla r = 0 przechodzi on w rozkład prawdopodobieństwa Geary'ego [7]. Podobny rozkład dla przypadku braku korelacji pomiędzy L i N został znaleziony przez Mościckiego [3] bez ograniczenia (3). Rozkład ten różni się od g(c) o dodatkowy czynnik i składnik, których wielkość dla praktycznych wartości parametrów jest rzędu 10^{-2000}, co potwierdza słuszność przyjęcia założenia (3).

Wielkość c_o jest medianą rozkładu g(c). Przekształcenie

$$y = \left(\frac{N_o}{c^2 - 2crc_o^{1/2} + c_o}\right)^{1/2} (c - c_o), \tag{5}$$

przeprowadza zmienną c w zmienną y, która ma rozkład normalny unormowany. Korzystając z niego, można wyznaczyć dokładnie dowolne przedziały ufności dla c. W praktyce wystarczające jest przybliżenie rozkładu g(c) za pomocą rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej c_o i dyspersji

$$\sigma_c = \left[\frac{c_o(1 - 2rc_o^{1/2} + c_o)}{N_o}\right]^{1/2}. \tag{6}$$

Błąd tego przybliżenia wynosi 3% dla kwantyli rzędu 0,9997, dla niżej podanych parametrów rozkładu i maleje ze wzrostem N_o. Dokładny wzór na dyspersję rozkładu g(c) ma postać

$$\sigma_c = \frac{c_o^{1/2}}{N_o - 1}\left\{c_o^{1/2} - r + \left[N_o(1 - 2rc_o^{1/2} + c_o) - 1 + r^2\right]^{1/2}\right\}. \tag{7}$$

Należy zaznaczyć, że termin dyspersja ma w tym przypadku charakter umowny, gdyż g(o) nie ma momentów. Dyspersja ma tu znaczenie różnicy pomiędzy kwantylem rzędu 0,841 (1 sigma rozkładu normalnego) a kwantylem rzędu 0,5.

Współczynnik korelacji r jest związany z c_o zależnością $r^2 \leq c_o \leq r^{-2}$. Wartość liczbową współczynnika korelacji wyznaczono ze wzoru (2), wykonując specjalne pomiary. Wielkość tę można również określić, wykorzystując wyniki pomiarów próbek, obliczając dla wielu serii pomiarowych estymator współczynnika korelacji pomiędzy L i N. W tym drugim przypadku należy zwrócić uwagę na możliwość zawyżenia r w wyniku zmienności intensywności strumienia mionów dającej dodatkową dodatnią korelację pomiędzy L i N. Obydwa sposoby wyznaczenia r dały zgodnie, w ramach błędów statystycznych, wartości $r = 0{,}24 \pm 0{,}06$ (wg wzoru (2)) i $r = 0{,}23 \pm 0{,}05$. Wartości parametrów c_o i N_o ustalono, obliczając średnie z dużej ilości ocenionych jako poprawne pomiarów. Otrzymano odpowiednio $c_o = 1{,}411$, $N_o = 12990$. Dyspersja c dla tych wartości parametrów obliczona wg wzoru (6) wynosi $\sigma_c = 0{,}014$, co dobrze zgadza się z otrzymywanymi z pomiarów wartościami odchylenia średniokwadratowego zmiennej c. Wielkość σ_c jest wykorzystywana przy stosowaniu kryteriów odrzucania wyników odstających.

Analogicznie do dyspersji c dla pojedynczego pomiaru cząstkowego można określić dyspersję $\sigma_{\bar c}$ wartości średniej c dla całego pomiaru próbki składającego się z n stuminutowych pomiarów. Dyspersję c można obliczyć ze wzoru (6), wstawiając w miejsce N_o wartość oczekiwaną ilości impulsów od mionów zliczonych w kanale N w czasie całego pomiaru, wynoszącą $n \cdot N_o$ lub wykorzystując zależność

$$\sigma_{\bar c} = \sigma_c / n^{1/2}. \tag{8}$$

Znajomość $\sigma_{\bar c}$ jest konieczna do oceny istotności odchyłek $\bar c$ od c_o będących miarą poprawności pomiaru.

4. Wpływ fluktuacji intensywności strumienia mionów na zmienną c

Wspomniany już efekt fluktuacji gęstości strumienia mionów nie ma, co prawda, wpływu na wartość oczekiwaną c, może jednak spowodować zwiększenie się rozrzutu tej zmiennej. Celem ilościowego ujęcia tego efektu uogólniono rozkład g(c), wprowadzając dodatkowy parametr v charakteryzujący zmienność średniej ilości zarejestrowanych mionów, spowodowaną np. fluktuacjami ciśnienia atmosferycznego. Dokonano tego poprzez randomizację N_o, czyli przyjęcia, że wielkość ta jest zmienną losową. Założono, że ma ona rozkład normalny o wartości oczekiwanej N_o' i dyspersji $v \cdot N_o'$. Liczbowo N_o' jest równe parametrowi N_o przed randomizacją, a współczynnik wariacji v charakteryzuje tę część widma fluktuacji ciśnienia atmosferycznego, która odpowiada okresom z przedziału 100 min < T < 1 tydzień.

Otrzymany czteroparametrowy rozkład gęstości prawdopodobieństwa $h(c;\ c_o,N_o,r,v)$ ilościowo minimalnie różni się od rozkładu $g(c)$, choć jego postać matematyczna jest bardziej skomplikowana. Wykorzystując dla skrócenia zapisu zmienną y określoną wzorem (5), w którym należy zamienić N_o na N_o', można rozkład $h(c)$ przedstawić następująco

$$h(c;\ c_o,N_o',r,v) = \left(\frac{N_o'}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{c(c_o-rc_o^{1/2}) + c_o(1-rc_o^{1/2})}{(c^2-2crc_o^{1/2}+c_o)^{3/2}} \tag{9}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}y^2v^2\right)^{1/2}\left[1 - S\left(\left(\frac{1}{2}y^2v\right)^{-2}\right)\right]\exp\left[-\frac{1}{2}y^2\left(1-\frac{1}{4}y^2v^2\right)\right],$$

gdzie:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k \frac{1.3.\ \ldots\ .(4k-3)}{2.4.\ \ldots\ .(4k)}\ 1.3.\ \ldots\ .(2k-1) \tag{10}$$

Rozkład ten otrzymano przy założeniu

$$v \ll 1 \tag{11}$$

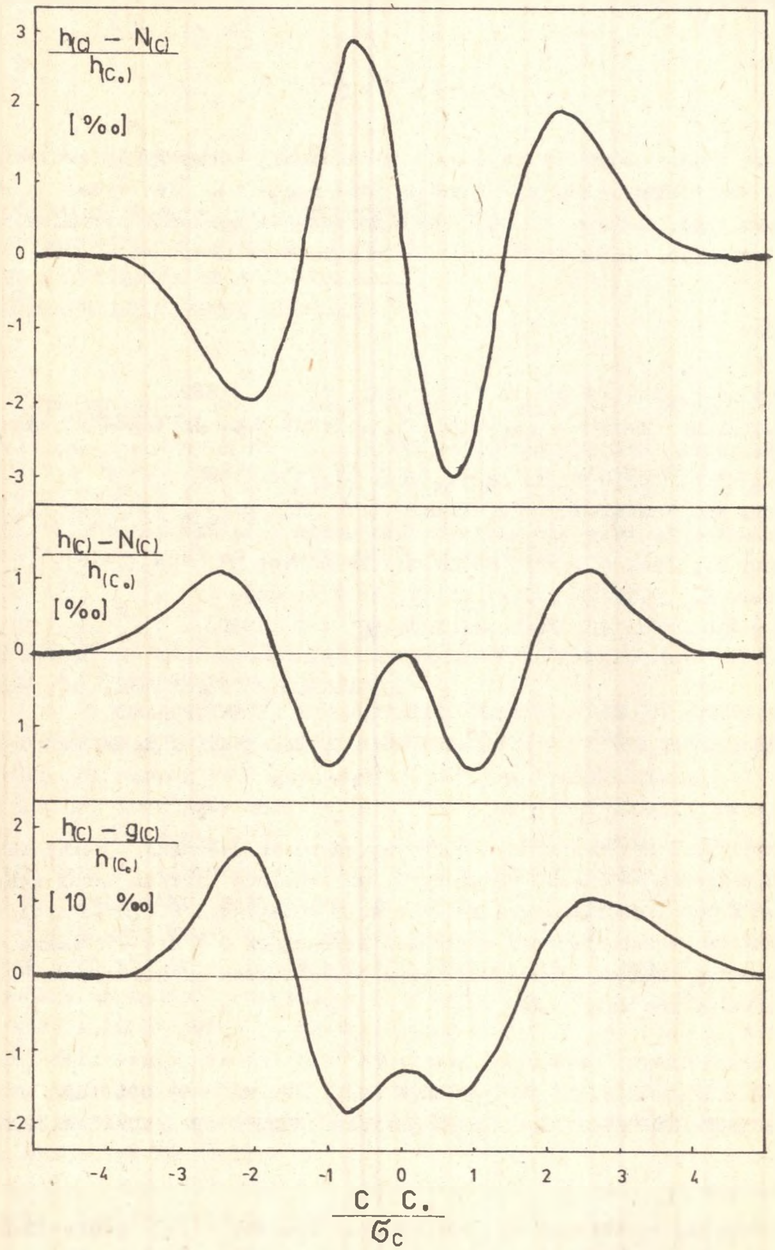
analogicznym w pewnym stopniu do założenia (3).

Szereg S jest rozbieżny, wynika to z faktu, iż w trakcie obliczeń wykorzystano rozwinięcie funkcji $(1+x)^{1/2}$ w szereg poza przedziałem zbieżności. Było to konieczne do obliczenia wartości oczekiwanej z tej funkcji, gdzie zmienna x miała rozkład normalny o wartości oczekiwanej równej zeru i dyspersji rzędu v. Założenie (11) oznacza, że prawdopodobieństwo odpowiadające ujemnej wartości pod pierwiastkiem jest minimalne. Dlatego też procedura polegająca na odrzuceniu dalszej części szeregu powinna dawać poprawne wyniki. Zostało to sprawdzone numerycznie z dokładnością rzędu 5%, ponadto warto zauważyć, że dla $v = 0,01$ wyrazy szeregu S maleją aż do $k = 5000$, osiągając wielkość 10^{-16000}.

Na rys. 2 dokonane jest graficzne porównanie $h(c)$ z odpowiednim rozkładem normalnym oraz z rozkładem $g(c)$.

Dyspersja zmiennej c wg rozkładu $h(c)$ określona przez analogię z rozkładem normalnym jako

$$\sigma_c = \left[(2\pi)^{1/2}h(c_o)\right]^{-1} \tag{12}$$



Rys. 2. Wykresy różnic pomiędzy rozkładem gęstości prawdopodobieństwa h(c) a rozkładem normalnym N(c) dobranym tak by $h(c_o) = N(c_o)$ oraz pomiędzy h(c) a g(c) o tych samych wspólnych parametrach. Wartości parametrów rozkładu h(c): $c_o = 1$, $r = 0{,}5$ we wszystkich trzech przypadkach, $N_o = 2.10^4$, $v = 0{,}01$ - krzywa A, $N_o = 2.10^8$, $v = 0{,}1$ - krzywa B, $N_o = 10^2$, $v = 0.01$ - krzywa C

wynosi w przybliżeniu

$$\sigma_c' = \sigma_c\left(1 + \frac{v^2}{8}\right). \tag{13}$$

Wartość v oszacowana na podstawie wyznaczonej eksperymentalnie zależności N_o od ciśnienia atmosferycznego jest rzędu 1%. Jak widać z rys. 2 i ze wzoru (13), oznacza to, że efekt zmienności gęstości strumienia mionów jest z punktu widzenia zmiennej c zupełnie nieistotny.

LITERATURA

[1] Mościcki W., Zastawny A., Nukleonika, 7, 801 (1962).

[2] Mościcki W., Zastawny A., Konf. N.T. Zast. Nat. Izotopów Prom. w Hydrogeologii, Katowice 1974, s. 270.

[3] Mościcki W., Acta Phys. Polon. vol. 17, 311 (1958).

[4] Pazdur M., Kostkiewicz E., Mościcki W., Pazdur A., Pomykała W., Zastawny A., Zeszyty Nauk. Polit. Sl. seria Mat.-Fiz. nr 23, 51 (1974).

[5] Pazdur M., Int. J. appl. Radiation Isotopes, 27, 179 (1976).

[6] Sneyers R., Tijdschr. Statist. 5, nr 2 (1964).

[7] Geary R.C., Roy J., Statist. Soc. 93, 442 (1930).

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ КОНТРОЛЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО СЧЁТЧИКА ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ ЕСТЕСТВЕННЫХ АКТИВНОСТЕЙ С-14

Р е з ю м е

Эффективность детектирования пропорционального счётчика контролируется путем определения величины параметра С, являющегося частным чисел импульсов вызванных жёсткой составляющей космического излучения. В статье представлено распределение вероятностей случайной переменной С и его обобщение на случай флуктуации средних величин скорости счёта вызванных изменением интенсивности космического излучения.

SOME STATISTICAL PROBLEMS CONNECTED WITH THE CONTROL OF COUNTING EFFICIENCY OF PROPORTIONAL COUNTER IN MEASUREMENTS OF NATURAL RADIOCARBON

S u m m a r y

The counting efficiency of proportional counter is controlled by determining the value of parameter c, defined as the ratio of numbers of pulses caused by hard component of cosmic radiation. In the article is presented the probability distribution of random number c and its generalization for the case of fluctuations of mean counting rates, caused by changes of the intensity of muon flux.