ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Marek BALCER
Andrzej MIKA
Tomasz PIZOŃ

KONSTRUKCJA SŁÓW DOPUSZCZALNYCH PEWNEGO ALFABETU JAKO POJĘĆ RÓWNOWAŻNYCH TERMOWYM WYRAŻENIOM ARYTMETYCZNYM

Streszczenie. Autorzy podają definicję słowa dopuszczalnego pewnego alfabetu oraz definicję termowego wyrażenia arytmetycznego, wskazując na równoważność obu pojęć. Podano również dwa twierdzenia dotyczące przedstawień termowego wyrażenia arytmetycznego za pomocą grafów (drzew).

1. WSTĘP

Praca niniejsza jest pierwszą z serii trzech prac związanych wspólnym tematem, tematem konstrukcji algorytmu rozstrzygającego prawdziwość równości dwóch wyrażeń arytmetycznych. Algorytm ten przedstawiony jest w pracy [1]. Celem niniejszego opracowania jest wprowadzenie pojęcia słowa dopuszczalnego pewnego alfabetu, które możemy traktować jak zwykłe wyrażenia arytmetyczne. Podejście takie jest wygodne do konstrukcji wspomnianego algorytmu.

Ustalamy alfabet $\mathcal{A}$, z którego elementów konstruować będziemy tzw. słowa dopuszczalne. Niech $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$, przy czym:

1) $\mathcal{A}_1 = \{0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}}, 2_{\mathcal{A}}, 3_{\mathcal{A}}, 4_{\mathcal{A}}, 5_{\mathcal{A}}, 6_{\mathcal{A}}, 7_{\mathcal{A}}, 8_{\mathcal{A}}, 9_{\mathcal{A}}\}$,

2) $\mathcal{A}_2 = \{*_{\mathcal{A}}, +_{\mathcal{A}}, -_{\mathcal{A}}, (_{\mathcal{A}},)_{\mathcal{A}}, =_{\mathcal{A}}, \iota_{\mathcal{A}}, e_{\mathcal{A}}\}$.

Symbole $\{*_{\mathcal{A}}, +_{\mathcal{A}}, -_{\mathcal{A}},)_{\mathcal{A}}, (_{\mathcal{A}}, =_{\mathcal{A}}\}$ są rozumiane jako symbole $*, +, -, (,), =$ w arytmetyce; $e_{\mathcal{A}}$ jest symbolem znaku pustego, zaś $\iota_{\mathcal{A}}$ jest symbolem znaku końca.

3) $\mathcal{A}_3$ jest zbudowany z $\mathcal{A}' = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$ w sposób następujący

3.1. $\mathcal{A}_3 = \{\alpha^1_{\mathcal{A}}, \ldots, \alpha^n_{\mathcal{A}}, \ldots\}$

3.2. $\forall i (i \in N)\ \alpha^i_{\mathcal{A}} = \alpha^{i_1}_{\mathcal{A}} * \alpha^{i_k}_{\mathcal{A}} * \ldots * \alpha^{i_1}_{\mathcal{A}}$,

gdzie $*$ oznacza konkatenację elementów $\alpha^{i_k}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}'$, $k=1,\ldots,l$.

Ponadto budujemy zbiór $\mathcal{A}_4$ taki, że $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_4$:

$\mathcal{A}_4 = \{\tau^0_{\mathcal{A}}, \tau^1_{\mathcal{A}}, \ldots, \tau^n_{\mathcal{A}}, \ldots\}$, gdzie $\tau^0_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{A}}, \ldots, \tau^9_{\mathcal{A}} = 9_{\mathcal{A}}$,

$\tau_{\mathcal{A}}^{10} = 1_{\mathcal{A}} * 0_{\mathcal{A}}$. Ogólnie dla $n = n_0 + n_1 \cdot 10^1 + \ldots + n_k \cdot 10^k$

$(n \in N \wedge n_k \in \{1,\ldots,9\} \wedge \forall_i (0 \leq i \leq k-1)\ n_i \in \{0,\ldots,9\}$

$\tau_{\mathcal{A}}^{n} = n_{k_{\mathcal{A}}} * n_{k-1_{\mathcal{A}}} * \ldots * n_{0_{\mathcal{A}}}$,

gdzie

$n_{i_{\mathcal{A}}} \in \mathcal{A}_1$ dla $i=0,\ldots,k-1$ oraz $n_{k_{\mathcal{A}}} \in \mathcal{A}_1 - \{0_{\mathcal{A}}\}$.

Do konstrukcji słów dopuszczalny wygodne będą pewne obiekty zwane konkatentami.

Ciąg jednowyrazowy $a \in \mathcal{A}$ nazywamy znakiem i oznaczamy przez $\ulcorner a \urcorner$.

Definicja 1

Konkatenantem K nazywamy konkatenację elementów jednego i tylko jednego z alfabetów $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 - \{=_{\mathcal{A}}, ;_{\mathcal{A}}\}, \mathcal{A}'$.

Konkatenantami są np. elementy zbioru $\mathcal{A}_3$ i $\mathcal{A}_4$.

Definicja 2

Słowem dopuszczalnym A alfabetu $\mathcal{A}$ nazywamy konkatenację konkatenantów postaci

$$A = K^1 * K^2 * \ldots * K^n,$$

gdzie

1) $\forall_i (1 \leq i \leq n-1)$ jeżeli K^i jest konkatenantem należącym do $\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$, to K^{i+1} jest konkatenantem utworzonym z $\mathcal{A}_2 - \{=_{\mathcal{A}}, ;_{\mathcal{A}}\}$ i odwrotnie, jeżeli K^i jest konkatenantem utworzonym z $\mathcal{A}_2 - \{=_{\mathcal{A}}, ;_{\mathcal{A}}\}$, to K^{i+1} jest konkatenantem należącym do $\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$.

2) $\forall_i (1 \leq i \leq n-1)$ K^i nie zawiera znaku $\ulcorner e_{\mathcal{A}} \urcorner$ i jeżeli K^n jest utworzony z $\mathcal{A}_2 - \{=_{\mathcal{A}}, ;_{\mathcal{A}}\}$, to K^n również nie zawiera znaku $\ulcorner e \urcorner$.

Konstrukcja A:

1. Konstruujemy A_1 jako konkatenację konkatenantów należących do $\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$, tzn. A_1 jest postaci

$$A_1 = M^{i_1} * \ldots * M^{i_p},\ \forall k (1 \leq k \leq p)\ M^{i_k} \in A_3 \cup A_4$$

2. Konstruujemy A_2 jako konkatenację konkatenantów wchodzących w skład A_1 i konkatenantów utworzonych z $\mathcal{A}_2 - \{=_{\mathcal{A}}, ;_{\mathcal{A}}\}$ w następujący sposób:

$$A_2 = L^1 * M^{i_1} * L^2 * M^{i_2} * \ldots * L^p * M^{i_p} * L^{p+1},$$

gdzie $\forall_j (1 \leq j \leq p+1)$ L^j są konkatenantami elementów z $\mathcal{A}_2 - \{=_{\mathcal{A}}, ;_{\mathcal{A}}\}$, przy czym $\forall_j (2 \leq j \leq p)$

2.1. L^j są następującej postaci

$$L^j = L_1^j * \ldots * L_{s_j}^j,$$

$$L_1^j \in \{ {}^*\mathcal{A}, -\mathcal{A}, +\mathcal{A} \} \tag{2.1.1}$$

$$L_k^j \in \{ {}^{(}\mathcal{A}^*-\mathcal{A}, {}^{(}\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}} \} \text{ dla } k=2,\ldots,s_j \tag{2.1.2}$$

albo postaci

2.2. $L^j = L^{j2} * L^{j1}$, gdzie L^{j1} jest postaci jak w (2.1)

zaś $L^{j2} = L_1^{j2} * \ldots * L_{s_{j2}}^{j2}$, $\forall k \ (1 \leq k \leq s_{j2})$

$$L_k^{j2} \in \{ {}^{)}\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}} \} \tag{2.2.1}$$

2.3. $L^1 = L_1^1 * \ldots * L_{s_1}^1$,

$$L_1^1 \in \{ -\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}} \} \tag{2.3.1}$$

$$L_j^1 \in \{ {}^{(}\mathcal{A}^*-\mathcal{A}, \ {}^{(}\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}} \} \text{ dla } j = 2,\ldots,s_1 \tag{2.3.2}$$

2.4. $L^{p+1} = L_1^{p+1} * \ldots * L_{s_{p+1}}^{p+1}$,

$$L_j^{p+1} \in \{ {}^{)}\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}} \} \text{ dla } j = 1,\ldots,s_{p+1}, \tag{2.4.1}$$

przy czym $\forall_i \ (1 \leq i \leq p+1) \ s_i \geq 1$.

3. Na A_2 wprowadzamy charakterystykę φ, która przyjmuje na początku wartość 0, "przegląda" A_2 i w momencie natrafienia na znak $\ulcorner {}^{(}\mathcal{A} \urcorner$ powiększa swą wartość o 1, zaś w przypadku natrafienia na znak $\ulcorner {}^{)}\mathcal{A} \urcorner$ zmniejsza swą wartość o 1. W przypadku napotkania dowolnego innego znaku nie zmienia wartości. Tak więc wartość φ ustalona jest wg następującego algorytmu.

Niech j oznacza numer konkatenanta L, zaś i niech oznacza numer znaku w konkatenancie L^j.

1° $\varphi := 0$ i przejście do 2°

2° $j := 1$ i przejście do 3°

3° $i := 1$ i przejście do 4°

4° $L_i^j = \ulcorner {}^{(}\mathcal{A} \urcorner \Rightarrow \varphi := \varphi+1$ i przejście do 5°;

$L_i^j = \ulcorner {}^{)}\mathcal{A} \urcorner \Rightarrow \varphi := \varphi-1$ i przejście do 5°;

$(L_i^j \neq \ulcorner {}^{(}\mathcal{A} \urcorner \wedge L_i^j \neq \ulcorner {}^{)}\mathcal{A} \urcorner) \Rightarrow \varphi$ nie zmienia wartości i przejście do 5°

5° $i := i+1$ i przejście do 6°

6° $i > s_j \Rightarrow$ przejście do 7°;

$i \leq s_j \Rightarrow$ powrót do 4°

7° $j := j+1$ i przejście do 8°

8° $j \leq p+1 \Rightarrow$ powrót do 3°;

$j > p+1 \Rightarrow$ przejście do 9

9° koniec.

4. Jeżeli po zakończeniu pracy tego algorytmu $\varphi = 0$ oraz w czasie jego pracy $\varphi \geq 0$, to przystępujemy do eliminacji ewentualnie występujących w A_2 znaków $\ulcorner e_{\mathcal{A}} \urcorner$. Znaki te pozwalały dotychczas na spójną i jednolitą konstrukcję konkatenantów L^j. Przepisujemy zatem elementy A_2 za wyjątkiem elementów $\ulcorner e_{\mathcal{A}} \urcorner$; numerujemy liczbami od 1 do n kolejne M^j i te L^j, które w wyniku tej operacji nie znikły. Otrzymujemy w ten sposób słowo dopuszczalne $A = K^1 * \ldots * K^n$. Jeżeli po zakończeniu pracy algorytmu $\varphi \neq 0$ lub jeżeli chociaż raz podczas jego pracy $\varphi = -1$, wtedy A_2 po wyrzuceniu znaków $\ulcorner e_{\mathcal{A}} \urcorner$ nie uważamy za słowo dopuszczalne.

Jak widać słowo dopuszczalne można zinterpretować jako wyrażenie arytmetyczne.

Wprowadzamy podstawowy zbiór termów $Tm_o = \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$. Ze zbioru Tm_o możemy utworzyć obszerniejszy zbiór Tm za pomocą operatorów f^1_-, f^2_-, f^2_+, f^2_*, $f^1(\ldots)$, f_{id} określonych w następujący sposób:

1° $f^1_- : Tm' \to Tm$, $\forall t \in Tm'$ $f^1_-(t) = -_{\mathcal{A}} t \in Tm$, przy czym $Tm' \subset Tm$ jest zbiorem tych $t \in Tm$, których pierwszy element nie jest znakiem $\ulcorner -_{\mathcal{A}} \urcorner$. f^1_- jest bijekcją zbiorów Tm' i $Tm - Tm'$. Jak widać, f^1_- nie można superponować z samym sobą ze względu na dziedzinę określoności.

2° $f^2_- : Tm \times Tm' \to Tm$,

$\forall t_1 \in Tm \quad \forall t_2 \in Tm' \quad f^2_-(t_1, t_2) = t_1 -_{\mathcal{A}} t_2 \in Tm$

3° $f^2_+ : Tm \times Tm' \to Tm$,

$\forall t_1 \in Tm \quad \forall t_2 \in Tm' \quad f^2_+(t_1, t_2) = t_1 +_{\mathcal{A}} t_2 \in Tm$

4° $f^2_* : Tm \times Tm' \to Tm$,

$\forall t_1 \in Tm \quad \forall t_2 \in Tm' \quad f^2_*(t_1, t_2) = t_1 *_{\mathcal{A}} t_2 \in Tm$

5° $f^1_{(\ldots)} : Tm \to Tm$, $\forall t \in Tm$ $f^1_{(\ldots)}(t) = (_{\mathcal{A}} t)_{\mathcal{A}} \in Tm$

6° $f_{id} : Tm \to Tm$, $\forall t \in Tm$ $f_{id}(t) = t$

<u>Uwaga 1</u>

Wskaźniki 1 lub 2 u góry operatorów f oznaczają argumentowość tych operatorów.

Definicja 3

Termowym wyrażeniem arytmetycznym (TWA) nazywamy term $t \in Tm$ utworzony z k $(k \geq 1)$ termów podstawowych $t_1, \ldots, t_k$, $\forall i$ $(1 \leq i \leq k)$ $t_i \in Tm_0$ poprzez skończoną i dozwoloną przez dziedziny operatorów f superpozycję operatorów f^1_-, $f^2_=$, f^2_+, f^2_*, $f^1_{(\ldots)}$, f_{id}.

Wniosek 1

$\forall t \in Tm_0$ t jest TWA (ponieważ $t = f_{id} \circ f_{id}(t)$)

Uwaga 2

Tak zdefiniowane termowe wyrażenia arytmetyczne można zbudować z termów $t_1, \ldots, t_k$, $\forall i$ $(1 \leq i \leq k)$ $t_i \in Tm_0$ za pomocą drzewa, którego struktura jest określona postacią superpozycji operatorów f.

Przykład 2.1

$k = 3$; $t^0_1 = x$; $t^0_2 = y$; $t^0_3 = z$;

Wskaźnik u góry oznacza numer "piętra", wskaźnik u dołu numer "na piętrze".

Budujemy drzewo w następujący sposób:

I piętro: $t^1_1 = f^2_+(t^0_1, t^0_2) = f^2_+(x, y) = x +_{\mathcal{A}} y$;

$t^1_2 = f_{id}(t^0_3) = f_{id}(z) = z$;

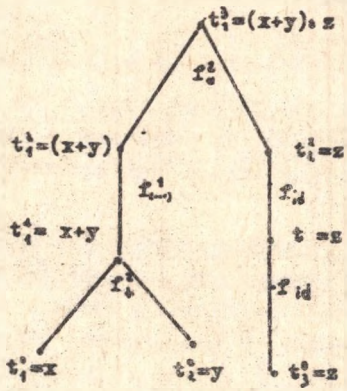
II piętro: $t^2_1 = f_{(\ldots)}(t^1_1) = f_{(\ldots)}(x +_{\mathcal{A}} y) = ({}_{\mathcal{A}}x +_{\mathcal{A}} y)_{\mathcal{A}}$;

$t^2_2 = f_{id}(t^1_2) = f_{id}(z) = z$;

III piętro: $t^3_1 = f^2_*(t^2_1, t^2_2) = f^2_*(({}_{\mathcal{A}}x +_{\mathcal{A}} y)_{\mathcal{A}}, z) = ({}_{\mathcal{A}}x +_{\mathcal{A}} y)_{\mathcal{A}} \cdot_{\mathcal{A}} z$;

t jest TWA, gdyż $t^3_1 = f^2_*(f^1_{(\ldots)}(f^2_+(t^0_1, t^0_2)),$

$f_{id}(f_{id}(t^0_3)))$.



Rys. 1

(na rysunku pomijamy indeksowanie po $\mathcal{A}$ dla przejrzystości)

Mamy zatem

Twierdzenie 1

Niech będą dane termy $t_1^o,\ldots,t_{k_o}^o$ $(k_o \geq 2)$, $\forall i (1 \leq i \leq k_o)$ $t_i^o \in Tm_o$ tworzące zerowe, najniższe piętro drzewa. Jeśli na każdym piętrze poddamy elementy tego piętra dopuszczalnemu działaniu operatorów f, z których nie wszystkie są f_{id} i jeżeli co pewną skończoną (na ogół różną) liczbę pięter działamy przynajmniej jednym operatorem f^2, to jedyny element ostatniego, najwyższego piętra jest TWA.

W przypadku otrzymania na jednym z pięter tylko jednego termu możemy go poddać działaniu skończonej i dopuszczalnej superpozycji operatorów $f^1_{(\ldots)}$ i f^1_{-}.

Dowód

Termy $t_1^o,\ldots,t_{k_o}^o$ $(k_o \geq 2)$, $\forall i$ $(1 \leq i \leq k)$ $t_i^o \in Tm_o$ poddajemy działaniu operatorów f biorąc pod uwagę założenia. Otrzymujemy termowe wyrażenia arytmetyczne $t_1^1,\ldots,t_{k_1}^1$ $(k_1 \leq k_o)$. Jeżeli na l-tym piętrze otrzymaliśmy TWA $t_1^l,\ldots,t_{k_l}^l$ $(k_l \leq k_{l-1})$, to poddajemy $t_t^l,\ldots,t_{k_l}^l$ działaniu operatorów f biorąc pod uwagę założenia twierdzenia. Na l+1 piętrze otrzymamy TWA, co wynika z definicji TWA. Niech $r_1,\ldots,r_s$ będą numerami pięter, na każdym z których działa co najmniej jeden z operatorów f^2 $(kr_{j+1} < k_{r_j}$ dla $j=1,\ldots,s-1)$, przy czym $s \leq k_{r_1} - 1$. W myśl założeń liczby $r_1,\ldots,r_s$ istnieją i jest ich skończona ilość, co wynika z faktu wybrania skończonej liczby $t_1^o,\ldots,t_{k_o}^o$, $t_i^o \in Tm_o$ $(i=1,\ldots,k_o)$. Tak więc po skończonej ilości kroków $R = r_s + 1$ otrzymujemy TWA, które możemy poddać działaniu skończonej i dozwolonej superpozycji operatorów $f^1_{(\ldots)}$, f^1_{-}, zgodnie z założeniami twierdzenia i otrzymując po każdorazowym działaniu tych operatorów TWA.

Prawdziwe jest również

Twierdzenie 2

Niech t będzie TWA i $t \in Tm - Tm_o$. Dla t da się zbudować drzewo, o jakim mówi się w założeniu Tw. 1, przy czym t jest jedynym wierzchołkiem ostatniego, najwyższego piętra tego drzewa.

Dowód:

Załóżmy, że term t powstaje w wyniku superpozycji operatorów, z których jedne działają na termach z Tm_o, pozostałe zaś na wynikach działań poprzednich. Wobec $t \in Tm - Tm_o$ istnieje wśród tych operatorów co najmniej jeden różny od f_{id}. Termowi t przypisujemy jedyny wierzchołek na k-tym piętrze drzewa i oznaczamy t_1^k, gdzie k jest maksymalną ilością operatorów tworzących t. W dalszych rozważaniach pominiemy działania f_{id}, o ile na danym piętrze nie będą działały inne operatory. Istnieje dokładnie jeden operator spośród f, taki że istnieje $t_1^{k-1} \in Tm$ albo t_1^{k-1}, $t_2^{k-1} \in Tm$, ta-

kie że t_1^k powstaje jako wynik działania operatorów f_-^1 albo $f_{(...)}^1$ na t_1^{k-1} albo jednego z operatorów $f_=^2$, f_+^2, f_*^2 na t_1^{k-1} i t_2^{k-1}. Jeżeli $t_1^{k-1} \in Tm_o$ albo t_1^{k-1}, $t_2^{k-1} \in Tm_o$, to otrzymujemy szukane drzewo przypisując krawędziom działanie odpowiednich operatorów. Jeżeli tak nie jest, traktujemy piętro k-1 jako k-te i postępujemy indukcyjnie.

Załóżmy, że na l-tym piętrze otrzymaliśmy $t_1^l, \ldots, t_r^l$ $t_i^l \in Tm$ $(i=1,\ldots,r)$. Jeżeli $t_i^l \in Tm_o$ dla $i=1,\ldots,r$, to przypisując krawędziom łączącym piętra l+1 i l-te działanie odpowiednich operatorów, otrzymaliśmy szukane drzewo. Jeśli nie, to istnieje j $(1 \leq j \leq r)$, takie że $t_j^l \in Tm - Tm_o$. Rozpatrując wszystkie takie t_j^l jak t_1^k w pierwszym kroku indukcji zaś pozostałe t_s^l, takie że $t_s^l \in Tm_o$ przekształcając operatorem f_{id}, otrzymujemy l-1 piętro. Ilość kroków tej konstrukcji jest skończona, ponieważ każde TWA powstaje w wyniku działania skończonej ilości operatorów superponowanych ze sobą w sposób dowolny, a ponadto, na każdym piętrze ilość operatorów, które nie są jeszcze "przypisane" żadnej krawędzi, zmniejsza się o co najmniej 1. Na końcu otrzymujemy $t_1^1, \ldots, t_p^1$, $\forall j$ $(1 \leq j \leq p)$ $t_j^1 \in Tm_o$.

Na zakończenie podajemy centralne twierdzenie tej pracy, twierdzenie mówiące o równoważności definicji TWA i definicji słowa dopuszczalnego.

Twierdzenie 3

Każde TWA jest słowem dopuszczalnym i na odwrót, każde słowo dopuszczalne jest TWA.

Twierdzenie dowodzi się indukcyjnie, zaś rolę pomocniczą w jego przeprowadzeniu spełniają obydwa twierdzenia udowodnione wcześniej (tw. 1 i tw. 2).

Dowód szczegółowy podajemy w [2].

LITERATURA

[1] Balcer M., Mika A., Pizoń T.: Algorytm rozstrzygania prawdziwości równości dwóch dowolnych wyrażeń arytmetycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej,

[2] Balcer M., Mika A., Pizoń T.: Twierdzenie o równoważności definicji słów dopuszczalnych pewnego alfabetu i termowych wyrażeń arytmetycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej,

КОНСТРУКЦИЯ ДОПУСТИМЫХ СЛОВ НЕКОТОРОГО АЛФАВИТА, КАК ПОНЯТИЙ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ТЕРМОВЫМ АРИФМЕТИЧЕСКИМ ВЫРАЖЕНИЯМ

Р е з ю м е

В работе даются определения допустимого слова некоторого алфавита и термовго арифметического выражения, а затем, показывается эквивалентность этих понятий. Доказываются также две теоремы о представлении термового арифметического выражения при помощи графов (деревьев).

LA CONSTRUCTION DES MOTS ADMISSIBLES D'UN ALPHABET COMME NOTIONS ÉQUIVALANTES AU TERME ARYTHMÉTIQUE

R e s u m e

Les auteurs donnent les définitions des mots admissibles d'un alphabet et du terme arythmétique et montrent l'équivalance de ceos deux notions. On présente aussi deux théorèmes qui concernent la représentation du terme arythmétique sur les graphes (les arbres).