ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 34 Nr kol. 623

Marek BALCER
Andrzej MIKA
Tomasz PIZOŃ

TWIERDZENIE O RÓWNOWAŻNOŚCI DEFINICJI SŁÓW DOPUSZCZALNYCH PEWNEGO ALFABETU I TERMOWYCH WYRAŻEŃ ARYTMETYCZNYCH

Streszczenie. Autorzy podają twierdzenie o równoważności definicji słowa dopuszczalnego pewnego alfabetu i definicji termowego wyrażenia arytmetycznego. W dalszej części autorzy podają dowód tego twierdzenia metodą indukcji po drzewach.

WSTĘP

Celem pracy jest wykazanie równoważności między definicjami słów dopuszczalnych pewnego alfabetu i termowych wyrażeń arytmetycznych.

Słowo dopuszczalne (SD) zbudowane jest z trzech alfabetów: znaków (nawiasy, działania arytmetyczne), literowego i cyfrowego przez taką konkatenację ich elementów, by można było otrzymane słowo interpretować jak wyrażenie arytmetyczne.

Zbiór termowych wyrażeń arytmetycznych (TWA) składa się z termów zbudowanych z elementów zbioru słów literowych i cyfrowych przy pomocy operatorów interpretowanych zwykle jako znaki działań arytmetycznych.

Szczegółowy opis konstrukcji SD i TWA znajduje się w [1].

Twierdzenie

Każde termowe wyrażenie arytmetyczne (TWA) jest słowem dopuszczalnym (SD) i odwrotnie, każde słowo dopuszczalne jest TWA.

Dowód

($\Longrightarrow$) Dowód będzie przeprowadzany w kilku etapach.

1. Niech $t \in Tm_0$. t jest TWA. Ponieważ $t \in Tm_0$, więc $t \in \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$. Przyjmujemy, że

$$A_1 = t$$

Przyjmujemy dalej $p=1$ i $L^1 = L_1^1 = e_{\mathcal{A}}$, $L^2 = L_1^2 = e_{\mathcal{A}}$ dla $S_1 = S_2 = 0$, otrzymując $A_2 = e_{\mathcal{A}} * t * e_{\mathcal{A}}$.

Charakterystyka φ (zob. [1]) jest tożsamościowo zerem, więc po przekształceniu A_2 polegającym na opuszczeniu znaków $\ulcorner e_{\mathcal{A}} \urcorner$ mamy $A=t$, więc to jest SD.

2. Niech t_1, $t_2 \in Tm_0$. Tworzymy $t = f^2_{\square}(t_1, t_2) = t_1 \square_{\mathcal{A}} t_2$, gdzie $\square_{\mathcal{A}}$ oznacza $*_{\mathcal{A}}, +_{\mathcal{A}}, -_{\mathcal{A}}$. Oczywiście t jest TWA. Ponieważ t_1, $t_2 \in Tm_0$, to tym samym t_1, $t_2 \in \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$. Przyjmijmy $p=2$ i utwórzmy $A_1 = t_1 * t_2$. Budujemy L^1, L^2, L^3. $L^1 = L^1_1 = e_{\mathcal{A}}$ dla $s_1 = 0$, $L^2 = L^2_1 = \square_{\mathcal{A}}$ dla $s_2 = 0$ oraz $L^3 = L^3_1 = e_{\mathcal{A}}$ dla $s_3 = 0$. Tak więc $A_2 = e_{\mathcal{A}} * t_1 * \square_{\mathcal{A}} * t_2 * e_{\mathcal{A}}$. Ponieważ charakterystyka φ jest tożsamościowo zerem, więc

$$A = t_1 * \square_{\mathcal{A}} * t_2 = t \text{ jest SD.}$$

3. Niech $t_1 \in Tm_0$. Tworzymy $t = f^1_{-}(t_1) = -_{\mathcal{A}} t_1$. t jest TWA. Ponieważ $t_1 \in Tm_0$, więc $t_1 \in \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$. Przyjmując $p=1$ tworzymy $A_1 = t_1$. Budujemy L^1 i L^2: $L^1 = L^1_1 = -_{\mathcal{A}}$ dla $s_1 = 0$ oraz $L^2 = L^2_1 = e_{\mathcal{A}}$ dla $s_2 = 0$. Tak więc $A_2 = -_{\mathcal{A}} * t_1 * e_{\mathcal{A}}$.
Ponieważ charakterystyka φ jest tożsamościowo zerem, więc

$$A = -_{\mathcal{A}} * t_1 = t,$$

a zatem t jest SD.

4. Niech $t_1 \in Tm_0$. Tworzymy $t = f^1_{(\ldots)}(t_1) = (_{\mathcal{A}} t_1)_{\mathcal{A}}$. t jest TWA.
Ponieważ $t_1 \in Tm_0$, więc $t_1 \in \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$. Możemy zatem, przyjmując $p=1$, utworzyć $A_1 = t_1$. Budujemy L^1 i L^2: $L^1 = L^1_1 * L^1_2$ dla $s_1 = 1$, przy czym $L^1_1 = e_{\mathcal{A}}$, $L^1_2 = (_{\mathcal{A}}$; $L^2 = L^2_1 =)_{\mathcal{A}}$ dla $s_2 = 0$. Zatem

$$A_2 = e_{\mathcal{A}} * (_{\mathcal{A}} * t_1 *)_{\mathcal{A}}.$$

Ponieważ charakterystyka φ spełnia warunki podane w [1],

$$A = (_{\mathcal{A}} * t_1 *)_{\mathcal{A}} = t \text{ jest SD.}$$

Pokazaliśmy, że term t powstający z termów należących do Tm_0 przez jednokrotne zastosowanie operatorów f będący TWA jest SD. Należy pokazać, że dowolny term t jest SD, tzn. t powstaje z termów należących do TM_0 przez wielokrotne superponowane zastosowanie operatorów f lub ściślej, przez jednokrotne zastosowanie tych operatorów na termach należących niekoniecznie do Tm_0 ale do Tm.

Powstaje w ten sposób możliwość zastosowania indukcji jako metody dalszego dowodu. Poprzednie etapy stanowiły pierwszy krok tej indukcji. Przyjmijmy zatem, że t_1, $t_2 \in Tm$ (są one oczywiście TWA w myśl definicji) są SD. Sformułowaliśmy w ten sposób założenie indukcyjne. Niech term t będzie TWA, które powstaje z termu t_1 lub z termów t_1, t_2 przez zastosowanie odpowiednio operatorów jednoargumentowych lub dwuargumentowych. Formułujemy tezę indukcyjną twierdząc, że t jest SD.

Tę część dowodu ujmiemy również w kilka etapów.

1. Niech $t = f_{id}(t_1) = t_1$. Ponieważ t_1 będąc TWA był SD, to t jest także SD.
2. Niech $t = f^1_-(t_1) = -_{\mathcal{A}}t_1$ o ile jest możliwe zastosowanie na t_1 operatora f^1_- (patrz def. f^1_-). Ponieważ t_1 jest SD, to istnieje SD $A = t_1$ postaci

$$A = K^1 * K^2 * \dots * K^n$$

Na pewno K^1_1 nie jest znakiem $\ulcorner -_{\mathcal{A}} \urcorner$, co wynika z uczynionej uwagi.

2.1) Jeżeli K^1 jest typu L, to konstruujemy

$$\bar{K}^1 = -_{\mathcal{A}} * K^1 \quad \text{(zob. [1])}$$

po czym budujemy $\bar{A} = \bar{K}^1 * K^2 * \dots * K^n$.

2.2) Jeżeli K^1 jest typu M, to konstruujemy $\bar{K}^o = -_{\mathcal{A}}$ po czym budujemy $\bar{A} = \bar{K}^o * K^1 * \dots * K^n$.

Charakterystyka φ będzie przyjmować kolejno na $\bar{A}$ te same wartości jak na A, ponieważ nie trzeba usuwać znaków $\ulcorner e_{\mathcal{A}} \urcorner$, więc

$$\bar{A} = t \quad \text{jest SD w myśl def. SD.}$$

3. Niech $t = f^1_{(\dots)}(t_1) = (_{\mathcal{A}}t_1)_{\mathcal{A}}$. Ponieważ t_1 jest SD, więc istnieje SD $A = t_1$ postaci

$$A = K^1 * \dots * K^n$$

3.1) Jeżeli K^1 jest typu M, to konstruujemy $\bar{K}^o = e_{\mathcal{A}} * (_{\mathcal{A}}$;

3.2) Jeżeli K^1 jest typu L, to konstruujemy $\bar{K}^1 = e_{\mathcal{A}} * (_{\mathcal{A}} * K^1$;

3.3) Jeżeli K^n jest typu M, to konstruujemy $\bar{K}^{n+1} =)_{\mathcal{A}}$;

3.4) Jeżeli K^n jest typu L, to konstruujemy $\bar{K}^n = K^n *)_{\mathcal{A}}$.

A może być postaci:

1. K^1 jest typu L i K^n typu L. Wtedy budujemy

$$\bar{A} = \bar{K}^1 * K^2 * \dots * K^{n-1} * \bar{K}^n$$

2. K^1 typu L i K^n typu M. Wtedy budujemy

$$\bar{A} = \bar{K}^1 * K^2 * \dots * K^n * \bar{K}^{n+1}$$

3. K^1 typu M; K^n typu L. Wtedy budujemy

$$\bar{A} = \bar{K}^o * K^1 * \dots * K^{n-1} * \bar{K}^n$$

4. K^1 typu M i K^n typu M. Wtedy budujemy
$\bar{A} = \bar{K}^0 \ast K^1 \ast \ldots \ast K^n \ast \bar{K}^{n+1}$.

W każdym z przypadków (1) ÷ (4) φ spełnia warunki konstrukcji SD i po usunięciu znaków $\ulcorner e_A \urcorner$ mamy $\bar{A} = t$, które jest SD.

4. Niech $t = f^2_{\Box}(t_1, t_2) = t_1 \Box_A t_2$ ($\Box_A$ oznacza $+_A, -_A, \cdot_A$), o ile zastosowanie operatora $f^2_{\Box}$ jest możliwe. Ponieważ t_1 i t_2 są SD, więc istnieją SD A' i A'', takie że

$$A' = t_1 \text{ i } A'' = t_2 \text{ postaci:}$$

$$A' = K^{1'} \ast K^{2'} \ast \ldots \ast K^{n'} \; ; \; A'' = K^{1''} \ast K^{2''} \ast \ldots \ast K^{m''}$$

Mogą zaistnieć następujące przypadki.

4.1) Jeżeli $K^{n'}$ jest typu M i $K^{1''}$ jest typu M, to budujemy

$$\bar{A} = A' \ast \Box_A \ast A'' ;$$

4.2) Jeżeli $\bar{K}^{n'}$ jest typu L i $K^{1''}$ jest typu M, to budujemy

$$\bar{K}^{n'} = K^{n'} \ast \Box_A \text{ po czym konstruujemy}$$

$$\bar{A} = K^{1'} \ast \ldots \ast K^{(n-1)'} \ast \bar{K}^{n'} \ast A''$$

4.3) Jeżeli $K^{n'}$ jest typu M i $K^{1''}$ jest typu L, to budujemy

$$\bar{K}^{1''} = \Box_A \ast K^{1''} \text{ po czym konstruujemy}$$

$$\bar{A} = A' \ast \bar{K}^{1''} \ast K^{2''} \ast \ldots \ast K^{m''}$$

4.4) Jeżeli $K^{n'}$ jest typu L i $K^{1''}$ jest typu L, to budujemy

$$\bar{K} = K^{n'} \ast \Box_A \ast K^{1''}$$

po czym konstruujemy

$$\bar{A} = K^{1'} \ast \ldots \ast K^{(n-1)'} \ast \bar{K} \ast K^{2''} \ast \ldots \ast K^{m''}$$

Charakterystyka φ spełnia warunki budowy SD. Ponadto nie występowały w budowie $\bar{A}$ znaki $\ulcorner e_A \urcorner$, więc $\bar{A} = t$ jest SD.
Kończy to dowod w jedną stronę.

($\Longleftarrow$) Należy wykazać, że każde SD jest TWA.

Mamy SD A postaci

$$A = K^1 \ast K^2 \ast \ldots \ast K^n.$$

Wybieramy wszystkie K^i, które są typu M i numerujemy kolejno $M^1,\dots,M^p$. Ponadto $\forall j (1 \leq j \leq p-1)$ pomiędzy M^j i M^{j+1} istnieje dokładnie jeden konkatenant typu L. Pokażemy, że konstrukcję A można przeprowadzić przy pomocy pewnego drzewa, które będzie jednocześnie drzewem budującym pewne TWA. Ponieważ $\forall j\ (1 \leq j \leq p)$ $M^j \in \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$, więc $\forall j\ (1 \leq j \leq p)$ $M^j \in Tm_0$ i tym samym wszystkie są TWA. Kładąc $t^0_j = M^j$ $j=1,\dots,p$ mamy zerowe piętro drzewa. Następnie rozkładamy A przy pomocy charakterystyki φ. Szukamy tych znaków $\ulcorner (_A \urcorner$, na których φ osiąga maksymalną wartość na A. Niech $\max\limits_A \varphi = n$.

1. Jeżeli $n=0$, tj. w A nie ma znaków $\ulcorner (_A \urcorner$, $\ulcorner)_A \urcorner$, to

1.1) w A może nie być w ogóle konkatenantów typu L. Wtedy istnieje tylko jeden konkatenant typu M tworzący A, zatem A jest TWA.

1.2) Wszystkie konkatenanty typu L są jednoznakowe i mogą być znakami $\ulcorner +_A \urcorner$, $\ulcorner -_A \urcorner$, $\ulcorner *_A \urcorner$ (wynika to z definicji SD, patrz [1]). Wybieramy z A wszystkie konkatenanty K^i typu L numerując kolejno $L^1, L^2,\dots, L^q$ $(p + q = n)$.

Budujemy drzewo.

1.2.1. Jeżeli K^1 jest typu L, to $K^1 = L^1 = -_A$ (z warunków konstrukcji SD). Wtedy pierwsze piętro ma postać

$$t^1_1 = f^1_-(t^0_1) = f^1_-(M^1) \text{ i } t^1_j = f_{id}(t^0_j) \quad j=2,\dots,p.$$

Każdy t^1_j $(j=1,\dots,p)$ jest oczywiście TWA, zaś

$$t^1_1 * L^2 * t^1_2 * L^3 * \dots * L^p * t^1_p \quad \text{jest SD.}$$

(A) Szukamy L^j $(2 \leq j \leq p)$ będącego znakiem $\ulcorner *_A \urcorner$. Budujemy wtedy drugie piętro drzewa postaci

$$t^2_{j-1} = f^2_*(t^1_{j-1}, t^1_j),\ t^2_1 = f_{id}(t^1_1),\dots,t^2_{j-2} = f_{id}(t^1_{j-2}),$$

$$t^2_j = f_{id}(t^1_{j+1}),\dots,\ t^2_{p-1} = f_{id}(t^1_p).$$

Każdy t^2_j $(j=1,\dots,p-1)$ jest TWA, zaś

$$t^2_1 * L^2 * \dots * L^{j-1} * t^2_{j-1} * L^{j+1} * t^2_j * \dots * L^p * t^2_{p-1}$$

jest SD.

Wykonujemy tę czynność (A) tyle razy ile jest konkatenantów typu L równych $\ulcorner *_A \urcorner$. Załóżmy, że znaków tych było l $(0 \leq l \leq p-1)$; zbudowaliśmy piętro drzewa o numerze $l+1$, na którym znajdują się elementy $t^{l+1}_1,\dots,t^{l+1}_{p-l}$.

(B) Szukamy wśród konkatenantów typu L (jest ich teraz $p-1-l$) konkatenanta będącego znakiem $\ulcorner +_A \urcorner$ lub $\ulcorner -_A \urcorner$. Tworzymy piętro o numerze $l+2$ na takiej samej zasadzie jak w (A), z tym że miejsce operatora f^2_* zastępuje odpowiednio operator f^2_+ albo f^2_-.

Wykonujemy czynność (B) tyle razy ile jest konkatenantów typu L równych $\ulcorner +_{A} \urcorner$ albo $\ulcorner -_{A} \urcorner$.

Zauważmy, że po każdorazowym wykonaniu czynności (A) oraz (B) każdy element nowo otrzymanego piętra jest TWA oraz, że odpowiednia konkatenancja elementów tego piętra oraz nie wykorzystanych jeszcze konkatenantów typu L (konstruowana jak w (A)) jest SD. Po wykonaniu wszystkich czynności typu (A) i (B) otrzymujemy TWA (piętro o numerze p), co wynika także z twierdzenia 1 podanego w [1].

1.2.2. Jeżeli K^3 nie jest typu L to postępujemy analogicznie jak w (1.2.1) poczynając od (A), co pociągnie za sobą, że ilość pięter będzie o 1 mniejsza (uzyskamy piętro najwyższe o numerze p-1).

2. Jeżeli $n \neq 0$, to postępujemy wg algorytmu

2.1) Obliczamy charakterystykę φ na A i w momencie natrafienia na znak $\ulcorner (_{A} \urcorner$, na którym $\varphi = n$,

(C) począwszy od tego znaku wypisujemy kolejne znaki i konkatenanty po nim następujące aż do pierwszego znaku $\ulcorner)_{A} \urcorner$, na którym $\varphi = n - 1$, włącznie.

2.2) Obliczamy charakterystykę φ na dalszej części A. Jeżeli na pewnym znaku $\ulcorner (_{A} \urcorner$ $\varphi = n$, postępujemy tak jak od miejsca (C) w(2.1), po czym znowu jak w 2.2. W przeciwnym razie kończymy.

W wyniku działania tego algorytmu mamy s (s >1) rozłącznych części SD A, rozpoczynających się od znaku $\ulcorner (_{A} \urcorner$, na którym $\varphi = n$ i kończących się znakiem $\ulcorner)_{A} \urcorner$, na którym $\varphi = n - 1$. Każdą z s tak wyróżnionych części przyporządkowujemy jednemu z s węzłów piętra o numerze k_1, gdzie $k_1 = \max_{1 \leq i \leq s} m_i$, zaś m_i jest ilością konkatenantów typu L w i-tej wyróżnionej części.

Schodzimy na piętro $k_1 - 1$, przyporządkowując każdemu z s węzłów tego piętra po jednej z s części A pozbawioną znaków $\ulcorner (_{A} \urcorner$, $\ulcorner)_{A} \urcorner$; krawędziom natomiast przypisujemy działanie operatora $f^1_{(\dots)}$. Zarówno na k_1 jak i na k_1-1 piętrze każda z s części SD A jest oczywiście SD i ma budowę jak w (1). Postępujemy zatem zgodnie z (1) dla każdej z s części SD A. Schodzimy w ten sposób do piętra zerowego, z tym, że dla części i-tych, dla których $m_i < k_1 - 1$ działamy (po wykonaniu (1)) $k_1 - m$ razy operatorem f_{id}.

Te t^0_j, które nie zostały połączone krawędziami w wyniku tej konstrukcji przenosimy operatorem f_{id} na piętro k_1. Postępujemy analogicznie dla tych części SD A zaczynających się od znaku $\ulcorner (_{A} \urcorner$, na którym $\varphi = n-1$ i kończących się znakiem $\ulcorner)_{A} \urcorner$, na którym $\varphi = n-2$

budując piętro k_2 i schodząc do piętra k_1, które jest teraz dla nas zerowym. Musimy w tym celu założyć, że na elementach piętra k_1 φ nie zmienia swoich wartości. Można to interpretować jak gdyby każdy element piętra k_1 był konkatenantem typu M.

Postępując dalej w analogiczny sposób, na pewnym piętrze k_t mamy SD, które są TWA na mocy twierdzenia 1 z pracy [1], zawierające wszystkie znaki $\ulcorner (_A \urcorner$, $\ulcorner |_A \urcorner$ występujące w A, z tym, że jeżeli

a) na k_t-tym piętrze jest tylko jeden węzeł to

  a1) o ile pierwszym elementem SD A był znak – , to budujemy piętro k_t+1 działając operatorem f^1_- otrzymując wyjściowe SD A, które w myśl tw. 1 jest TWA,

  a2) jeżeli pierwszym elementem SD A nie był znak $\ulcorner -_A \urcorner$, to na k_t-tym piętrze mamy SD A, które jest TWA,

b) jeżeli na k_t-tym piętrze jest więcej niż jeden węzeł, to mamy sytuację jak w (1), przy czym musimy założyć, że na elementach tego piętra φ nie zmienia swoich wartości.

LITERATURA

[1] Balcer M., Mika A., Pizoń T.: Konstrukcja słów dopuszczalnych pewnego alfabetu jako pojęć równoważnych termowym wyrażeniom arytmetycznym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej.

ТЕОРЕМА ОВ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ДОПУСТИМЫХ СЛОВ НЕКОТОРОГО АЛФАВИТА И ТЕРМОВЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Р е з ю м е

В работе формулируется теорема об эквивалентности определений допустимого слова некоторого алфавита и термового арифметического выражения. В дальнейшем, приводится доказательство этой теоремы.

LE THÉOREME DE L'ÉQUIVALENCE DES DÉFINITIONS DU MOT ADMISSIBLE D'UN ALPHABET ET DU TERME ARYTHMÉTIQUES

R é s u m é

Les auteurs présentent le théoréme de l'équivalence des définitions du mot admissible d'un alphabet et du terme arythmétique. Ensuite ils démontrent ce théoréme par l'induction sur les arbres.