ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 32 Nr kol. 609

Mieczysław F. PAZDUR

ROZKŁAD PRAWDOPODOBIEŃSTWA STOSUNKU ESTYMATORÓW WARIANCJI SZYBKOŚCI ZLICZEŃ

Streszczenie. Wyprowadzono wzór na funkcję gęstości prawdopodobieństwa stosunku estymatorów wariancji szybkości zliczeń, używanych przy opracowaniu wyników pomiarów radioaktywności. Podano wyrażenia na parametry tego rozkładu oraz wykazano, że w granicy przechodzi on w rozkład χ^2/f. Opisano program numerycznego obliczenia kwantyli oraz podano tabelę wyników obliczeń dla kilku wartości stopni swobody.

1. Wprowadzenie

Analiza statystyczna wyników pomiarów radioaktywności jest zagadnieniem skomplikowanym, zwłaszcza przy precyzyjnych pomiarach najniższych aktywności. W pomiarach radioaktywności mamy do czynienia z nałożeniem się szeregu trudnych do oszacowania i wyeliminowania zjawisk przypadkowych na proces rozpadu promieniotwórczego, który sam ma charakter przypadkowy. Przy pomiarach niskich aktywności dla uzyskania odpowiedniego materiału statystycznego pomiar musi często trwać kilkadziesiąt godzin. Wraz ze wzrostem czasu pomiaru maleje błąd standardowy, wynikający z rozkładu Poissona, jednakże jednocześnie wzrasta prawdopodobieństwo rozstrojenia się aparatury pomiarowej, wystąpienia pomiarów zakłóconych itp. Przy analizowaniu wyników pomiarów należy brać pod uwagę szereg możliwości zaburzenia pomiaru, takich jak fluktuacje wydajności detekcji, powolny dryf punktu pracy detektora, zniekształcenia wejściowego rozkładu Poissona powodowane istnieniem czasów martwych lub wystąpieniem impulsów wtórnych. Opracowano i opisano pewne testy statystyczne pozwalające na podstawie wyników pomiarów cząstkowych wykrywać szybkie fluktuacje i powolne zmiany warunków pomiaru [1, 2]. Müller [3] opracował prosty test pozwalający na wykrywanie zakłóceń powodowanych czasami martwymi. Jednakże powszechnie stosowana metoda uzyskiwania informacji o stabilności założonych warunków pomiaru i jakości otrzymanych wyników polega na porównaniu błędu standardowego s_s szybkości zliczeń wyznaczonego na podstawie wyników pomiarów cząstkowych

$$s_s = \left(\frac{\sum (x_i - x)^2}{n - 1}\right)^{1/2} \tag{1}$$

oraz błędu standardowego s_p wynikającego z rozkładu Poissona

$$s_p = \sqrt{\frac{\overline{x}}{T}} \tag{2}$$

gdzie: $\overline{x}$ - średnia szybkość zliczeń oszacowana na podstawie n pomiarów cząstkowych, x_i, i = 1,2,3,...,n - szybkości zliczeń w poszczególnych pomiarach cząstkowych, T - czas pojedynczego pomiaru cząstkowego.

Opierając się na intuicji należy oczekiwać, że w przypadku idealnie pracującej aparatury pomiarowej wartości s_s i s_p powinny być zbliżone do siebie. Jednakże s_s i s_p są dwoma różnymi estymatorami rzeczywistej dyspersji szybkości zliczeń i mają pewne, różniące się, rozkłady prawdopodobieństwa, zatem nawet w przypadku idealnego przebiegu pomiaru wartości tych estymatorów mogą się od siebie różnić. Każda z wymienionych wyżej nieprawidłowości aparatury pomiarowej powoduje zwiększenie rozbieżności między wartościami s_s i s_p. Dla celów praktycznych nakładano intuicyjnie pewne dopuszczalne granice na różnicę pomiędzy s_s i s_p, przyjmując na przykład, że niestabilności aparatury pomiarowej są do zaniedbania, jeżeli spełniony jest warunek

$$s_s^2 < As_p^2 \tag{3}$$

gdzie: A = 2 [4] lub A = 3/2 [5].

W rzeczywistości należy oczekiwać, iż w niektórych sytuacjach niesprawności aparatury pomiarowej mogą spowodować, że wartość s_s będzie znacznie mniejsza od s_p. Sytuacja taka może wystąpić w przypadku istnienia silnej korelacji pomiędzy rejestrowanymi impulsami, na przykład przy istnieniu dużego, nieskompensowanego czasu martwego lub występowaniu impulsów podwójnych czy też potrójnych. Dla poprawnej oceny pomiaru konieczne jest więc ustalenie dopuszczalnego przedziału dla różnicy pomiędzy s_s i s_p, obejmującego zarówno przypadek, gdy $s_s > s_p$ jak i przypadek, gdy $s_s < s_p$. Określenie dopuszczalnych granic dla różnicy pomiędzy s_s i s_p może być przeprowadzone w oparciu o rozkład χ^2 [6, 7], wymaga to jednak założenia, że estymator s_p^2 jest równy rzeczywistej wariancji szybkości zliczeń. Jak wiadomo, rozkład χ^2 o f stopniach swobody ma zmienną losową będąca sumą kwadratów f niezależnych zmiennych losowych

$$\chi^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_f^2 \tag{4}$$

jeżeli tylko każda ze zmiennych u_i, i = 1,2,... f, ma rozkład N(0,1).

Rozkład χ^2 będzie mieć zmienna

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right)^2 \tag{5}$$

czyli

$$\chi^2 = f \frac{s_s^2}{\sigma^2}. \tag{6}$$

jeżeli tylko zmienne x_i mają rozkład normalny o dyspersji σ^2.

Wyrażenie (5) jest sumą kwadratów n zmiennych losowych o rozkładzie N(0,1), związanych jednym warunkiem

$$\bar{x} = \sum x_i/n. \tag{7}$$

Można wykazać [8, 9, 10], że zmienna zdefiniowana wzorem (5) będzie mieć rozkład prawdopodobieństwa o f = N - 1 stopniach swobody. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa tej zmiennej ma postać

$$p_1(\chi^2) = \frac{1}{2^{f/2}\Gamma(f/2)} (\chi^2)^{f/2-1} \exp(-\tfrac{1}{2}\chi^2). \tag{8}$$

2. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa stosunku estymatorów wariancji szybkości zliczeń

Rozważmy typowy pomiar, mający na celu wyznaczenie nieznanej szybkości zliczeń λ, złożony z n pomiarów cząstkowych o równych czasach trwania T. Jeżeli liczba impulsów zarejestrowanych w czasie pojedynczego pomiaru cząstkowego jest duża, rozkład Poissona może być aproksymowany rozkładem normalnym. Przyjmuje się powszechnie, że przybliżenie to jest słuszne, gdy średnia liczba impulsów rejestrowanych w czasie T jest rzędu 10^2 [2].

Sneyers [11] wykazał, że przybliżenie rozkładu Poissona rozkładem normalnym jest bardzo dobre już dla wartości $\bar{x}T \approx 30$. Ponieważ w typowych pomiarach radioaktywności średnia liczba impulsów rejestrowanych w czasie pojedynczego pomiaru cząstkowego tylko w wyjątkowych przypadkach jest mniejsza od 10^2, można przyjąć, że przybliżenie rozkładu Poissona rozkładem normalnym jest uzasadnione, a zatem na podstawie (6) estymator s_s^2 wariancji szybkości zliczeń wyraża się przez zmienną χ^2

$$s_s^2 = \sigma^2 \chi^2/f \tag{9}$$

Z własności rozkładu Poissona wynika, że rzeczywista wariancja szybkości zliczeń równa jest

$$\sigma^2 = \frac{\lambda}{T} \tag{10}$$

natomiast z (2) wynika, że estymator s_p^2 wyraża się wzorem

$$s_p^2 = \frac{m}{nT} \tag{11}$$

Ze wzorów (9) - (11) wynika zatem, że stosunek estymatorów wariancji szybkości zliczeń

$$w = \frac{s_s^2}{s_p^2} \tag{12}$$

może być przedstawiony w postaci

$$w = \frac{(f+1)T}{mf}\lambda\chi^2. \tag{13}$$

Przy zadanej całkowitej liczbie impulsów m zarejestrowanych w całkowitym czasie pomiaru $\tau = nT$ rzeczywista nieznana szybkość zliczeń λ może być uważana za zmienną losową. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa tej zmiennej dla przypadku tak zwanej dobrej statystyki, to znaczy, gdy $m \gg 1$, ma postać [12]

$$p_2(\lambda) = \frac{\tau^{m+1}}{m!}\lambda^m \exp(-\tau\lambda). \tag{14}$$

Rozkład prawdopodobieństwa (8) zmiennej χ^2 określony jest w zupełności przez liczbę stopni swobody f i nie zależy od liczby impulsów m, zaś rozkład prawdopodobieństwa (14) zmiennej λ zależy tylko od całkowitej liczby impulsów m. Nowa zmienna losowa w, zdefiniowana wyrażeniem (13), jest więc iloczynem stałej i dwóch niezależnych zmiennych losowych λ i χ^2, przy czym obie ze zmiennych losowych mają rozkład prawdopodobieństwa typu gamma. Zagadnienie znalezienia rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej w sprowadza się więc do obliczenia funkcji gęstości prawdopodobieństwa iloczynu dwu zmiennych losowych niezależnych o rozkładach typu gamma.

Dla uproszczenia obliczeń rozważmy zmienną

$$u = \lambda\chi^2. \tag{15}$$

Łączny rozkład prawdopodobieństwa zmiennych λ i χ^2 ma postać

$$p(\lambda, \chi^2) = p_1(\chi^2)p_2(\lambda). \tag{16}$$

Korzystając z zależności (15), można przejść do łącznego rozkładu prawdopodobieństwa u i λ

$$p(u, \lambda) = p_1(u/\lambda)p_2(\lambda)/\lambda \tag{17}$$

a stąd po scałkowaniu ze względu na zmienną λ otrzymuje się funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej u

$$p(u) = \int_0^\infty p(u, \lambda)d\lambda = \int_0^\infty p_1(u/\lambda)p_2(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{18}$$

Po wstawieniu wyrażeń (8) i (14) i uporządkowaniu

$$p(u) = C' u^{f/2-1}\int_0^\infty {}^{m-f/2}\exp(-\tau\lambda - u/2\lambda)d\lambda \tag{19}$$

gdzie C' jest pewną stałą, która będzie wyznaczona później.

Korzystając z tablic całek [13]

$$\int_0^\infty x^{-1}\exp(-\beta/x - \gamma x)dx = 2(\beta/\gamma)^{\nu/2}K_\nu(2\sqrt{\beta\gamma}) \tag{20}$$

otrzymuje się funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej u

$$p(u) = C'' u^{\alpha}K_\beta(\sqrt{2u\tau}) \tag{21}$$

gdzie:

$$\alpha = (m + f/2 - 1)/2, \tag{22}$$

$$\beta = (m - f/2 + 1) \tag{23}$$

a $K_\beta(z)$ oznacza funkcję MacDonalda (zmodyfikowaną funkcję Bessela drugiego rodzaju) [14, 15], a C'' jest pewną nową stałą.

Dokonując teraz zamiany zmiennych

$$w = \frac{(f+1)T}{mf} u \tag{24}$$

otrzymuje się

$$p(w) = Cw^{\alpha} K_{\beta}(\sqrt{2mfw}) \tag{25}$$

gdzie C jest ostateczną stałą normalizacyjną wyznaczaną z warunku

$$\int_0^\infty p(w)dw = 1. \tag{26}$$

Korzystając z tablic całek [13]

$$\int_0^\infty x^{\mu} K_{\nu}(ax)dx = a^{-\mu-1} 2^{\mu-1} \Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right) \tag{27}$$

można wyznaczyć wartość stałej normalizacyjnej C

$$C = \frac{1}{m! \Gamma(f/2)} \left(\frac{mf}{2}\right)^{\alpha+1} \tag{28}$$

oraz otrzymać wyrażenia na kolejne momenty rozkładu prawdopodobieństwa (25)

$$M_j = \left(\frac{2}{mf}\right)^j \frac{f}{2}\left(\frac{f}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{f}{2}+j-1\right)(m+1)(m+2)\ldots(m+j). \tag{29}$$

W szczególności wartość średnia, czyli pierwszy moment zmiennej w

$$M_1 = \bar{w} = \frac{m+1}{m} \tag{30}$$

i drugi moment

$$M_2 = \frac{f+2}{f} \frac{(m+1)(m+2)}{m^2}. \tag{31}$$

Wariancja 6_w^2 wyraża się przez pierwsze dwa momenty

$$6_w^2 = M_2 - M_1^2 \tag{32}$$

i po wstawieniu (30) i (31) do (32) otrzymuje się wzór na wariancję zmiennej w

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{m+1}{m}\right)^2\left[\frac{m+2}{m+1}\,\frac{f+2}{f} - 1\right]. \tag{33}$$

W granicy, gdy $m \to \infty$, wyrażenia na średnią i wariancję zmiennej w przyjmują postać

$$\bar{w} = 1 \tag{34}$$

$$\sigma_w^2 = 2/f \tag{35}$$

i pokrywają się z odpowiednimi wyrażeniami na średnią i wariancję zmiennej χ^2/f.

3. Wyznaczenie kwantyli rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej w

Dla celów praktycznych konieczna jest znajomość nie tylko wartości średniej i dyspersji zmiennej w, lecz także poszczególnych kwantyli rozkładu prawdopodobieństwa tej zmiennej dla wyznaczenia dwustronnych przedziałów ufności odpowiadających zadanemu poziomowi ufności. Wymaga to obliczenia wartości dystrybuanty rozkładu (25), czyli obliczenia wyrażeń postaci

$$\gamma = P(w < w_\gamma) = \int_0^{w_\gamma} p(w)dw \tag{36}$$

dla różnych wartości stopni swobody f i dla różnych wartości m, czyli całkowitej liczby impulsów zarejestrowanych w czasie pomiaru.

Obliczenie wyrażeń (36) wymaga całkowania numerycznego, gdyż całka

$$\gamma = C\int_0^{w_\gamma} w^\alpha K_\beta(\sqrt{2mfw})dw \tag{37}$$

nie wyraża się przez żadne ze znanych funkcji. Funkcja MacDonalda $K_\beta(z)$ może być przedstawiona w postaci nieskończonego szeregu [14, 15] i dla celów całkowania numerycznego konieczne jest przybliżenie tego szeregu przez sumę skończoną. Ponieważ zarówno indeks β jak i argument funkcji MacDonalda dla typowych warunków doświadczalnych (m rzędu 10^3, f rzędu 10) są bardzo duże, można wykorzystać asymptotyczne przedstawienie funkcji $K_\beta(z)$ otrzymane przez Nicholsona [16] metodą rozwinięcia na szereg względem wielomianów Legendre'a. Przybliżone wyrażenie funkcji MacDonalda ma postać

$$K_\beta(x) = \left(\frac{\pi R}{2x}\right)^{1/2} \exp(-r) \tag{38}$$

gdzie:

$$R = x\left\{(x^2+\beta^2)^{-1/2} - \lambda_2(x^2+\beta^2)^{-3/2} + \lambda_4(x^2+\beta^2)^{-5/2} + \ldots\right\} \tag{39}$$

$$r = \left\{1 - \mu_2\left(\frac{1}{\beta}\frac{d}{d\beta}\right) - \mu_4\left(\frac{1}{\beta}\frac{d}{d\beta}\right)^2 + \ldots\right\}.$$

$$\left\{(x^2+\beta^2)^{1/2} - \frac{1}{2}\beta \log_{10}\frac{(x^2+\beta^2)^{1/2}+\beta}{(x^2+\beta^2)^{1/2}-\beta}\right\}, \tag{40}$$

a współczynniki λ_2, λ_4, λ_6 równe są

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -1/8 \\ \lambda_4 &= (27 - 96\beta^2)/2^7 \\ \lambda_6 &= (4600\beta^2 - 1125 - 640\beta^4)/2^{10}. \end{aligned} \tag{41}$$

Dalsze współczynniki λ_i można otrzymać ze związku rekurencyjnego

$$4(s+3)\lambda_{s+3} + (s+2)^3\lambda_{s+1} + 2\beta^2 s(s+1)(s+2)\lambda_{s-1} + \beta^4 s(s^2-4)\lambda_{s-3} = 0 \tag{42}$$

zaś współczynniki μ_i spełniają tożsamość

$$1 + \mu_2 x + \mu_4 x^2 + \ldots = (1 + \lambda_2 x + \lambda_4 x^2 + \ldots)^{-1}. \tag{43}$$

Po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$\begin{aligned} \mu_2 &= -\lambda_2 \\ \mu_4 &= 2(\lambda_2 - \lambda_4). \end{aligned} \tag{44}$$

Ograniczając się do wyrażeń drugiego rzędu, równanie na r przyjmie postać

$$r = u - \frac{\beta}{2\ln 10}\ln\frac{u+\beta}{u-\beta} + \frac{\lambda_2}{\beta}\left[\frac{\beta}{u}\left(1 - \frac{1}{\ln 10}\right) - \frac{1}{2\ln 10}\ln\frac{u+\beta}{u-\beta}\right] -$$

$$- \frac{2(\lambda_2 - \lambda_4)}{\beta^2}\left\{\left(1 - \frac{1}{\ln 10}\right)\frac{x^2}{u^3} - \frac{1}{u\ln 10}\right\} \qquad (45)$$

gdzie:

$$u = (x^2 + \beta^2)^{1/2}.$$

Do obliczenia numerycznego wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz kwantyli rozkładu zmiennej w opracowano program na maszynę cyfrową ODRA 1204. Program ten oblicza również, dla kontroli obliczeń oraz dla porównania, odpowiednie wartości rozkładu zmiennej losowej χ^2/f. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Wartości kwantyli rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych w i $v = \chi^2/f$ dla niektórych stopni swobody f (średnia szybkość zliczeń $\lambda = 10$ cpm, czas trwania pojedynczego pomiaru cząstkowego T = 10 min)

P	f = 3		f = 5		f = 9		f = 19	
	w_p	v_p	w_p	v_p	w_p	v_p	w_p	v_p
0.01	0.0386	0.0385	0.1102	0.1103	0.2312	0.2315	0.4011	0.4015
0.02	0.0619	0.0619	0.1500	0.1500	0.2810	0.2813	0.4500	0.4504
0.05	0.1176	0.1175	0.2289	0.2289	0.3690	0.3692	0.5317	0.5322
0.10	0.1952	0.1950	0.3220	0.3220	0.4628	0.4630	0.6126	0.6130
0.20	0.3358	0.3353	0.4687	0.4685	0.5977	0.5978	0.7216	0.7218
0.50	0.7914	0.7890	0.8717	0.8703	0.9277	0.9270	0.9655	0.9652
0.80	1.5573	1.5479	1.4634	1.4579	1.3633	1.3602	1.2594	1.2580
0.90	2.1047	2.0851	1.8580	1.8473	1.6371	1.6316	1.4345	1.4319
0.95	2.6451	2.6975	2.2336	2.2142	1.8894	1.8799	1.5908	1.5867
0.98	3.3729	3.2854	2.7194	2.6777	2.2052	2.1867	1.7801	1.7732
0.99	3.9658	3.7940	3.0940	3.0173	2.4392	2.4075	1.9161	1.9050

4. Opis programu numerycznego obliczania kwantyli rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej w

Program PW, napisany w języku ALGOL na maszynę cyfrową ODRA 1204 wykonuje następujące zadania:

- obliczanie i tablicowanie wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennych $w = s^2/s^2$ i $v = \chi^2/f$,
- obliczanie i tablicowanie dystrybuant rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych w i v,
- obliczanie i tablicowanie wartości kwantyli rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych w i v dla zadanych wartości prawdopodobieństwa.

Dane początkowe wprowadzane są z czytnika taśmy perforowanej i składają się z następujących liczb: f - liczba stopni swobody, lambda - szybkość zliczeń w cpm, t - czas pomiaru cząstkowego w minutach, h - skok całkowania, m - liczba parzysta dodatnia, określająca, co ile kroków całkowania maszyna ma obliczać i drukować wyniki obliczeń funkcji gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuant rozkładów zmiennych w i v. Wstawienie $m < 1$ powoduje, że nie będzie realizowane obliczanie i drukowanie wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuant, n - liczba obliczanych kwantyli (maksymalna wartość $n_{max} = 25$), pdb - n wartości prawdopodobieństwa, dla których mają być obliczane kwantyle.

Całkowanie wykonane jest przy użyciu złożonej kwadratury Simpsona, należącej do kwadratur typu Newtona - Cotesa [17]. Przedział całkowania dzielony jest w tej kwadraturze na parzystą liczbę n podprzedziałów o długości h. Wartość całki obliczana jest według wzoru

$$I = \frac{1}{3} h(f_o+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\ldots+4f_{2i-1}+2f_{2i}+\ldots+4f_{n-1}+f_n) \quad (46)$$

gdzie: f_i oznacza wartość funkcji podcałkowej w punkcie $x_i = ih$.

Blok KWADR oblicza kolejne wartości sumy

$$r = f_o + \sum (4f_{2j-1} + 2f_{2j}) \quad (47)$$

oraz

$$s = g_o + \sum (4g_{2j-1} + 2g_{2j}) \quad (48)$$

gdzie f_i oraz g_i oznaczają odpowiednio wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennych w i v w punkcie ih. Następnie obliczane są wartości dystrybuant rozkładów zmiennych w i v

$$QA = I_w(2k) = \frac{1}{3} h(r - f_{2k}) \quad (49)$$

$$QB = I_u(2k) = \frac{1}{3} h(s - g_{2k}). \quad (50)$$

Wartości kwantyli obliczane są metodą interpolacji liniowej

$$w_P = \frac{2h\left[I_w(2k) - P\right]}{I_w(2k) - I_w(2k - 2)} + (2k - 2)h. \tag{51}$$

Analogicznie wyznaczane są wartości kwantyli rozkładu zmiennej v.

5. Podsumowanie

Z porównania wartości liczbowych momentów wyprowadzonego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej w z odpowiednimi wartościami dla rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej χ^2/f wynika, że oba rozkłady prawdopodobieństwa (dla typowych warunków doświadczalnych - m rzędu 10^3, $f \sim 10$) są praktycznie nieodróżnialne od siebie. Wyniki obliczeń kwantyli, przedstawione w tabeli 1, stanowią dodatkowe potwierdzenie powyższego wniosku.

Ponieważ zmienna w wyraża się przez iloczyn stałej i dwóch zmiennych losowych o rozkładach prawdopodobieństwa typu gamma, uzyskany wynik na funkcję gęstości prawdopodobieństwa tej zmiennej może być łatwo rozszerzony na przypadek ogólny iloczynu dowolnych zmiennych losowych mających rozkłady typu gamma. Podobnie opracowany program PW może być wykorzystany do obliczeń całek oznaczonych funkcji będącej iloczynem funkcji MacDonalda i funkcji potęgowej.

LITERATURA

[1] Hilaire M., Nucl. Instr. Methods 112 (1973) 385.

[2] Hooton K.A.H., Parsons M.L., Anal. Chem. 45 (1973) 2218.

[3] Müller J.W., Report BIPM - 72/10 (1972).

[4] Mościcki W., Zastawny A., Acta Phys. Pol. 22 (1962) 189.

[5] Zavelski F.S., Prib. Tekh. Eksp. No. 4 (1968) 69.

[6] Price W.J., Nuclear Radiation Detection, Mc Graw-Hill, New York (1958).

[7] Korobkow W.I., Lukianow W.B., Mietody prigotowlenia preparatow i obrabotka rezultatow izmierenij radioaktiwnosti, Atomizdat (1973).

[8] Hald A., Statistical Theory with Engineering Applications, New York (1952).

[9] Fisz M., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN, Warszawa (1969).

[10] Smirnow N.W., Dunin - Barkowski I.W., Kurs rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, PWN, Warszawa (1973).

[11] Sneyers R., Tijdschr. Stat. 5, No 2 (1964).

[12] Goldanski W.I., Kucenko A.W., Podgorecki M.I., Statystyka pomiarów przy rejestracji promieniowania jądrowego, PWN, Warszawa (1963).

[13] Ryżik I.M., Gradsztein I.S., Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów, PWN, Warszawa (1964).

[14] Watson G.N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge Univ. Press, London (1948).

[15] Mc Lachlan N.W., Funkcje Bessela dla inżynierów, PWN (1964).

[16] Nicholson J.W., Phil. Magazine 20 (1910) 938.

[17] Ralston A., Wstęp do metod numerycznych, PWN, Warszawa (1971).

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЧАСТНОГО ОЦЕНОК ВАРИАНЦИИ СКОРОСТИ СЧЁТА

Р е з ю м е

В работе выведена формула на функцию плотности вероятности частного оценок варианции скорости счёта применяемых при обработке результатов измерений радиоактивности. Представлены формулы на параметры этого распределения и доказано, что в границе и переходит оно в распределание χ^2/f. Описана программа нумерического вычисления квантилей распределения и представлены результаты вычислений для некоторых значений числа степени свободы f.

THE PROBABILITY DISTRIBUTION OF THE RATIO OF COUNTING RATE VARIANCE ESTIMATORS

S u m m a r y

The ratio of counting rate variance estimators is a random number used in statistical analysis of measurements of natural radiocarbon. The formulae for probability density function and some basic statistical parameters of probability distribution are given. It was proved that the probability distribution of the ratio of counting rate variance estimators tends to the corresponding probability distribution of standard statistics χ^2/f when the number of counts tends to infinity. A computer procedure used in calculation of percentile points of this probability distribution is described and the results obtained are compared with corresponding values for the variable χ^2/f for some degrees of freedom.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 32 Nr kol. 609

Mieczysław F. PAZDUR

ROZKŁAD PRAWDOPODOBIENSTWA STOSUNKU ESTYMATORÓW WARIANCJI SZYBKOŚCI ZLICZEŃ

Streszczenie. Wyprowadzono wzór na funkcję gęstości prawdopodobienstwa stosunku estymatorów wariancji szybkości zliczeń, używanych przy opracowaniu wyników pomiarów radioaktywności. Podano wyrażenia na parametry tego rozkładu oraz wykazano, że w granicy przechodzi on w rozkład χ^2/f. Opisano program numerycznego obliczenia kwantyli oraz podano tabelę wyników obliczeń dla kilku wartości stopni swobody.

1. Wprowadzenie

Analiza statystyczna wyników pomiarów radioaktywności jest zagadnieniem skomplikowanym, zwłaszcza przy precyzyjnych pomiarach najniższych aktywności. W pomiarach radioaktywności mamy do czynienia z nałożeniem się szeregu trudnych do oszacowania i wyeliminowania zjawisk przypadkowych na proces rozpadu promieniotwórczego, który sam ma charakter przypadkowy. Przy pomiarach niskich aktywności dla uzyskania odpowiedniego materiału statystycznego pomiar musi często trwać kilkadziesiąt godzin. Wraz ze wzrostem czasu pomiaru maleje błąd standardowy, wynikający z rozkładu Poissona, jednakże jednocześnie wzrasta prawdopodobieństwo rozstrojenia się aparatury pomiarowej, wystąpienia pomiarów zakłóconych itp. Przy analizowaniu wyników pomiarów należy brać pod uwagę szereg możliwości zaburzenia pomiaru, takich jak fluktuacje wydajności detekcji, powolny dryf punktu pracy detektora, zniekształcenia wejściowego rozkładu Poissona powodowane istnieniem czasów martwych lub wystąpieniem impulsów wtórnych. Opracowano i opisano pewne testy statystyczne pozwalające na podstawie wyników pomiarów cząstkowych wykrywać szybkie fluktuacje i powolne zmiany warunków pomiaru [1, 2]. Müller [3] opracował prosty test pozwalający na wykrywanie zakłóceń powodowanych czasami martwymi. Jednakże powszechnie stosowana metoda uzyskiwania informacji o stabilności założonych warunków pomiaru i jakości otrzymanych wyników polega na porównaniu błędu standardowego s_s szybkości zliczeń wyznaczonego na podstawie wyników pomiarów cząstkowych

$$s_s = \left(\frac{\sum (x_i - x)^2}{n - 1}\right)^{1/2} \tag{1}$$

[14] Watson G.N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge Univ. Press, London (1948).

[15] Mc Lachlan N.W., Funkcje Bessela dla inżynierów, PWN (1964).

[16] Nicholson J.W., Phil. Magazine 20 (1910) 938.

[17] Ralston A., Wstęp do metod numerycznych, PWN, Warszawa (1971).

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЧАСТНОГО ОЦЕНОК ВАРИАНЦИИ СКОРОСТИ СЧЁТА

Р е з ю м е

В работе выведена формула на функцию плотности вероятности частного оценок варианции скорости счёта применяемых при обработке результатов измерений радиоактивности. Представлены формулы на параметры этого распределения и доказано, что в границе и переходит оно в распределание χ^2/f. Описана программа нумерического вычисления квантилей распределения и представлены результаты вычислений для некоторых значений числа степени свободы f.

THE PROBABILITY DISTRIBUTION OF THE RATIO OF COUNTING RATE VARIANCE ESTIMATORS

S u m m a r y

The ratio of counting rate variance estimators is a random number used in statistical analysis of measurements of natural radiocarbon. The formulae for probability density function and some basic statistical parameters of probability distribution are given. It was proved that the probability distribution of the ratio of counting rate variance estimators tends to the corresponding probability distribution of standard statistics χ^2/f when the number of counts tends to infinity. A computer procedure used in calculation of percentile points of this probability distribution is described and the results obtained are compared with corresponding values for the variable χ^2/f for some degrees of freedom.