ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: GÓRNICTWO z. 245 Nr kol. 1479

Tadeusz BANASZEWSKI
Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

WPŁYW POŁOŻENIA SAMOSYNCHRONIZUJĄCYCH SIĘ WIBRATORÓW NA DRGANIA PRZESIEWACZA

Streszczenie. Przeprowadzono rozważania teoretyczne samosynchronizacji dwóch wibratorów bezwładnościowych, których oś symetrii nie przechodzi przez środek masy układu drgającego. Wyniki rozważań zostały potwierdzone na przesiewaczu z dwoma wibratorami bezwładnościowymi.

AN EFFECT OF SELF-SYNCHRONIZING VIBRATORS ON SCREEN VIBRATIONS

Summary. The self-synchronization of two inertia vibrators with symmetry axis shifted from the centre of mass of vibrating system was analysed theoretically.

The theoretical results were confirmed by investigations carried out on a vibrating screen with two inertial vibrators.

1. Wprowadzenie

Do wzbudzania przesiewaczy nadrezonansowych w drgania prostoliniowe wykorzystuje się najczęściej dwumasowe wibratory bezwładnościowe. Ostatnio coraz częściej w nowoczesnych przesiewaczach, takich jak np. PWP czy PZ, do ich wzbudzania w drgania prostoliniowe wykorzystuje się dwa jednomasowe wibratory samosynchronizujące się. Powodem coraz częstszego wykorzystania samosynchronizacji do wzbudzania drgań jest możliwość znacznego uproszczenia konstrukcji napędu poprzez wyeliminowanie kłopotliwej w eksploatacji przekładni zębatej, wymuszającej samosynchronizację obydwu wałów napędowych w wibratorach dwumasowych.

Zjawisko samosynchronizacji wibratorów polega na tym, że jeżeli np. dwa wibratory bezwładnościowe umieszczone zostaną na wspólnym korpusie i napędzane będą osobnymi, jednakowymi silnikami asynchronicznymi, to w pewnych warunkach uzyskają one jednakowe prędkości kątowe z określonym przesunięciem fazowym pomiędzy masami bezwładnościowymi tych wibratorów. Jeżeli oś symetrii wibratorów przechodzi przez środek ciężkości układu drgającego i wibratory obracają się w przeciwnych kierunkach, to uzyskuje się jednakowe drgania prostoliniowe całego korpusu.

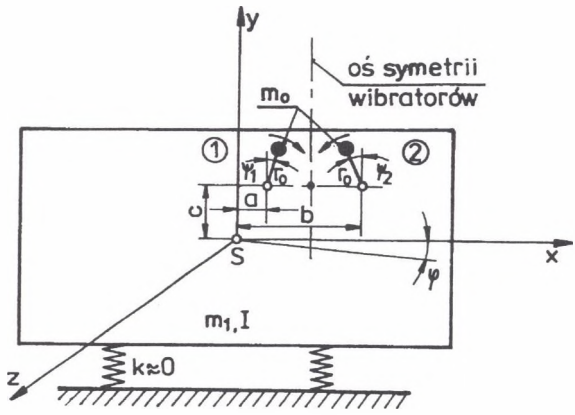
Na temat samosynchronizacji ukazało się wiele prac [2, 3, 4, 5, 7]. Dotyczą one analiz przypadku opisanego powyżej, tj. gdy oś symetrii wibratorów przechodzi przez środek ciężkości układu.

Wśród konstrukcji przesiewaczy można spotkać i takie jak np. przesiewacz PWEK2 [6], w których opisany warunek wyraźnie nie jest spełniony. Wówczas w płaszczyźnie drgań w każdym punkcie przesiewacza są inne trajektorie drgań punktów. Ponieważ na końcach przesiewacza trajektorie drgań mają najbardziej wyraźny kształt elipsy, nazywa się te przesiewacze eliptycznymi.

W pracy przeanalizowana zostanie najpierw kinematyka środka masy układu drgającej wspomnianych przesiewaczy, a następnie ich dowolnych punktów.

2. Teoretyczne podstawy samosynchronizacji

Analizę drgań przesiewaczy, w których oś symetrii dwóch niezależnych wibratorów bezwładnościowych nie przechodzi przez środek masy drgającej, można rozpatrywać w oparciu o model fizyczny pokazany na rys. 1. Dwa niezależne wibratory 1 i 2 napędzane



Rys. 1. Model fizyczny przesiewacza, w którym oś symetrii wibratorów nie przechodzi przez środek masy drgającej S

Fig. 1. The physical model of the screen in which the symmetry axis of vibrators does not come through the centre of the vibrating mass

są jednakowymi silnikami obracającymi się w przeciwnych kierunkach, a oś symetrii wibratorów jest wyraźnie przesunięta względem środka masy S. Układ podparty jest na sprężynach, których sprężystość w rozważaniach przyjęto jako bliską 0. Takie uproszczenie, przyjmowane również przez innych autorów [4], jest dopuszczalne z uwagi na to, że siły sprężystości w maszynach nadrezonansowych – które są przedmiotem rozważań – są małego rzędu w stosunku do sił masowych występujących w takich układach [1]. W związku z tym pominięte będą również siły tłumiące występujące w elementach sprężystych.

W modelu pokazanym na rysunku 1 przyjęto następujące oznaczenia:

m_0 – masy niewyważone wibratorów,

r_0 – promienie mas niewyważonych,

a, b, c – odległości określające położenie wałów wibratorów względem środka masy układu S,

m_1 – masa drgająca układu,

I – moment bezwładności układu względem osi z,

ψ_1, ψ_2 – prędkości kątowe wibratora 1 i 2,

φ – kąt wychylenia układu od położenia zerowego.

Punktem wyjścia do rozważań teoretycznych jest całka z funkcji Lagrange'a

$$\int (T - U)dt \tag{1}$$

gdzie:

T - energia kinetyczna układu,

U - energia potencjalna układu.

Poszukując jej najmniejszej wartości możemy ustalić, jaki ruch wystąpi, bowiem tylko takie będą drgania, dla których całka (1) będzie najmniejsza.

Jak już wspomniano, w rozważaniach pominięta zostanie energia potencjalna układu, co znacznie uprości rozważania i spowoduje większą przejrzystość końcowych wyników.

Dla przedstawionego na rys. 1 modelu energia kinetyczna będzie sumą energii kinetycznej T_s środka masy układu drgającego o masie m i energii kinetycznej T_r drgań obrotowych względem osi z, czyli:

$$T = T_s + T_r \tag{2}$$

Energie te określone są znanymi wzorami:

$$T_s = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{3}$$

$$T_r = \frac{1}{2} I \cdot \dot{\varphi}^2 \tag{4}$$

Dokładne określenie tych energii wymaga rozwiązania odpowiednich równań różniczkowych ruchu środka masy i ruchu obrotowego układu. Zgodnie z modelem pokazanym na rysunku 1 równania różniczkowe ruchu układu, przy pominięciu sił sprężystości i tłumienia, przyjmą postać:

$$m\ddot{x} = m_0 r_0 \omega^2 (\sin\psi_1 - \sin\psi_2) \tag{5}$$

$$m\ddot{y} = m_0 r_0 \omega^2 (\cos\psi_1 + \cos\psi_2) \tag{6}$$

$$I\ddot{\varphi} = m_0 r_0 \omega^2 [c(\sin\psi_1 - \sin\psi_2) - (a\cos\psi_1 + b\cos\psi_2)] \tag{7}$$

gdzie:

$$m = m_1 + 2m_0 \tag{8}$$

Drogi kątowe można określić funkcjami czasu

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \omega t \\ \psi_2 &= \omega t + \lambda \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie λ - kąt przesunięcia fazowego pomiędzy masami niewyważonymi.

Rozwiązaniem równań różniczkowych (5) i (6) są następujące funkcje:

$$x = A\cos(\omega t + \frac{\lambda}{2}) \tag{10}$$

$$y = B\cos(\omega t + \frac{\lambda}{2}) \tag{11}$$

Podstawiając drugie pochodne funkcji (10) i (11) do równań (5) i (6) i uwzględniając funkcje (9), po przekształceniach otrzymamy następujące wzory na amplitudy drgań na kierunku osi x i y:

$$A = \frac{2m_0 r_0 \sin\frac{\lambda}{2}}{m} \tag{12}$$

$$B = -\frac{2m_0 r_0 \cos\frac{\lambda}{2}}{m} \tag{13}$$

Z równań (10), (11), (12) i (13) wynika, że drgania środka masy będą zawsze prostoliniowe o równaniu:

$$y = -(\mathrm{ctg}\frac{\lambda}{2})\cdot x \tag{14}$$

i amplitudzie równej:

$$C = \frac{2m_0 r_0}{m} \tag{15}$$

Podstawiając prędkości uzyskane z funkcji (10) i (11) do równania (3) otrzyma się następujący wzór na średnią wartość energii kinetycznej drgań środka masy m:

$$T_s = \frac{m_0^2 r_0^2 \omega^2}{m} \tag{16}$$

Jak widać, jest ona stała i nie zależy od przesunięcia fazowego.

W celu określenia energii kinetycznej drgań obrotowych (4), a także określenia kąta fazowego λ należy rozwiązać równanie momentów (7). Podstawiając funkcje (9) do równania (7) i całkując, uzyska się wzór na prędkość kątową drgań obrotowych $\dot{\varphi}$, potrzebny do określenia energii kinetycznej drgań obrotowych (4). Średnią wartość tej energii określa wzór:

$$T_r = \frac{1}{4}\frac{m_0^2 r_0^2 \omega^2}{I}[(c\cos\lambda - c - b\sin\lambda)^2 - (a + c\sin\lambda + b\cos\lambda)^2] \tag{17}$$

Podstawiając wzory na energie (16) i (17) do całki (1) i szukając minimalnej jej wartości, poprzez porównanie jej pierwszej pochodnej do zera można uzyskać wzór na tangens kąta przesunięcia fazowego

$$\mathrm{tg}\,\lambda = -\frac{c\cdot(a+b)}{c^2 - a\cdot b} \tag{18}$$

Zatem wartość kąta przesunięcia fazowego określona będzie wzorem:

$$\lambda = -\mathrm{arctg}\frac{c\cdot(a+b)}{c^2 - a\cdot b} \tag{19}$$

Z analizy stabilności ruchu wynika, że rzeczywisty ruch wystąpi tylko przy przesunięciu λ, a nie przy $\lambda+\pi$, gdyż dla tej wartości energia kinetyczna jest zawsze większa.

Jeżeli wyliczone ze wzoru (19) przesunięcie fazowe λ będzie dodatnie, a więc wówczas gdy $a\cdot b > c^2$, to kąt przesunięcia powinno się wyliczać ze wzoru:

$$\lambda = \lambda_{(19)} - \pi \tag{20}$$

gdzie: $\lambda_{(19)}$ kąt wyliczony z wzoru (19).

Całkując dwukrotnie równanie (7), otrzymamy następujący wzór na drogę kątową drgań obrotowych

$$\varphi = \frac{m_0 r_0}{I}[c\sin(\omega t + \lambda) - c\sin\omega t + a\cos\omega t + b\cos(\omega t + \lambda)] \tag{21}$$

Po licznych przekształceniach funkcję (21) można sprowadzić do postaci

$$\varphi = \Phi\cos(\omega t - \gamma) \tag{22}$$

gdzie: Φ jest amplitudą kątową drgań obrotowych, a γ przesunięciem fazowym tych drgań.

$$\Phi = \frac{m_0 r_0}{I}\left(\sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + c^2}\right) \tag{23}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{c}{a} \tag{24}$$

Znając przebieg drgań obrotowych (22), można już teraz określić drgania dowolnego punktu na rzeszocie. Drgania punktu leżącego poza środkiem masy są wynikiem drgań środka masy (10) i (11) oraz drgań obrotowych (22) wokół tego środka. Ruch dowolnego punktu o współrzędnych $P(x_i\ y_i)$ określają poniższe wzory:

$$x = A\cos\left(\omega t + \frac{\lambda}{2}\right) + y_i\Phi\cos(\omega t - \gamma) \tag{25}$$

$$y = B\cos\left(\omega t + \frac{\lambda}{2}\right) - x_i\Phi\cos(\omega t - \gamma) \tag{26}$$

W oparciu o powyższe wzory (25) i (26) oraz wykorzystując technikę komputerową możemy określić trajektorię drgań dowolnego punktu na rzeszocie.

3. Badania drgań przesiewacza z samosynchronizującymi się wibratorami

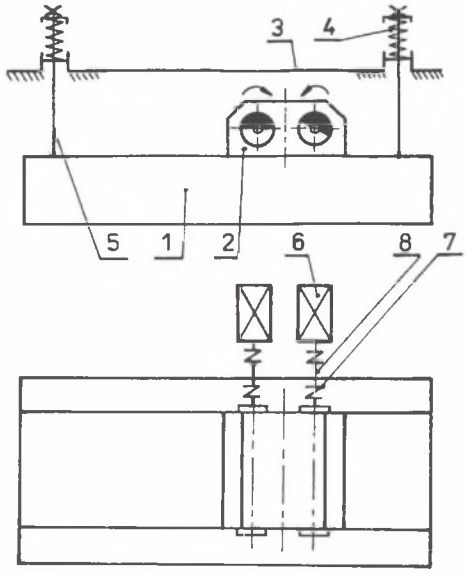
W celu zweryfikowania wyprowadzonych wzorów teoretycznych przeprowadzono badania na przesiewaczu laboratoryjnym (rys. 2).

Rzeszoto *1* zawieszono na czterech linkach stalowych *5* połączonych ze sprężynami *4* wspartymi na ramowej konstrukcji nośnej *3*. Do rzeszota przykręcono śrubami dwa wibratory zamontowane we wspólnej obudowie *2*. W ścianie bocznej rzeszota wywiercono otwory w odstępach 75 [mm], co pozwala na zmianę położenia wibratorów względem środka masy rzeszota *1* oraz na zmianę środka masy badanego układu.

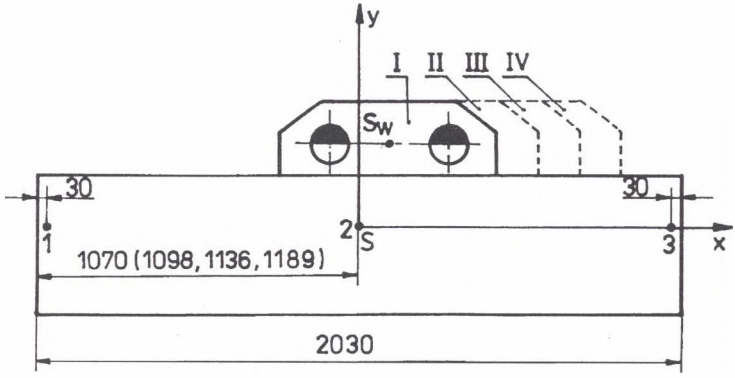
Wibratory napędzane były dwoma silnikami elektrycznymi asynchronicznymi *6* o mocy 1,5 [kW] każdy i obrotach n = 950 [obr/min], połączonymi z wibratorami układem sprzęgieł gumowych *7* i wałków metalowych *8*.

Przed przystąpieniem do badań zważono masę rzeszota m_{rz} = 175 [kg] i wibratorów wraz z obudowami m_w = 120 [kg] oraz moment bezwładności dla każdego położenia wibratorów. Ponadto wyznaczono środek masy rzeszota i środek masy wibratorów oraz środek masy całego układu drgającego.

W celu dokonania rejestracji przesunięcia fazowego λ zbudowano układ pomiarowy, w którym zastosowano dwa czujniki dające impulsy w momencie pionowego położenia mas.



Rys. 2. Schemat przesiewacza laboratyjnego
Fig.2. The diagram of the laboratory screen



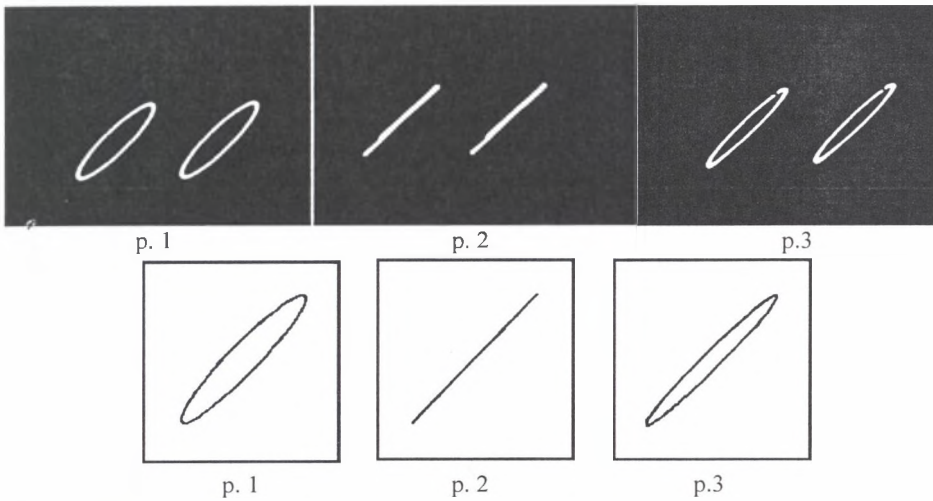
Rys. 3. Kolejne położenia obudowy wibratorów, przy których dokonywano rejestracji trajektorii punktów 1, 2 i 3
Fig.3. Consecutive positions of the vibrators casing at which the trajectory of points 1, 2 and 3 were recorded

Badania przeprowadzono przy czterech położeniach wibratora, tak jak pokazano na rys. 3. Zdjęcia trajektorii dwóch punktów świetlnych oddalonych od siebie o 10 [mm] dokonywano w punktach 1, 2 i 3. Punkty 1 i 3 były stałe, natomiast punkt 2 umieszczany w środku masy układu drgającego S ulegał przesunięciu w zależności od położenia wibratorów. Dlatego wymiar odległości punktu 2 od lewej krawędzi rzeszota zawiera aż cztery liczby. Na rys. 4 pokazano przykładowo sfotografowane punkty świetlne w trzech opisanych punktach dla IV

położenia wibratorów (rys. 3). Przykład ten wybrano dlatego, gdyż przy tym położeniu wibratorów uzyskiwano największe przesunięcie fazowe λ i najmniejsze nachylenie drgań do poziomu, a jednocześnie elipsy na końcach są najmniej spłaszczone.

Pod zdjęciami na rys. 4 zamieszczono trajektorie uzyskane ze wzorów teoretycznych. Jak łatwo zauważyć, istnieje bardzo dobra zgodność między trajektoriami rzeczywistymi a uzyskanymi na drodze teoretycznej. Świadczy to o przydatności wyprowadzanych wzorów teoretycznych do określenia trajektorii drgań rozpatrywanego układu.

W celu dokładniejszego określenia zgodności drgań określonych na drodze teoretycznej z drganiami pomierzonymi zestawiono w tabeli 1 wyniki uzyskane ze wzorów teoretycznych wraz z odczytanymi ze zdjęć amplitudami i kątami nachylenia drgań oraz z zarejestrowanym zapisem kąta przesunięcia fazowego λ.



Rys. 4. Trajektorie sfotografowane i obliczone dla poszczególnych punktów
Fig.4. Trajectories photographed and calculated for the particular points

Wyniki zestawiono dla czterech położeń wibratorów. Kąt nachylenia drgań α dla punktu 2 obliczony jest na podstawie wzoru (14):

$$\alpha = \mathrm{arc}\left(-\mathrm{ctg}\frac{\lambda}{2}\right) \tag{27}$$

Natomiast dla punktów 1 i 3 podany jest kąt nachylenia dłuższej osi elipsy odczytany z wykreślonych elips. Tak samo dla tych punktów dokonano odczytu z fotografii.

Skoków drgań dla punktów 1 i 3 nie podano, gdyż różniły się one od skoku w punkcie 2 zaledwie o ±0,3 [mm], a więc w granicach błędu pomiaru.

Jak widać z zamieszczonych liczb w tabeli 1, różnice w wartościach obliczonych i pomierzonych kąta przesunięcia fazowego, skoku i kąta nachylenia drgań są niewielkie i leżą najczęściej poniżej 5%. Świadczy to o dobrej zgodności wyników teoretycznych z uzyskanymi z badań. Tylko w nielicznych przypadkach jest nieco przekroczona ta wartość. Różnice te spowodowane są zarówno błędami pomiaru, jak i trudnościami w precyzyjnym ustalaniu środka ciężkości, momentu bezwładności i parametrów a, b i c, które decydują o wynikach teoretycznych.

Tabela 1

Zestawienie wyników drgań określonych teoretycznie z wynikami pomierzonymi na rzeszocie przesiewacza

Położenie wibratorów	Rodzaj wyników	Parametr \ Punkt	1	2	3
I	Teoret.	1 Kąt przes. fazowego λ 2 Kąt nach. drgań α 3 Skok drgań [mm]	- 83,5° -	- 14° 83° 10	- 83,5° -
	Eksper.	1 Kąt przes. fazowego λ 2 Kąt nach. drgań α 3 Skok drgań [mm]	- 83° -	- 12° 84° 10,3	- 84° -
II	Teoret.	1 Kąt przes. fazowego λ 2 Kąt nach. drgań α 3 Skok drgań [mm]	- 71° -	- 39° 70,5° 10	- 69,5° -
	Eksper.	1 Kąt przes. fazowego λ 2 Kąt nach. drgań α 3 Skok drgań [mm]	- 72° -	- 42° 72° 10,4	- 71,5° -
III	Teoret.	1 Kąt przes. fazowego λ 2 Kąt nach. drgań α 3 Skok drgań [mm]	- 58° -	- 77° 51,5° 10	- 46° -
	Eksper.	1 Kąt przes. fazowego λ 2 Kąt nach. drgań α 3 Skok drgań [mm]	- 55° -	- 82° 52° 10,3	- 45° -
IV	Teoret.	1 Kąt przes. fazowego λ 2 Kąt nach. drgań α 3 Skok drgań [mm]	- 46° -	- 90° 45° 10	- 43° -
	Eksper.	1 Kąt przes. fazowego λ 2 Kąt nach. drgań α 3 Skok drgań [mm]	- 46° -	- 97° 45° 10,1	- 43° -

4. Podsumowanie

Przedstawione wyniki dowodzą, że opracowane wzory teoretyczne są w pełni przydatne do obliczeń inżynierskich przy projektowaniu przesiewaczy z samosynchronizującymi się wibratorami, których oś symetrii nie przechodzi przez środek masy układu drgającego.

Rozpatrywany układ uniemożliwia uzyskanie jednakowych drgań wzdłuż pokładu sitowego. Jak obrazuje to rys. 4, wzdłuż sita najpierw występują drgania eliptyczne, które im bliżej środka masy, są coraz bardziej spłaszczone, a w środku masy są prostoliniowe, następnie znowu pojawiają się elipsy aż do najwyraźniejszych na końcu przesiewacza. Obieganie punktów po elipsach jest inne po obu stronach środka masy, co znacznie zmienia kąty wyrzutu ziarn, a tym samym wpływa znacząco na zróżnicowanie prędkości materiału wzdłuż pokładu sitowego. Zmiana trajektorii drgań wzdłuż pokładu sitowego będzie znacznie bardziej zróżnicowana, niż pokazuje to rys. 4, jeżeli pokład sitowy leży poniżej środka masy układu drgającego. Wówczas elipsy mogą być ułożone nawet pionowo, co wymaga ze względów transportowych nachylenia sita.

Każda zmiana masy w rozpatrywanym przesiewaczu, np. zmiana sit na lżejsze lub cięższe, spowoduje zmianę parametrów a, b i c (rys. 1), a to z kolei wpłynie na zmianę trajektorii drgań we wszystkich punktach. Jednocześnie przez zwiększenie masy przesiewacza w odpowiednim miejscu można korygować trajektorie drgań wzdłuż pokładu sitowego.

LITERATURA

1. Banaszewski T.: *Przesiewacze*, Wyd.Śląsk, Katowice 1990.
2. Banaszewski T., Schollbach A.E.: *Schwingungsanalyse von Maschinen mit selbstsynchronisiereden Unwuchterregern.* Aufbereitungs Technik Nr.8/1998.
3. Banaszewski T.: *Wykorzystanie samosynchronizacji wibratorów do wzbudzania drgań przesiewaczy.* Międzywydziałowe Seminarium Naukowe „Aplikacje badań naukowych w budowie maszyn", AGH, Kraków 2000.
4. Blechman I.: *Sinchronizacja dinamiczeskich sistiem.* Wyd. Nauka, Moskwa 1971.
5. Bychowski I.: *Osnowy teorji wybracjonnoj techniki.* Wyd. Maszynostrojenije, Moskwa 1969.
6. Gerus T., Osoba M., Śmiejek Z.: *Kierunki rozwoju podstawowych maszyn przeróbczych.* Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna, KOMEKO 2000, Wyd. KOMAG Gliwice.
7. Schmidt P., Peltzer P.: *Das Synchronisieren zweier Unwuchtrüttler an Schwingmaschinen.* Aufbereitungs Technik Nr 3/1976.

Recenzent: Dr inż. Lucjusz Anders

Abstract

The self-synchronization of two inertial vibrators with symmetry axis shifted from the centre of mass of vibrating system was analysed theoretically. In this case the self-synchronization of constant non-zero phase shift is present. Thus, the vibrators impart an additional torque moment to the vibrating mass. Due to such interaction the diversified vibrations occur at each point on the plane of vibration. The vibrations of centre of mass are determined theoretically and formulae describing vibrations at any point are given. The theoretical results were confirmed by investigations carried out on a vibrating screen with two inertial vibrators.